Math. P. 61nc Burg

COMPENDIUM

der

höheren Mathematik.

Von

ADAM RITTER VON BURG,

k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Professor der Mechanik und Maschinenlehre an dem k. k. polytechnischen Institute in Wien, emer. Professor der Elementar- und höheren Mathematik, Ritter des kaiserl. österr. Leopold-, so wie mehrerer anderer hoher Orden, wirklichem Mitglied der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, so wie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften, Akademien und Vereine.

Dritte, sehr vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit vier Kupfertafeln.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1859.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Excellenz

dem Hochgebornen Herrn

Leo Leopold Grafen v. Thun-Hohenstein,

Ritter der eisernen Krone erster Classe, Grosskreuz des päpstlichen Pius-Ordens, geheimer Rath, Ehrenmitglied der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Ehrendoctor der Universität in Lemberg, Mitglied der Universität und der Gelehrten-Gesellschaft in Krakau, Ehrenmitglied der Akademie der schönen Künste und des Institutes für Wissenschaft, Literatur und Künste in Venedig, des Institutes für Künste und Wissenschaften und des Institutes der schönen Künste in Mailand, der Akademie der Künste und Wissenschaften in Padua, der k. k. mährisch-schlesischen Gesellschaft für Ackerbau, Vorsteher und wirkendes Mitglied des böhmischen Vereines zum Wohle entlassener Sträflinge, Ehrenmitglied des *Museums Francisco-Carolinum* in Linz, des naturhistorischen Vereines in Prag, des historischen Vereines in Krain, des Werner Vereines zur geognostischen Durchforschung von Mähren und Schlesien, des geologischen Vereines in Ungarn, Ehrenbürger der Städte Innsbruck, Bruneken, Erlau und Eszek etc. Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Humanitäts- und gemeinnütziger Vereine

in aller Ehrfurcht

gewidmet

vom Verfasser.

Euer Excellenz!

Wenn ich mir erlaube, Ew. Excellenz das vorliegende Lehrbuch, welches besonders für höhere technische Lehranstalten bestimmt, und dafür auch als vollkommen geeignet bereits anerkannt ist, in dieser neuen, vermehrten und verbesserten Auflage ehrfurchtsvoll zuzueignen; so geschieht diess einzig, um Ew. Excellenz die Dankbarkeit und Verehrung, welche ich mit allen jenen theile, denen die grosse Lebensfrage unseres neu constituirten Kaiserstaates: Volksunterricht und höhere Ausbildung, warm und lebhaft am Herzen liegt, und deren schwierigen

Lösung sich Ew. Excellenz mit unermüdeter und bewunderungswürdiger Thätigkeit so erfolgreich hingeben, auch öffentlich aussprechen und an den Tag legen zu können.

Der ich in aller Ehrfurcht verharre als

Euer Excellenz

gehorsamster Diener

A. R. v. Burg.

Vorrede

zur zweiten Auflage.

Wenn sich der Verfasser in Folge der über dieses Lehrbuch erschienenen günstigen Recensionen, noch mehr aber durch den Umstand, dass dasselbe in mehreren öffentlichen Lehranstalten des In- und Auslandes als Leitfaden benützt wird, zu der Annahme berechtigt hielt, dass dieses Compendium eben in der Ausdehnung, der eigenthümlichen Aneinanderreihung der Lehrsätze und ihrer Fassung, einem wirklichen Bedürfnisse in dem Studium der höhern Mathematik an höhern Gewerbschulen und technischen Lehranstalten entgegenkomme: so durfte er sich auch bei dieser neuen Auflage keine wesentlichen Abweichungen von diesem durch die Erfahrung bewährten Systeme erlauben. So sehr daher der Verfasser bei dieser neuen Ausgabe auch bemüht war, den Fortschritten der neuesten Zeit Rechnung zu tragen und die Wünsche mehrerer höchst

achtbaren Schulmänner, welche sich dieses Compendiums bei ihren Vorträgen bedienen, dabei zu berücksichtigen: so war es ihm gleichwohl nicht möglich, allen diesen Anforderungen zu genügen, indem sonst das Buch eine solche Ausdehnung erhalten hätte, dass es dadurch den Charakter eines Compendiums, worin gerade mit ein Hauptvorzug desselben liegt, gänzlich verloren haben würde.

Nichts destoweniger fühlt sich der Verfasser verpflichtet, allen diesen Freunden und Förderern der mathematischen Wissenschaften, welche ihm ihre wohlgemeinten, schätzenswerthen Bemerkungen auf die freundlichste Weise mittheilten, seinen Dank hiefür öffentlich auszusprechen.

Eine sorgfältige Vergleichung dieser neuen mit der ersten Auflage wird dieselben überzeugen, dass er diese Bemerkungen möglichst berücksichtigt und ihrem Wunsche nach Erweiterung einzelner Capitel auch theilweise entsprochen habe. So finden sich — um nur auf das Wesentlichste hinzudeuten — gleich im 1. Abschnitte beinahe in allen Capiteln, welche von den goniometrischen Linien und der Auflösung der Dreiecke handeln, solche Zusätze; im 2. Abschnitte wurden im 3. Capitel, in Notenform, die Hauptsätze der sogenannten Grenzrechnung, so wie im 4. Capitel,

welches die Theorie der höhern Gleichungen behandelt, die *Horner*'sche Methode zur näherungsweisen Berechnung der reellen Wurzeln, so wie das von *Sturm* angegebene allgemeine Verfahren zur Auffindung der reellen Wurzeln und ihrer Grenzen, mit erläuternden Beispielen aufgenommen. Dagegen hat der Verfasser den früher von ihm aufgestellten Beweis über die Existenz der Wurzeln, da ihn dieser nun nicht mehr befriedigt, so wie überhaupt auch jeden andern Beweis hierüber in diesem Abschnitte weggelassen und sich auf den ganz einfachen und kurzen Beweis in der Differentialrechnung bezogen, welchen er dort nach *Ohm's* Verfahren eingeschaltet hat. Im 5. Abschnitte wurde im 3. Capitel das Wichtigste über die Flächen der zweiten Ordnung, so wie im 6. Abschnitte nebst mehreren Zusätzen, im 9. Capitel noch ein Paragraph über die Krümmungsebene einer gegebenen Curve aufgenommen. Auch hat das Capitel über bestimmte Integrale eine Erweiterung erhalten, so wie endlich dieser Ausgabe noch ein Anhang über die Elemente der Variationsrechnung beigegeben wurde.

Mit diesen Erweiterungen und Verbesserungen glaubt der Verfasser hoffen zu dürfen, allen billigen Anforderungen entsprochen, und dieser neuen, auch

in typographischer Beziehung reichlicher ausgestatteten Ausgabe wenigstens dieselbe freundliche Aufnahme gesichert zu haben, welche diesem Lehrbuche gleich bei dem ersten Erscheinen in so hohem Masse zu Theil wurde.

Wien, 8. April 1851.

Der Verfasser.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Dem Wunsche des Herrn Verlegers, von diesem Lehrbuche, dessen zweite Auflage vollständig vergriffen ist, sofort eine neue oder die dritte Auflage zu veranstalten, gerne entsprechend, konnte sich der Verfasser doch nicht entschliessen, das Buch nur ohne Weiteres wieder abdrucken zu lassen; sondern er erachtete es, schon aus Dankbarkeit für die gute Meinung, welche für dieses Compendium besteht, für seine Pflicht, dasselbe wiederholt durchzusehen und alle jene Verbesserungen und Erweiterungen, welche sich durch die seitherigen Erfahrungen als wünschenswerth und ohne den Charakter eines Compendiums zu sehr zu beeinträchtigen, als thunlich herausstellten, dabei vorzunehmen.

Bei Vergleichung dieser neuen mit der vorhergehenden Auflage wird man daher auch finden, dass nur wenige Capitel ganz unverändert geblieben, sondern bei den meisten solche Aenderungen oder Zusätze gemacht wurden, durch welche theils eine grössere Schärfe in den Schlüssen und Beweisen, theils eine grössere Eleganz in den Ableitungen und Entwickelungen erzielt wurde.

Der geneigte, sachkundige Leser wird sich dabei überzeugen, dass der Verfasser, wie es in seiner Pflicht gelegen, die neuesten trefflichen Arbeiten eines *Cauchy*, *Moigno*, *Serret*, *Sturm* und *Cournot* benützt und Mehreres davon aufgenommen habe. Er wird aber auch in dieser Auflage wieder Manches finden, was dem Verfasser eigenthümlich ist und dem Buche eine erhöhte Brauchbarkeit verleihen dürfte; er will in dieser Beziehung nur auf das Capitel über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen aufmerksam machen.

Und so möge denn dieses Lehrbuch, welches so vielfältig für das Studium der höhern Mathematik als Vorbereitung für die angewandten Fächer, als Mechanik, Baukunst u. s. w. in in- und ausländischen technischen Lehranstalten benützt wird, in dieser neuen Bearbeitung erhöhten Nutzen stiften und mit derselben Nachsicht und dem gleichen Wohlwollen, wie die beiden vorhergehenden Auflagen beurtheilt und aufgenommen werden!

Wien, 4. October 1858.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

Erster Abschnitt.

Die Elemente der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von den goniometrischen Linien.

Seite

Einleitung. Trigonometrische oder goniometrische Linien 3

Hauptrelationen zwischen Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. . 9

Entwickelung von $sin(\alpha \pm \beta)$, $cos(\alpha \pm \beta)$ u. s. w. 13

Umwandlung der Formeln für den Halbmesser r 19

Zweites Capitel.

Ueber die Berechnung der Sinus, Cosinus u. s. w.

Berechnung von $sin\,30^0$, $sin\,45^0$,... $sin\,1^1$, $sin\,2^1$ u. s. w. 22

Sätze, auf welchen die Einrichtung und der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln beruhen 27

Drittes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der geradlinigen Dreiecke.

Ableitung dieser Formeln. 28

Viertes Capitel.

Auflösung der geradlinigen Dreiecke.

a) Der rechtwinkeligen Dreiecke, sammt Beispielen. 30

b) Der schiefwinkeligen Dreiecke, sammt Beispielen 32

Fünftes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Seite
Ableitung dieser Formeln . 38
Die Gauss'schen Formeln und die Neper'schen Analogien 41

Sechstes Capitel.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

a) Der rechtwinkeligen und Quadranten-Dreiecke, sammt Beispielen . 42
Die Neper'schen Regeln . 44
b) Der schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke, sammt Beispielen 47

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Functionen.

Erstes Capitel.

Von den Functionen im Allgemeinen.

Erklärungen . 61
Satz der unbestimmten Functionen 66
Satz über die Verbindung mehrerer Functionen derselben Form . . . 67

Zweites Capitel.

Allgemeine Gesetze für die Multiplication der Functionsreihen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz.

Multiplication der Functionsreihen, sammt Beispielen 68
Polynomischer Lehrsatz . 71
Beispiel . 72
Binomischer Lehrsatz . 75
Entwickelung von $a^n + b^n$ durch y ausgedrückt, für $y = a + b$. . . 78
Beweis, dass der binomische Lehrsatz für jeden beliebigen Exponenten Giltigkeit habe . 78
Dasselbe für den polynomischen Lehrsatz 81

Drittes Capitel.

Von den Grenzen der Functionen; dem unendlich Grossen und Kleinen.

Erklärungen . 82
Lehrsätze mit Beziehung auf die sogenannte Grenzrechnung 84

Viertes Capitel.

Theorie der höheren Gleichungen.

I.
Gleichungen mit Einer Unbekannten.

Seite

Erklärungen . 18

Das Polynom X der Gleichung $X=0$ ist eine continuirliche Function von x . —

Ist A_m der grösste Coefficient des Polynoms X, so wird für $x \overline{\underline{>}} A_m+1$ das erste Glied x^n desselben grösser, als die Summe aller übrigen Glieder . 90

Erhält X für $x=a$ und $x=b$ verschiedene Zeichen, so liegt wenigstens eine Wurzel der Gleichung $X=0$ zwischen a und b . . 91

Jede Gleichung von einem ungeraden Grad hat wenigstens eine, jede Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln 92

Jede Gleichung besitzt wenigstens eine Wurzel, welche entweder reell oder imaginär ist 93 u. 489

Ist $x=w$ eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so ist X durch $x-w$ theilbar . 93

Einfache Methode zur Herleitung des Quotienten $\frac{X}{x-w}$, sammt Beispielen . 94

Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat weder mehr noch weniger als n-Wurzeln . 95

Zerlegung des Polynoms $X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots$ in einfache oder quadratische Factoren, sammt Beispielen 96

Ist $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so muss auch $p-q\sqrt{-1}$ eine Wurzel sein 97

Eigenschaften der Coefficienten einer höhern Gleichung 98

Durch die Zeichenänderung der in den geraden Stellen stehenden Coefficienten werden die Wurzeln einer Gleichung $X=0$ in jene der Gleichung $\overline{X}=0$ mit entgegengesetzten Zeichen umgewandelt —

Eine Gleichung kann nicht mehr reelle positive und negative Wurzeln besitzen, als beziehungsweise in X und $\overline{X}$ Zeichenwechsel vorkommen . 99

Transformation der Gleichungen.

Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln sämmtlich um a kleiner sind . 101

Kurzes Verfahren bei praktischen Rechnungen, sammt Beispielen . . 102

Aus einer Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen, sammt Beispielen 104

Aus einer Gleichung die Brüche wegzuschaffen, sammt Beispielen. . 105

Für eine gegebene Gleichung die Differenzengleichung zu finden, sammt Beispielen . 106

Die gleichen oder wiederholten Wurzeln zu finden, sammt Beispielen 108

Cubische Gleichungen . 109

Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst trigonometr. Functionen 111

Beispiele . 113

Gleichungen des vierten Grades —

Beispiele . 115

Die reciproken Gleichungen, sammt Beispielen —

Auflösung der numerischen Gleichungen.

Seite
Grenzen der reellen Wurzeln, sammt Beispielen 118
Das Aufsuchen der rationalen Wurzeln einer Gleichung, sammt Beispielen . 120
Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln einer Gleichung 123
Newton's Näherungsmethode, sammt Beispielen 124
Lagrange'sche Näherungsmethode, sammt Beispielen 127
Horner'sche Näherungsmethode, sammt Beispielen 128
Näherungsweise Berechnung der Wurzeln mittelst der Regula falsi, sammt Beispielen . 133
Methode, um die sämmtlichen reellen Wurzeln einer Gleichung zu entdecken:
a) von Lagrange, sammt Beispielen 135
b) von Sturm, sammt Beispielen 137
Die vorzüglichsten Kennzeichen der imaginären Wurzeln, sammt Beispielen . 143

II.
Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Erklärung . 145
Elimination einer der beiden Unbekannten, sammt Beispielen —

Fünftes Capitel.

Von den Reihen.

Erklärungen . 150

Arithmetische Reihen.

a) Differenzen-Reihen.

Erklärungen . 152
Eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes der Reihe a_1, a_2... zu bestimmen . 153
Das allgemeine Glied a_n zu finden —
Das summatorische Glied S_n zu finden 154
Beispiele . 155

b) Summen-Reihen.

Erklärungen . 156
Die Polygonal-Zahlen . 157
Die Pyramidal-Zahlen . —
Die figurirten Zahlen überhaupt 158

c) Potenz-Reihen.

Ableitung der Summenformel $\Sigma\ (n^m)$ 159
Beispiele . 160
Besondere Anwendung der Differenzen-Reihen —
Beispiele . 161

Interpolation der Reihen.

Seite
Erklärung . 162
Entwickelung der Interpolationsformel —
Beispiele . 163

Sechstes Capitel.

Von den vorzüglichsten Umwandlungen der Functionen einer Variablen.

Erklärung . 165
I. Zerlegung rationaler ganzer Functionen in Factoren —
II. dto. dto. gebrochener Functionen in Partialbrüche 166
Beispiele:
A) Wenn der Nenner des Bruches lauter einfache, reelle ungleiche Factoren besitzt 169
B) Wenn die einfachen Factoren zum Theil oder gänzlich imaginär sind . 170
C) Wenn der Nenner des Bruches auch gleiche Factoren besitzt . 171
III. Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen.
Recurrirende Reihen, sammt Beispielen 172
Bestimmung des allgemeinen Gliedes 175
Aus der recurrirenden Reihe die erzeugende Function zu finden, sammt Beispielen . 176

Siebentes Capitel.

Von der Umkehrung der Reihen.

Erklärung . 181
Verfahrungsart, sammt Beispielen —

Achtes Capitel.

Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

Erklärung . 183
Entwickelung eines Kennzeichens der Convergenz unendlicher Reihen 185
Anwendung dieses Kennzeichens auf einige Beispiele 187
Fallende Reihen mit einem regelmässigen Zeichenwechsel sind immer convergent . 188
Ein weiteres Kennzeichen der Convergenz für besondere Fälle . . . 189
Vergleichung einer Reihe mit einer als con- oder divergent erkannten Reihe . 190

Neuntes Capitel.

Entwickelung der Exponentialgrössen und logarithmischen Reihen. Bemerkung über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

Erklärung . 192
Entwickelung von a^x in eine unendliche Reihe —

Seite
Entwickelung von e^x in eine unendliche Reihe 194
Die logarithmischen Reihen —
Umwandlung der natürlichen in Brigg'sche oder Tafel-Logarithmen . 197
Entwickelung einer Reihe, in welcher die Zahl durch ihren Logarithmus ausgedrückt ist . 199
Ableitung einer Formel zur Berechnung von x aus der Gleichung $x^x = a$. —
Convergenz unendlicher Factorenfolgen, sammt Beispielen 200

Zehntes Capitel.

Trigonometrische Reihen. Berechnung von π. Moivre'sche Formel. Binomische Gleichungen.

Entwickelung der Exponentialausdrücke und Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ 204
Reihen für $\tang x$ und $\cot x$ 205
Reihen, in welchen der Bogen x durch $\sin x$ und $\tang x$ ausgedrückt erscheint . —
Reihen zur Berechnung der Ludolphischen Zahl π 206
Moivre'sche Binomialformel 207
Allgemeine Auflösung der binomischen Gleichungen 210
Beispiele . 211

Eilftes Capitel.

Entwickelung der Sinus und Cosinus der vielfachen, dann der Potenzen dieser Functionen der einfachen Bögen.

Entwickelung von $\cos n(x \pm 2r\pi) + i \sin n(x \pm 2r\pi)$ 212
Entwickelung von $\cos nx$ und $\sin nx$ 213
Potenzen der Sinus und Cosinus 216

Zwölftes Capitel.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erklärungen . 219
Die einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit 220
Beispiele und Aufgaben . 221
Die relative Wahrscheinlichkeit 223
Beispiele und Aufgaben . 224
Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit 225
Beispiele und Aufgaben . —
Die wiederholten Versuche 227
Beispiele und Aufgaben . 229
Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch fortgesetzte Versuche . . . 231
Regeln beim Wetten, sammt Beispielen —
Rechtmässige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spieles . . 233
Beispiele . —
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori, sammt Beispielen 234

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erstes Capitel.

Von der geometrischen Construction algebraischer Ausdrücke.

Seite

Anwendung der Algebra auf die Entwickelung geometrischer Sätze . 239
Construction der homogenen oder gleichartigen algebraischen Ausdrücke . 242
Beispiele . 245
Construction der ungleichartigen algebraischen Ausdrücke, sammt Beispielen . 247

Zweites Capitel.

Anwendung der Algebra auf die Auflösung einiger geometrischer Aufgaben.

Aufgaben sammt ihren Auflösungen. 249—256

Vierter Abschnitt.

Die analytische Geometrie in der Ebene oder auf zwei Coordinaten bezogen.

Erstes Capitel.

Bestimmung der Lage eines Punctes. Gleichungen des Punctes und der geraden Linie. Aufgaben über die letztere.

Festsetzung der Lage eines Punctes in einer gegebenen Ebene . . . 259
Gleichungen des Punctes . 260
Distanz zweier Puncte . 262
Gleichungen der geraden Linie 263
Aufgaben über die gerade Linie. 265—271

Zweites Capitel.

Gleichung des Kreises und Aufgaben über denselben.

Gleichung des Kreises . 272
Aufgaben über den Kreis. 275

Drittes Capitel.

Ueber die geometrischen Oerter.

Seite
Erklärungen . 277
Beispiele . 279
Ueber den Nutzen der geometrischen Oerter bei Auflösungen von Aufgaben . 282

Viertes Capitel.

Von einigen Verbindungen der geraden Linien unter einander und mit dem Kreise. Auflösung einiger bestimmten und unbestimmten Aufgaben.

Dreiecke . 285
Kreise . 288
Tangenten . 291
Bestimmte Aufgaben . 296
Unbestimmte Aufgaben 301—306

Fünftes Capitel.

Transformation der Coordinaten.

Einleitung . 307
Entwickelung der Formeln, um von einem schiefwinkeligen Coordinatensystem auf ein anderes schiefwinkeliges überzugehen . . . 308
Die aus diesen Formeln abgeleiteten besondern Fälle 309
Polar-Coordinaten . 310

Sechstes Capitel.

Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Die Ellipse . 313
Die Hyperbel . 318
Die Parabel . 325
Allgemeine Gleichung für diese drei Curven 329

Siebentes Capitel.

Ueber die Linien zweiter Ordnung oder die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

Eintheilung der krummen Linien in verschiedene Ordnungen 330
Allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung 331

Seite
Vereinfachung dieser Gleichung durch Transformation der Coordinaten 332
Der Mittelpunct der Linien der zweiten Ordnung 338

Achtes Capitel.

Ueber die Identität der Linien zweiter Ordnung mit den Kegelschnittslinien.

Entwickelung der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes. . . . 340
Cylinderschnitt . 344

Neuntes Capitel.

Ueber die besondern Eigenschaften der Kegelschnitte oder Linien der zweiten Ordnung.

I.
In Bezug auf ihre Hauptaxen.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 346
Die Supplementarsehnen . 347
b) Für die Parabel . 349

II.
Die Durchmesser oder Diameter.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 350
b) Für die Parabel . 352

Die conjugirten Diameter.

a) In der Ellipse und Hyperbel. 353
b) Für die Parabel . 355

Die Supplementar-Sehnen der Diameter.

Für die Ellipse und Hyperbel. 356

III.
Von den Tangenten, auf die Hauptaxen bezogen.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 357
b) Für die Parabel . 358

Die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 359
b) Für die Parabel . 361

IV.
Von den Tangenten, auf die Durchmesser und Radienvectoren bezogen.

Seite
a) Für die Ellipse und Hyperbel 362
b) Für die Parabel . 366

V.
Diese drei Curven auf ihre conjugirten Diameter bezogen.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 367
b) Für die Parabel . 370

VI.
Die Hyperbel, auf ihre Asymptoten bezogen.

Entwickelung der Gleichung der Hyperbel, auf die Asymptoten bezogen . 371

VII.
Die Polargleichungen dieser drei Curven.

a) Für die Ellipse und Hyperbel 374
b) Für die Parabel. 375

Fünfter Abschnitt.

Die analytische Geometrie im Raume oder auf drei Coordinaten bezogen.

Erstes Capitel.

Bestimmung der Lage eines Punctes im Raume. Gleichungen der Ebene, der geraden Linie und des Punctes.

Lage und Gleichungen des Punctes 379
Distanz zweier Puncte . 381
Gleichung der Ebene . 382
Gleichungen der geraden Linie 386
Gleichungen des Punctes . 388

Zweites Capitel.

Verbindung der geraden Linie mit der Ebene durch Auflösung mehrerer Aufgaben über die Gerade und Ebene.

Seite

Aufgaben über die gerade Linie im Raume 389
Neigungswinkel zweier Geraden 391
Aufgaben über die Ebene . 394
Neigungswinkel zweier Ebenen 396
Aufgaben über die gerade Linie in Verbindung mit der Ebene . 399

Drittes Capitel.

Von den krummen Flächen und den Curven von doppelter Krümmung.

Einleitung . 404
Die Kugelfläche oder Sphäre 406
Berührungsebene der Kugel 407
Die Cylinderflächen, sammt Beispielen —
Conische oder Kegelflächen, sammt Beispielen 409
Windschiefe und conoidische Flächen, sammt Beispielen . . . 411
Die Rotationsflächen . 412
Beispiele hierüber . 414
Flächen der zweiten Ordnung 415
Folgerungen für Curven von doppelter Krümmung 421
Die Schraubenlinie . —

Sechster Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Vom Differentiiren der Functionen Einer Variablen.

Einleitung . 425
Erklärungen . 426
Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ 430
Vorzüge der Infinitesimal- gegen die Grenzmethode 432
Differentiale der vorzüglichsten einfachen und zusammengesetzten Functionen einer Variablen 433
Uebungsbeispiele . 437
Das Differentiale dz, wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist 439
Die höhern Differentiale . 440
Beispiele hierüber . 441
Differentialformeln für y, wenn $y = f(x)$ und $x = F(w)$ ist 442

Zweites Capitel.

Das Taylor'sche und Maclaurin'sche Theorem.

Seite

Das Taylor'sche Theorem 445
Beispiele hierüber 450
Die Maclaurin'sche Reihe 452
Beispiele hierüber 452

Drittes Capitel.

Das Taylor'sche Theorem auf Functionen zweier Variablen ausgedehnt. Die Differentiation der Functionen mehrerer Variablen. Die partiellen Differentiale. Euler's Lehrsatz der homogenen Functionen.

Das erweiterte Taylor'sche Theorem 456
Total- und Partial-Differentiale 458
Euler's Lehrsatz über die homogenen Functionen 461

Viertes Capitel.

Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder Gleichungen mit zwei und mehreren veränderlichen Grössen.

Differentiationen der unentwickelten Functionen, sammt Beispielen 462

Fünftes Capitel.

Anwendung und Gebrauch der Differentialrechnung in der Analysis.

Bestimmung der unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Bruchfunctionen. . 466
Beispiele 468
Bestimmung der unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinenden Functionen. . . . 470
Bestimmung der unter der Form $0 . \infty$ erscheinenden Functionen . . 471
Bestimmung der Ausdrücke von der Form 0^0, ∞^0 und 1^∞ 472

Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe der Functionen.

A) Für Functionen einer Variablen 473
Beispiele 478
Aufgaben hierüber 481
B) Für Functionen zweier veränderlicher Grössen 483
Beispiel 485
Aufgaben 486

Sechstes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Curven.

Methode der Tangenten (Subtangente, Normale u. s. w.) 491
Differential des Bogens und der Fläche 493

Seite
Von den Asymptoten . 496
Kennzeichen, ob eine Curve gegen die Abscissenaxe concav oder convex sei . 499
Von den berührenden Curven . 500
Beispiele hierüber . 503
Krümmungskreis . 505
Von den Evoluten der krummen Linien, sammt Beispielen 507

Siebentes Capitel.

Uebertragung mehrerer im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf Polarcurven.

Erklärung . 511
Entwickelung der Ausdrücke für Subtangente, Subnormale &c. . . . —
Umwandlung der Polar- in rechtwinkelige Coordinaten 514

Achtes Capitel.

Entwickelung einiger transcendenten Curven.

Die gemeine Cycloide oder Radlinie 516
Die Epicycloide . 520
Die Kreisevolvente . 521
Die Hypocycloide . 522

Neuntes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen und Curven von doppelter Krümmung.

Berührungen der krummen Flächen 523
Berührungsebene . 524
Die Normale . 525
Die Curven von doppelter Krümmung 526
Berührungen . 527
Die Tangente . 528
Tangential- und Osculations- oder Berührungsebene 529
Die Normale, der Krümmungs- oder Osculationskreis 532

Siebenter Abschnitt.

Die Integralrechnung.

Seite
Erklärungen . 537

Erstes Capitel.

Integration des Differentialausdruckes $X\,dx$, A) wenn X eine rationale, und B) wenn X eine irrationale algebraische Function von x ist.

Einleitung . 540
A) Bestimmung des Integrales $\int X\,dx$, wenn X eine rationale Function von x ist:
a) Für ganze Functionen X 541
Beispiele hierüber . 542
b) Für gebrochene Functionen, sammt Beispielen 543
Trinomische Integralformeln 547
B) Bestimmung von $\int X\,dx$, wenn X eine irrationale Function von x ist . 548
Beispiele über das Rationalmachen der irrationalen Differentialformeln 551

Zweites Capitel.

Von der Integration der binomischen Differentialformel

$$x^n\,dx\,(a + bx^m)^p.$$

Untersuchung des Integrales $\int x^n\,dx(a+bx^m)^p$ 553
Reductionsformeln für dieses Integrale; theilweises Integriren. . . . 555
Beispiele . 556
Anwendung der Reductionsformeln auf das Integrale $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. . 559
Bestimmung des Integrals $\int x^q\,dx(ax^r + bx^s)^p$ 560
Reductionsformeln für einige Fälle des Integr. $\int x^n\,dx(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^p$ 561

Drittes Capitel.

Von der Integration einiger transcendenten Differentialformeln.

Bestimmung des Integrales $\int X\,lx^n\,dx$ 563
Bestimmung des Integrales $\int X a^x\,dx$ 564
Bestimmung des Integrales $\int X\,dx$, wenn X Kreisfunctionen von x enthält . —
Beispiele hierüber . 565
Besondere Reductionsformeln für $\int \sin x^n \cos x^m\,dx$ u. s. w. 566

Viertes Capitel.

Von der Integration mittelst unendlicher Reihen.

Seite
Beispiele über das Integrale $\int X\,dx$ 570
Die Bernoulli'sche Reihe . 574

Fünftes Capitel.

Von der Integration der höhern Differentialausdrücke Einer, und der Partialdifferentiale mehrerer Variablen.

Herleitung der ursprünglichen Function aus dem zweiten Differential-Quotienten . 575
Integration der partiellen Differentiale, sammt Beispielen. 576

Sechstes Capitel.

Von der Integration der vollständigen, ferner der homogenen Differentialformeln zweier oder mehrerer Variablen der ersten Ordnung.

Integration der vollständigen Differentialformeln, sammt Beispielen . 578
Integration der homogenen Differentialausdrücke der ersten Ordnung 580

Siebentes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen.

a) Von der Absonderung der veränderlichen Grössen. 582
Beispiele. 583
Besondere Bemerkung. 585
b) Aufsuchung des integrirenden Factors, sammt Beispielen 586

Achtes Capitel.

Bestimmte Integrale und Anwendung derselben auf die Rectification und Quadratur ebener Curven, Quadratur oder Complanation krummer Oberflächen und Cubatur der von ihnen begrenzten Körper.

Bestimmte Integrale oder das Integriren *innerhalb bestimmter Grenzen.*

Erklärungen . 591
Bestimmte Integrale . 592
Beispiele hierüber . 598
Bestimmung des bestimmten Integrales, wenn darin die Function $f(x)$ für die eine oder andere Grenze von x Unendlich oder Discontinuirlich wird . 601

Rectification der Curven.

Seite
Erklärung . 603
Beispiele . 604

Quadratur der Curven.

Erklärung . 608
Beispiele . 609
Bestimmung der asymptotischen Räume bei der Hyperbel 611
Berechnung einer von zwei Curventheilen eingeschlossenen Fläche . 612
Beispiel . —
Ableitung der Simpson'schen Näherungsformel 613
Beispiel . 615

Complanation oder Quadratur der durch Umdrehung erzeugten Oberflächen.

Ableitung des Differentiales der krummen Oberflächen 616
Beispiele hierüber . 617

Cubatur der durch Umdrehung erzeugten Körper.

Ableitung der betreffenden Formel 619
Beispiele hierüber . 620
Bestimmte Doppel-Integrale und deren geometrische Bedeutung. . . 621
Anwendung auf die Cubatur von Körpern 624

Anhang.

Die Elemente der Variationsrechnung.

Einleitung . 629
Erklärungen . 631
Entwickelung einiger vorbereitender Sätze 633
Grösste und kleinste Werthe der unbestimmten Integralformeln . . . 639
Relative Maxima und Minima 647
Beispiele und Aufgaben 649—660

Erster Abschnitt.

Die

Elemente der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von den goniometrischen Linien.

Einleitung.

§. 1. **D**ie Trigonometrie (Dreieckmesskunst) lehrt aus drei in Zahlen gegebenen Bestimmungstücken eines Dreieckes die übrigen durch Rechnung finden. Sie zerfällt, je nachdem die betreffenden Dreiecke in einer Ebene, auf einer Kugel oder auf einem elliptischen Sphäroide liegen, in die ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie. Die letztere bleibt von unserem Vortrage ausgeschlossen.

§. 2. Die zur Berechnung der Dreiecke oder Vielecke überhaupt nöthigen Hilfslinien und Sätze, mittelst denen es möglich wird, die Winkel sowohl unter einander als auch mit den Seiten zu vergleichen, bilden zusammen die Goniometrie. Nach dem gewöhnlichen, auch hier so genommenen, weitern Sinne umfasst die Trigonometrie zugleich auch die Lehre dieser Hilfslinien (Kreisfunctionen) oder die Goniometrie.

Die trigonometrischen oder goniometrischen Linien.

§. 3. Erklärung. Schneidet man auf dem, mit irgend einem Halbmesser $CA = r$ beschriebenen Kreis $AA'BB'A$ (Fig. 1) von A aus, als Anfangspunct, einen beliebigen Fig. 1.
Bogen AM ab, zieht die Halbmesser CA, CM, ferner aus A und M auf AC die Perpendikel AE, MD, ersteres bis zum Durchschnitte E des verlängerten Halbmessers CM;

so heissen die Linien MD der **Sinus**, AE die **Tangente**, CE die **Secante** und AD der **Sinusversus** des Bogens AM oder Winkels $ACM = \alpha$ für den Halbmesser r.

§. 4. Der **Sinus** eines Bogens ist also das aus dem Endpuncte dieses Bogens auf den durch seinen Anfangspunct gezogenen Halbmesser gefällte Perpendikel.

Die trigonometrische **Tangente** eines Bogens ist jenes Stück der im Anfangspuncte desselben errichteten Tangente, welches zwischen diesem Anfangs- und Durchschnittspuncte des durch den Endpunct des Bogens verlängerten Halbmessers liegt.

Die **Secante** eines Bogens ist der durch dessen Endpunct bis zum Durchschnitt mit der Tangente verlängerte Halbmesser.

Der **Sinusversus** (auch **Quersinus**) eines Bogens ist jenes Stück des durch den Anfangspunct gezogenen Halbmessers, zwischen diesem Anfangs- und Fusspunct des Sinus dieses Bogens.

§. 5 **Erkl.** Ergänzt der Bogen $A'M$ den vorigen AM zu einem Quadranten, oder ist W. $A'CM = \alpha'$ der Complementswinkel zu α (folglich nach unserer Sexagesimaltheilung $\alpha' = 90^0 - \alpha$); so werden Sinus, Tangente, Secante und Sinusversus dieses Bogens $A'M$ oder Winkels α', d. i. die Linien MD', $A'E'$, CE', $A'D'$ (A' als Anfangspunct des Bogens $A'M$ genommen) beziehungsweise: **Cosinus** *(Complementi Sinus, Co. Sinus)*, **Cotangente**, **Cosecante** und **Cosinusversus** des ursprünglichen Bogens AM oder W. α genannt.

Zusatz. Wegen $MD' = CD$ nimmt man gewöhnlich dieses zwischen dem Mittelpunct C und Fusspunct D des Sinus liegende Stück des durch den Anfangspunct A gezogenen Halbmessers für den **Cosinus** des Bogens.

Anmerkung. Mit Rücksicht darauf, dass ein stumpfer Winkel ein **negatives** Complement hat, gelten die in diesen beiden §§. aufgestellten Erklärungen ganz allgemein für jeden Bogen oder Winkel α.

Die Construction dieser genannten 8 trigonometrischen Hilfslinien für Bögen, deren Endpuncte M beziehungsweise im 1., 2., 3. und 4. Quadranten liegen, ist eine dem Anfänger sehr zu empfehlende Uebung.

§. 6. Die genannten goniometrischen Linien werden kurz auf folgende Weise bezeichnet: $MD = Sin\,\alpha$, $AE = Tang\,\alpha$, $CE = Sec\,\alpha$, $AD = Sinv\,\alpha$, $CD = Cos\,\alpha$, $A'E' = Cot\,\alpha$, $CE' = Cosec\,\alpha$, $A'D' = Cosinv\,\alpha$; dabei kann noch, wenn man es für nöthig hält, durch das Darüber- oder Daruntersetzen von r, der Halbmesser angedeutet werden, auf welchen sich diese Linien beziehen. Da wir zur grösseren Einfachheit diesen Halbmesser durchaus, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, zur Einheit nehmen oder gleich 1 setzen; so soll dieses durch die Anwendung kleiner Anfangsbuchstaben, d. i. dadurch angedeutet werden, dass wir schreiben: $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tang\,\alpha$, u. s. w.

Anmerk. Man kann diese Annahme, nach welcher der Halbmesser zur Einheit genommen wird und wodurch die Formeln in der Regel einfacher ausfallen, um so eher machen, als weiter unten (§. 33) ohnehin ein einfaches Verfahren angegeben wird, nach welchem alle auf den Halbmesser 1 sich beziehenden Formeln für den Halbmesser r umgewandelt werden können.

§. 7. Damit die Relationen zwischen den goniometrischen Linien, wie diese im 1. Quadranten oder für einen spitzen Winkel α aufgefunden werden, auch für jeden andern Werth von α gelten können, ist es nöthig, diese Linien, wie es überhaupt in der analytischen Geometrie geschieht, mit gewissen Vorzeichen behaftet anzunehmen. So ist, um ein einfaches Beispiel anzuführen, für $\alpha = ACM < 90^{\circ}$, wegen $AD = AC - CD$, sofort $sinv\,\alpha = 1 - cos\,\alpha$, und für $\alpha = ACM' > 90^{\circ}$ (wegen $Ad = AC + Cd$): $sinv\,\alpha = 1 + cos\,\alpha$. Soll nun für beide Fälle die erstere Relation oder der Satz gelten, dass der Sinusversus gleich ist dem Unterschiede aus dem Halbmesser und dem Cosinus, d. h. will man beide Fälle in einer und derselben Formel darstellen; so muss man schreiben: $sinv\,\alpha = 1 - (\pm\, cos\,\alpha)$, dergestalt, dass der Cosinus im 1. Quadr. mit dem Zeichen $+$ und im 2. mit jenem $-$ behaftet erscheint und damit zusammenhängt,

dass eine beständig abnehmende, hierauf Null werdende und endlich wieder zunehmende Grösse oder Linie, wie es hier mit CD der Fall ist (während α fortwährend wächst), nothwendig aus dem positiven in den negativen Zustand, oder umgekehrt, übergeht. Diese Gegensätze sind übrigens immer leicht aus der entgegengesetzten Lage der Linien selbst (wie hier aus jener CD und Cd) zu erkennen, und man verbindet mit der einen das Zeichen + oder — und mit der andern das entgegengesetzte — oder +.

§. 8. Betrachtet man daher die in den 4 Quadranten Statt findenden Lagen der goniom. Linien, jene im 1. Quadr. als die primitive oder positive (in welchem nämlich diese Linien sämmtlich das Vorzeichen + erhalten) angesehen, so ergibt sich ganz einfach folgendes Schema, wobei n die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . bezeichnet:

die Sinus und Cosecanten *) sind positiv
im 1., 2., 5., 6., ... $(4n+1)$., $(4n+2)^{\text{ten}}$ Quadranten
und negativ
im 3., 4., 7., 8., ... $(4n+3)$., $(4n+4)^{\text{ten}}$ Quadranten
die Cosinus und Secanten sind positiv
im 1., 4., 5., 8., ... $(4n+1)$., $(4n+4)^{\text{ten}}$ Quadranten
und negativ
im 2., 3., 6., 7., ... $(4n+2)$., $(4n+3)^{\text{ten}}$ Quadranten
die Tangenten und Cotangenten sind positiv
im 1., 3., 5., 7., ... $(4n+1)$., $(4n+3)^{\text{ten}}$ Quadranten
und negativ
im 2., 4., 6., 8., ... $(4n+2)$., $(4n+4)^{\text{ten}}$ Quadranten
die Sinusversus und Cosinusversus bleiben in allen Quadranten positiv.

§. 9. Nimmt der Winkel α bis Null ab, so verschwindet der Sinus MD und man hat $\sin 0 = 0$. Nimmt von da

*) Zur Beurtheilung der entgegengesetzten Lagen der Secante und Cosecante muss man berücksichtigen, ob der Durchschnitt des durch den Endpunct des Bogens verlängerten Halbmessers mit der Tangente oder Cotangente dadurch entsteht, dass man diese Verlängerung vom Mittelpunct aus durch den Endpunct, oder umgekehrt, vom Endpunct des Bogens durch den Mittelpunct vornimmt.

an der Winkel zu, so wächst auch der Sinus, und wird bei 90° dem Halbmesser gleich, so, dass man hat: $sin\, 90 = sin\, \frac{\pi}{2} = 1$. Nimmt der Bogen AM noch weiter zu, so, dass also der Endpunct M in den 2. Quadranten fällt, so nimmt der Sinus wieder ab und verschwindet für $\alpha = 180^0$, oder es ist: $sin\, 180 = sin\, \pi = 0$. Im 3. Quadr. nimmt der Sinus wieder zu, wird aber nun negativ, und man hat sofort $sin\, 270 = sin\, \frac{3}{2}\pi = -1$. Im 4. Quadr. endlich, in welchem er immer noch negativ bleibt, nimmt der Sinus wieder ab und verschwindet für $\alpha = 360^0$, oder es ist $sin\, 360 = sin\, 2\pi = 0$.

§. 10. Da überhaupt im 5., 9., 13., . . . Quadranten dasselbe Statt findet, was im 1. Quadr. im 6., 10., 14. etc. Quadr. was im 2., im 7., 11., 15. . . ., was im 3. und endlich im 8., 12., 16., . . . Quadranten, was im 4.; so hat man allgemein, wenn n wieder alle ganzen positiven Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . bezeichnet, und wenn man diese Untersuchung auch auf die übrigen goniometrischen Linien ausdehnt, folgendes Schema:

	sin.	cos.	tang.	cot.	sec.	cosec.	sinv.	cosinv.
$2n\pi$ *)	± 0	1	± 0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	0	1
$(2n+\frac{1}{2})\pi$	1	0	∞	0	∞	1	1	0
$(2n+1)\pi$	0	-1	-0	$-\infty$	-1	∞	2	1
$(2n+\frac{3}{2})\pi$	-1	-0	∞	0	$-\infty$	-1	1	2

Anmerk. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass im 1. Quadranten (auf welchen immer Alles bezogen wird) der Sinus, die Tangente, Secante und der Sinusversus (welche aus einem später einzusehenden Grunde auch Kreisfunctionen heissen) zu-, dagegen der Cosinus, die Cotangente u. s. w. (die Cofunctionen) abnehmen, wenn der Winkel oder Bogen α zunimmt, und umgekehrt.

*) Von den doppelten Zeichen gilt durchaus das obere für $n = 0$ und das untere für $n = 1, 2, 3$ etc.

§. 11. Verbindet man mit den in der Richtung von A gegen A' gezählten Bögen oder Winkeln α das Vorzeichen $+$, so muss man aus dem in §. 7 angeführten Grunde den in der entgegengesetzten Richtung von A gegen B' gezählten Bögen oder Winkeln das Zeichen — vorsetzen. Nimmt man daher der Grösse nach $Am = AM = \alpha$, so ist

$$mD = sin(-\alpha),\quad CD = cos(-\alpha),\quad Ae = tang(-\alpha),$$
$$A'e' = cot(-\alpha),\quad Ce = sec(-\alpha),\quad Ce' = cosec(-\alpha)$$

(die Sinusversus und Cosinusversus werden ihrer geringen Wichtigkeit wegen von nun an ausgelassen), und man hat ganz einfach mit Rücksicht auf §. 8:

$$sin(-\alpha) = -sin\,\alpha,\qquad cos(-\alpha) = cos\,\alpha,$$
$$tang(-\alpha) = -tang\,\alpha,\qquad cot(-\alpha) = -cot\,\alpha,$$
$$sec(-\alpha) = sec\,\alpha,\qquad cosec(-\alpha) = -cosec\,\alpha,$$

Relationen, welche, wie leicht zu sehen, für jeden Werth von α gelten.

Fig. 2. §. 12. Sind die beiden Durchmesser AB, $A'B'$ (Fig. 2) wieder auf einander perpendikulär und die Bögen

$$AM = A'M' = BM'' = B'M''' = \alpha,$$

so hat man, wie sich von selbst ergibt:

$$sin(90 + \alpha) = M'D' = cos\,\alpha,$$
$$sin(180 + \alpha) = M''D'' = -sin\,\alpha$$

(mit Rücksicht nämlich auf §. 8),

$$sin(270 + \alpha) = M'''D''' = -cos\,\alpha,$$
$$sin(360 + \alpha) = MD = sin\,\alpha.$$

Aus einer ganz ähnlichen Figur, in welcher die gleichen Bögen α von A, A', B, B' in entgegengesetzter Richtung aufgetragen werden, oder noch einfacher, indem man in den vorigen Relationen $-\alpha$ statt α schreibt und die Formeln des vorigen Paragraphes berücksichtiget, erhält man auch:

$$sin(90 - \alpha) = cos\,\alpha,\qquad sin(180 - \alpha) = sin\,\alpha,$$
$$sin(270 - \alpha) = -cos\,\alpha,\quad sin(360 - \alpha) = -sin\,\alpha.$$

§. 13. Verfährt man mit den übrigen goniometrischen Linien auf die nämliche Art, so erhält man ohne Schwierigkeit, wenn man Kürze halber

$\frac{1}{2}\pi \pm \alpha = A$, $\pi \pm \alpha = B$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha = C$ und $2\pi \pm \alpha = D$
setzt, sofort:

$\sin A = \cos\alpha$, $\sin B = \mp \sin\alpha$, $\sin C = -\cos\alpha$, $\sin D = \pm \sin\alpha$

$\cos A = \mp \sin\alpha$, $\cos B = -\cos\alpha$, $\cos C = \pm \sin\alpha$, $\cos D = \cos\alpha$

$tang\, A = \mp \cot\alpha$, $tang\, B = \pm tang\,\alpha$, $tang\, C = \mp \cot\alpha$, $tang\, D = \pm tang\,\alpha$

$\cot A = \mp tang\,\alpha$, $\cot B = \pm \cot\alpha$, $\cot C = \mp tang\,\alpha$, $\cot D = \pm \cot\alpha$

$\sec A = \mp cosec\,\alpha$, $\sec B = -\sec\alpha$, $\sec C = \pm cosec\,\alpha$, $\sec D = \sec\alpha$

$cosec\, A = \sec\alpha$, $cosec\, B = \mp cosec\,\alpha$, $cosec\, C = -\sec\alpha$, $cosec\, D = \pm cosec\,\alpha$ *).

Anmerk. Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich alle trigonometrischen Ausdrücke, in welchen *sin.*, *cos.* etc. von Winkeln $> 90^\circ$ vorkommen, in gleichgeltende umwandeln, in denen sich diese goniometrischen Linien auf Winkel $< 90^\circ$ beziehen, was um so nothwendiger ist, als diese trigonometrischen Functionen (d. i. der Sinus, Cosinus etc.) nur für Winkel oder Bögen, die den 1. Quadranten nicht übersteigen, in den Logarithmentafeln eingetragen sind. — Wäre z. B. $x = a + tang\,326$, so würde man auch, mit Rücksicht auf die eben erwähnte Eigenschaft der Tafeln, wegen $tang\,326 = tang(270 + 56) = -\cot 56$ haben: $x = a - \cot 56$, oder auch, wegen $tang\,326 = tang(360 - 34) = -tang\,34$:

$$x = a - tang\,34$$

(was auch damit zusammenhängt, dass wegen $34 + 56 = 90$, sofort nach §. 5 $tang\,34 = \cot 56$ ist).

Hauptrelationen zwischen Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w.

§. 14. Es ist wegen $MD = \frac{1}{2} Mm$ (Fig. 1), sofort Fig. 1.
$\sin\alpha = \frac{1}{2} chord\,2\alpha$ oder auch $chord\,2\alpha = 2\sin\alpha$, d. h. der Sinus eines Winkels ist gleich der halben Sehne des doppelten Winkels, und umgekehrt ist die Sehne eines Winkels gleich dem doppelten Sinus des halben Winkels.

*) Das aus diesem folgende noch allgemeinere Schema findet man in dem Handbuche der Trigonometrie, S. 22, oder in der Sammlung der trigonom. Formeln auf Seite 2 und 3.

§. **15.** Die rechtwinkeligen Dreiecke MDC, CAE und $CA'E'$ geben der Reihe nach:

$$MD^2 + CD^2 = CM^2 \quad \text{oder} \quad \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1,$$
$$CE^2 = AC^2 + AE^2 \quad \text{oder} \quad \sec\alpha^2 = 1 + \tang\alpha^2$$

und

$$CE'^2 = CA'^2 + A'E'^2 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cosec}\alpha^2 = 1 + \cot\alpha^2.$$

Anmerk. Man sieht von selbst, dass, wenn man den Halbmesser CM anstatt mit 1 zu bezeichnen gleich r setzt, dadurch $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = r^2$. $\sec\alpha^2 = r^2 + \tang\alpha^2$ und $\operatorname{cosec}\alpha^2 = r^2 + \cot\alpha^2$ wird.

§. **16.** Die Dreiecke CAE und $CA'E'$, welche jenem CMD ähnlich sind, geben ganz einfach:

$$CA : AE : CE = CD : MD : CM \quad \text{oder}$$
$$1 : \tang\alpha : \sec\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha : 1 \quad \text{und}$$
$$CA' : A'E' : CE' = MD : CD : CM \quad \text{oder}$$
$$1 : \cot\alpha : \operatorname{cosec}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha : 1;$$

daraus erhält man:

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Zugleich folgt auch:

$$\tang\alpha = 1 : \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} \quad \text{und} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tang\alpha}.$$

Endlich hat man noch wegen $AD = AC - CD$ und $A'D' = A'C - MD$ sofort $\operatorname{sinv}\alpha = 1 - \cos\alpha$ und $\operatorname{cosinv}\alpha = 1 - \sin\alpha$.

Anmerk. Hat man nur erst die Eigenschaften des Sinus und Cosinus in den verschiedenen Quadranten aus der Figur aufgefunden, so lassen sich die der übrigen goniometrischen Linien ganz einfach aus diesen hier erhaltenen Formeln analytisch entwickeln und sofort die oben (§§. 8—13) ebenfalls aus der Figur gefolgerten Resultate verificiren.

§. **17.** Es ist nun leicht jede der 8 goniometrischen Linien durch die 7 übrigen auszudrücken, und dadurch zu 56, in den trigonometrischen Entwickelungen mehr oder weniger wichtigen Relationen zu gelangen; wir entwickeln hier

nur noch einige der wichtigsten und geben dadurch zugleich den Weg zur Ableitung der übrigen an *).

§. 18. Aus §. 15 hat man, um den Sinus durch den Cosinus, und umgekehrt, auszudrücken, unmittelbar:

$$sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos\,\alpha^2} \quad \text{und} \quad cos\,\alpha = \sqrt{1 - sin\,\alpha^2}.$$

Um den Sinus durch die Tangente oder Cotangente auszudrücken, hat man (§. 16)

$$tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin\,\alpha^2}}, \text{ und daraus}$$

$$sin\,\alpha = \frac{tang\,\alpha}{\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}}.$$

Ferner ist, wegen (§. 16) $tang\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha}$ auch, wenn man diesen Werth in der eben gefundenen Formel substituirt:

$$sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cot\,\alpha^2}}.$$

Auf gleiche Weise ist

$$sinv\,\alpha = 1 - cos\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - sin\,\alpha^2},$$

und daraus:

$$sin\,\alpha = \sqrt{2\,sinv\,\alpha - sinv\,\alpha^2}.$$

Um den Cosinus durch die Cotangente oder Tangente auszudrücken, wird man (ohne die vorige Entwickelungsart zu wiederholen) am einfachsten in den beiden so eben gefundenen Formeln statt α, $90^0 - \alpha$ setzen; dadurch gehen (§. 5) $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tang\,\alpha$, $cot\,\alpha$, beziehungsweise in $cos\,\alpha$, $sin\,\alpha$, $cot\,\alpha$, $tang\,\alpha$ über, und man erhält:

$$cos\,\alpha = \frac{cot\,\alpha}{\sqrt{1 + cot\,\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}} \text{ u. s. w.}$$

Um nur noch einige der wichtigeren dieser Formeln anzugeben, so findet man auf diesem angezeigten Wege:

$$tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin\,\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 - cos\,\alpha^2}}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cot\,\alpha} = \sqrt{sec\,\alpha^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{cosec\,\alpha^2 - 1}}$$

*) Die Ableitung dieser 56 Formeln, welche sich sowohl im Handb. der Trigon. (S. 24 u. f.) als auch in der Form. Samml. S. 3 finden, ist dem Anfänger als eine sehr nützliche Uebung besonders zu empfehlen.

$$cot\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - sin\,\alpha^2}}{sin\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{\sqrt{1 - cos\,\alpha^2}} = \frac{1}{tang\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - sin\,\alpha^2}} = \frac{1}{cos\,\alpha} = \sqrt{1 + tang\,\alpha^2} = \frac{\sqrt{1 + cot\,\alpha^2}}{cot\,\alpha}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - cos\,\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}}{tang\,\alpha} = \sqrt{1 + cot\,\alpha^2} = \frac{sec\,\alpha}{\sqrt{sec\,\alpha^2 - 1}}$$

u. s. w.

Fig. 1. §. **19**. Ist (Fig. 1) Bogen $AM = \alpha$ und $MD = sin\,\alpha = x$, so sagt man, α sei ein Bogen, dessen Sinus x ist, und bezeichnet dieses durch $\alpha = arc\,sin\,x$ [nach den französ. Mathematikern durch $\alpha = arc\,(sin = x)$]. Eben so folgt aus $cos\,\alpha = x$, umgekehrt: $\alpha = arc\,cos\,x$ u. s. w.

Da nun, wenn $sin\,\alpha = x$ ist, alle übrigen goniometrischen Linien (§. 17) durch den Sinus ausgedrückt werden können, und z. B.

$$cos\,\alpha = \sqrt{1 - sin\,\alpha^2} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin\,\alpha^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

u. s. w. ist, so hat man:

$$\alpha = arc\,sin\,x = arc\,cos\,\sqrt{1 - x^2} = arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= arc\,cot\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = arc\,sec\,\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = arc\,cosec\,\frac{1}{x}$$

u. s. w.

Aehnliche Relationen erhält man auch noch, wenn man nach und nach $cos\,\alpha = x$, $tang\,\alpha = x$ u. s. w. setzt, und im ersten Falle alle übrigen Linien durch den Cosinus, im 2. durch die Tangente u. s. w. ausdrückt (Handb. d. Trigon., S. 28, und Formelsamml. S. 21).

Man erhält nämlich, um von den 56 entstehenden Formeln wieder nur einige der wichtigsten der Reihe nach anzuführen:

$$arc\,sin\,x = arc\,cos\,\sqrt{1 - x^2} = arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = arc\,cot\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \,..$$

$$arc\cos x = arc\sin \sqrt{1-x^2} = arc\,tang\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = arc\cot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,..$$

$$arc\,tang\,x = arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arc\cot\frac{1}{x} \,..$$

$$arc\cot x = arc\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arc\cos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arc\,tang\,\frac{1}{x} \,..$$

u. s. w.

Anmerk. Setzt man, wie oben,

$\sin\alpha = x$, so ist auch (§. 5) $\cos(90-\alpha) = x$;

folglich wegen $\alpha = arc\sin x$ und $90-\alpha = arc\cos x$, sofort:

$$arc\sin x + arc\cos x = 90^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch:

$$arc\,tang\,x + arc\cot x = \frac{\pi}{2},\quad arc\sec x + arc\,cosec\,x = \frac{\pi}{2} \text{ u. s. f.}$$

Entwickelung von $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ u, s. w.

§. 20. Es seien aus dem Endpuncte A des Durchmessers AE (Fig. 3) die beiden Sehnen AB, AD zu beiden Fig. 3. Seiten desselben unter den Winkeln α, β und dann noch die Hilfslinien BE, BD, DE gezogen; dadurch entsteht ein im Kreise beschriebenes Viereck $ABED$, in welchem bekanntlich die Relation besteht:

$$AE.BD = BE.AD + ED.AB.$$

Drückt man die Sehnen nach §. 14 aus, so erhält man (wegen $BE = chord\,2\alpha$ etc.):

$$BE = 2\sin\alpha,\quad DE = 2\sin\beta,$$

$$BD = 2\sin(\alpha+\beta),\quad AB = 2\sin\alpha' = 2\cos\alpha$$

(wegen $\alpha' = 90^0-\alpha$), $AD = 2\sin\beta' = 2\cos\beta$ und $AE = 2$ (auch $= 2\sin 90^0$), folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation substituirt und gleich durch $2.2 = 4$ abkürzt:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Schreibt man in dieser Formel $-\beta$ statt β und berücksichtiget dabei die Relationen des §. 11, so erhält man:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

so, dass man, diese beiden Fälle zusammengezogen, die Formel hat:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha.$$

§. 21. Es ist ferner, wenn man diese letztere Formel gleich anwendet (§. 5):

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha \pm \beta)] = \sin[(90 - \alpha) \mp \beta] =$$
$$\sin(90 - \alpha)\cos\beta \mp \cos(90 - \alpha)\sin\beta$$

oder endlich (§. 5 oder §. 12):

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta.$$

Anmerk. 1. Um zu zeigen, dass diese beiden Grundformeln (§§. 20, 21) der Goniometrie nicht bloss für spitze Winkel α, β, sondern ganz allgemein gelten, kann man auf folgende Art verfahren. Sei zuerst ohne Rücksicht auf die Grösse von α, sofort $\beta > 90$ und < 180, also $\beta = 90 + b$, wo $b < 90$; so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(90 + \alpha + b) = \cos(\alpha + b) = \cos\alpha \cos b - \sin\alpha \sin b$, oder auch, wegen $\sin b = \sin(\beta - 90) = -\sin(90 - \beta) = -\cos\beta$ und $\cos b = \cos(\beta - 90) = \cos(90 - \beta) = \sin\beta$, wieder:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cos\alpha + \sin\alpha \cos\beta;$$

und da diese Formel bereits für $\beta > 90$ und < 180 gilt, so gilt auch die daraus abgeleitete für $\cos(\alpha + \beta)$ bei denselben Werthen von β. Setzt man daher neuerdings $\beta = 90 + b$, wo $b > 90$ und < 180 sein soll; so wird

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + b) = \cos\alpha \cos b - \sin\alpha \sin b = \cos\alpha \sin\beta$$
$$+ \sin\alpha \cos\beta,$$

und es gilt sonach diese Formel (also auch die daraus abgeleitete für $\cos(\alpha + \beta)$ bereits für Werthe von $\beta > 180$ und < 270. Da sich diese Schlüsse so weit man will fortsetzen oder wiederholen lassen, so ist die allgemeine Giltigkeit der Formel von $\sin(\alpha + \beta)$, mithin auch die der übrigen daraus abgeleiteten, für jeden Werth von β erwiesen; da man endlich bei diesen Schlüssen α mit β verwechseln kann, so darf auch α jeden beliebigen Werth besitzen.

Anmerk. 2. Um diese Grundformeln für Winkeln innerhalb des 1. Quadranten auf rein synthetischem Wege abzuleiten, kann man auch folgendermassen verfahren:

Es sei in Fig. 3' Winkel $ACB = \alpha$, W. BCD = W. $BCE = \beta$ und wieder $AC = 1$. Zieht man die Sehne DE und aus den Puncten B, D, E, O auf den Halbmesser AC die Perpendikel BF, DH, EG, OJ, so wie aus E und O mit AC die Parallelen Eb und Oa; so ist wegen $\triangle COJ \sim \triangle CBF$ sofort $OJ : CO = BF : CB$ und $CJ : CO = CF : CB$ oder $OJ : \cos\beta = \sin\alpha : 1$ und $CJ : \cos\beta = \cos\alpha : 1$.

Eben so folgt wegen Aehnlichkeit der Dreiecke DOa und BFC sofort:

$$DO:Da = CB:CF \text{ und } DO:Oa = CB:BF \text{ oder}$$
$$\sin\beta:Da = 1:\cos\alpha \text{ und } \sin\beta:Oa = 1:\sin\alpha.$$

Aus diesen 4 Proportionen folgt mit Rücksicht auf die Congruenz der Dreiecke DOa und OEb:

$$OJ = \sin\alpha\cos\beta,\quad CJ = \cos\alpha\cos\beta,\quad Da = Ob = \sin\beta\cos\alpha,$$
$$Oa = Eb = \sin\alpha\sin\beta.$$

Endlich ist, wenn man diese Werthe gleich substituirt:

$$\sin(\alpha+\beta) = DH = OJ + Da = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = EG = OJ - Ob = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = CH = CJ - Oa = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = CG = CJ + Eb = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

§. **22.** Es ist ferner, diese eben entwickelten Formeln angewendet (§. 16):

$$tang(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt, gehörig abkürzt und überall statt $\frac{\sin}{\cos}$, $tang$ setzt:

$$tang(\alpha\pm\beta) = \frac{tang\,\alpha \pm tang\,\beta}{1 \mp tang\,\alpha\, tang\,\beta}.$$

§. **23.** Setzt man in den Formeln der §§. 20—22 $\beta=\alpha$, so erhält man der Reihe nach: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1$ (je nachdem man nämlich nach §. 18 den Cosinus durch den Sinus oder Sinus durch Cosinus ausdrückt) und

$$tang\,2\alpha = \frac{2\,tang\,\alpha}{1 - tang\,\alpha^2},$$

oder α statt 2α gesetzt:

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \cos\alpha = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1,$$
$$tang\,\alpha = \frac{2\,tang\,\tfrac{1}{2}\alpha}{1 - tang\,\tfrac{1}{2}\alpha^2}.$$

Anmerk. Für $\beta = 2\alpha$ erhält man eben so:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3,$$
$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$$

u. s. w. (Trigon., S. 40, und Formelsamml. S. 14.)

§. **24.** Aus den beiden vorigen Ausdrücken für $\cos\alpha$ folgt: $\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$ und $\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$; es ist also:

$$tang\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(je nachdem man nämlich in der Wurzelgrösse den Zähler oder Nenner rational macht).

§. **25.** Die vorigen Wurzelausdrücke $\sqrt{1 \mp \cos\alpha} = \sqrt{1 \mp \sqrt{1-\sin\alpha^2}}$ nach der bekannten Reductionsformel für $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$ behandelt, erhält man noch:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha} \quad \text{und}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

§. **26.** Setzt man $\alpha+\beta=s$ und $\alpha-\beta=d$, so wird $\alpha=\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}d$ und $\beta=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d$, also auch (§§. 20, 21):

$$\sin\alpha = \sin\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}s,$$
$$\sin\beta = \sin\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}d\cos\tfrac{1}{2}s,$$
$$\cos\alpha = \cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}d,$$
$$\cos\beta = \cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}d,$$

und daraus erhält man durch Addition und Subtraction, wenn man für s und d gleich wieder die Werthe herstellt:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

Formeln, mittelst welchen Summe und Unterschied der Sinus und Cosinus in Producte verwandelt werden und daher für die Anwendung der Logarithmen äusserst wichtig sind.

§. **27.** Wird jede der 4 vorigen Formeln durch die 3 übrigen dividirt, so erhält man 12 neue brauchbare Formeln, von denen wir, des künftigen Gebrauches wegen, nur eine einzige wirklich hersetzen wollen. Dividirt man nämlich die 1. durch die 2., so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)} = tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

oder endlich wegen (§. 16) $tang\,x = 1 : \cot x$ auch:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

§. 28. Durch Verbindung der Formeln von $sin(\alpha \pm \beta)$ und $cos(\alpha \pm \beta)$ in §§. 20 und 21, erhält man:

(1) $sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)=2\,sin\,\alpha\,cos\,\beta$

(2) $sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)=2\,sin\,\beta\,cos\,\alpha$

(3) $cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)=2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta$

(4) $cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)=2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta$

(5) $sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta)=sin\,\alpha^2-sin\,\beta^2$

(6) $cos(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha^2-sin\,\beta^2=cos\,\beta^2-sin\,\alpha^2$.

Ferner erhält man aus diesen Formeln durch Division:

$(\frac{1}{3})\ \ldots\ (7)\ tang\,\alpha=\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}$

$(\frac{4}{2})\ \ldots\ (8)\ tang\,\alpha=\frac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)}$

$(\frac{2}{3})\ \ldots\ (9)\ tang\,\beta=\frac{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}$

$(\frac{4}{1})\ \ldots\ (10)\ tang\,\beta=\frac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}$.

§. 29. Wegen

(1) $tang\,\alpha \pm tang\,\beta=\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\pm\frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}=\frac{sin(\alpha\pm\beta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}$,

hat man auch:

(2) $\frac{tang\,\alpha \pm tang\,\beta}{tang\,\alpha \mp tang\,\beta}=\frac{cot\,\beta \pm cot\,\alpha}{cot\,\beta \mp cot\,\alpha}=\frac{sin(\alpha\pm\beta)}{sin(\alpha\mp\beta)}$

und (3) $cot\,\alpha \pm cot\,\beta=\pm\frac{sin(\alpha\pm\beta)}{sin\,\alpha\,sin\,\beta}$.

Ferner ist, mit Rücksicht auf diese letztern Formeln (1) und (3):

(4) $tang\,\alpha^2-tang\,\beta^2=\frac{sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha^2\,cos\,\beta^2}$

und (5) $cot\,\alpha^2-cot\,\beta^2=\frac{-sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha^2\,sin\,\beta^2}$.

Sinus, Cosinus und Tangenten der vielfachen Bögen.

§. 30. Setzt man in der Formel (1) des §. 28 $n\alpha$ statt α und α statt β, so erhält man

$sin(n+1)\alpha+sin(n-1)\alpha=2\,sin\,n\alpha\,cos\,\alpha$, oder

(1) $sin(n+1)\alpha=2\,sin\,n\alpha\,cos\,\alpha-sin(n-1)\alpha$,

$\sin(n+1)\alpha = 2 \sin n\alpha \cos\alpha - \sin(n-1)\alpha$

und aus dieser Formel, indem man nach und nach $n=1$, 2, 3, 4 . . . setzt, der Reihe nach:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos\alpha - \sin\alpha = (2 \sin\alpha \cos\alpha) \cos\alpha - \sin\alpha$$
$$= 4 \sin\alpha \,(1 - \sin\alpha^2) - \sin\alpha$$
$$= 3 \sin\alpha - 4 \sin\alpha^3$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha = 2\,(3 \sin\alpha - 4 \sin\alpha^3) \cos\alpha - 2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$= (4 \sin\alpha - 8 \sin\alpha^3) \cos\alpha$$

$$\sin 5\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos\alpha - \sin 3\alpha$$
$$= 5 \sin\alpha - 20 \sin\alpha^3 + 16 \sin\alpha^5$$

u. s. w.

Geht man auf diese Weise weit genug fort, so kann man durch Induction allgemein schliessen, dass

für n ungerad $$\sin n\alpha = n \sin\alpha - \frac{n(n^2-1^2)}{2\,.\,3} \sin\alpha^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \sin\alpha^5 - \text{etc.}$$

und für n gerad $$\sin n\alpha = \left[n \sin\alpha - \frac{n(n^2-2^2)}{2\,.\,3} \sin\alpha^3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \sin\alpha^5 - \text{etc.}\right] \cos\alpha$$

Statt findet *).

§. **31.** Setzt man eben so in der obigen Formel (3), (§. 28) $n\alpha$ statt α und α statt β, so erhält man

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos\alpha \cos n\alpha \quad \text{oder}$$
$$\cos(n+1)\alpha = 2 \cos\alpha \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha,$$

und daraus für $n=1$, 2, 3 . . . der Reihe nach:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos\alpha^2 - 1$$

$$\cos 3\alpha = 2 \cos\alpha \cos 2\alpha - \cos\alpha = 2 \cos\alpha\,(2 \cos\alpha^2 - 1) - \cos\alpha$$
$$= 4 \cos\alpha^3 - 3 \cos\alpha$$

*) Wie sich für die Richtigkeit dieser Formeln der schärfere Beweis durch die sogenannte höhere Induction herstellen lässt, kann man im Handbuche der Trigonometrie (Wien, bei Fried. Beck) auf Seite 40 nachsehen.

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha \\ &= 2\cos\alpha(4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha) - (2\cos\alpha^2 - 1) \\ &= 8\cos\alpha^4 - 8\cos\alpha^2 + 1 \\ \cos 5\alpha &= 2\cos\alpha\cos 4\alpha - \cos 3\alpha \\ &= 16\cos\alpha^5 - 20\cos\alpha^3 + 5\cos\alpha\end{aligned}$$

u. s. w.

Nach den sich ergebenden Gesetzen erhält man wieder allgemein, es mag dabei n gerad oder ungerad sein:

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\alpha)^{n-6} + \text{etc.}$$

§. **32**. Setzt man endlich in der Formel (§. 22)

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{\tang\alpha + \tang\beta}{1 - \tang\alpha\tang\beta}$$

nach und nach $\beta=\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha\ \ldots$, so erhält man beziehungsweise:

$$\begin{aligned}\tang 2\alpha &= \frac{2\tang\alpha}{1-\tang\alpha^2} \\ \tang 3\alpha &= \frac{3\tang\alpha - \tang\alpha^3}{1 - 3\tang\alpha^2} \\ \tang 4\alpha &= \frac{4\tang\alpha - 4\tang\alpha^3}{1 - 6\tang\alpha^2 + \tang\alpha^4}\end{aligned}$$

u. s. w.

und allgemein:

$$\tang n\alpha = \frac{n\tang\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\tang\alpha^3 + \frac{n(n-1)..(n-4)}{1.2\,..\,5}\tang\alpha^5 - ..}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2}\tang\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\tang\alpha^4 - ..}$$

Umwandlung der Formeln für den Halbmesser r.

§. **33**. Es seien aus dem Scheitelpuncte C (Fig. 4) des Winkels $ACB=\alpha$ mit den Halbmessern $Ca=1$ und $CA=r$ die Kreisbögen ab, AB und für diese die Sinus, Tangenten u. s. w. gezogen; so geben die dadurch entstehenden rechtwinkeligen ähnlichen Dreiecke ganz einfach die Proportionen $bd:BD = Cb:CB$, $Cd:CD = Cb:CB$, Fig. 4.

$ae : AE = Ca : CA$ u. s. w, oder, wenn man zum Unterschiede die Sinus, Cosinus etc. für den Kreisbogen vom Halbmesser r durch einen grossen Anfangsbuchstaben auszeichnet:

$\sin\alpha : Sin\,\alpha = 1 : r$, $\cos\alpha : Cos\,\alpha = 1 : r$, $tang\,\alpha : Tang\,\alpha = 1 : r$

u. s. w. nämlich, wenn $f(\alpha)$ irgend eine der goniometr. Linien für den Halbmesser 1 und $F(\alpha)$ die gleichnamige für den Halbmesser r bezeichnet, allgemein $f(\alpha) : F(\alpha) = 1 : r$, woraus

$$F(\alpha) = r f(\alpha) \text{ und } f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r} \text{ folgt.}$$

Anmerk. Die numerischen Werthe der auf den Halbmesser = 1 sich beziehenden trigonometrischen Linien, die man auch natürliche Functionen (Sinus, Cosinus u. s. w.) nennt, stellen also

$$\left(\text{wegen } f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{1} = \frac{F(\alpha)}{r}\right)$$

nichts weiteres als die Verhältnisse dieser Linien zum Halbmesser jenes Kreises vor, in welchem diese Linien betrachtet werden.

§. **34.** Um also z. B. den Sinus eines Winkels α in einem Kreise vom Halbmesser r zu erhalten, wird man den Sinus desselben Winkels α aus dem Kreise vom Halbmesser 1 mit r multipliciren. Dagegen findet man umgekehrt aus dem Sinus eines Winkels im Kreise vom Halbmesser r, den Sinus desselben Winkels für den Kreis vom Halbmesser 1, wenn man den gegebenen Sinus durch r dividirt. Dasselbe gilt auch für die übrigen trigonometrischen Linien oder Functionen.

Anmerk. Man sieht, dass die Quotienten $\frac{Sin\,\alpha}{r}$, $\frac{Tang\,\alpha}{r}$ u. s. w., so wie auch jene $\frac{\sin\alpha}{1}$, $\frac{\cos\alpha}{1}$, $\frac{tang\,\alpha}{1}$ u. s w. abstracte oder absolute Zahlen sind.

§. **35.** Die letztere der beiden Relationen in §. 33 dienet auch zur Umwandlung der für den Halbmesser 1 abgeleiteten Formeln auf den Halbmesser r. Denn wendet man diese z. B. auf die für den Halbmesser 1 (§. 16) entwickelte Formel $tang\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ an, so erhält man

$$\frac{Tang\,\alpha}{r} = \frac{Sin\,\alpha}{r} : \frac{Cos\,\alpha}{r} \quad \text{oder} \quad Tang\,\alpha = \frac{r\,Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha},$$

in welcher Formel sich nun die goniometr. Linien $Tang\,\alpha$, $Sin\,\alpha$ und $Cos\,\alpha$ auf einen Kreis vom Halbmesser r beziehen.

Auf die nämliche Art erhält man auch aus (§§. 16, 20)

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha},\quad sin\,(\alpha \pm \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta \pm sin\,\beta\,cos\,\alpha$$

u. s. w., sofort:

$$Sec\,\alpha = \frac{r^2}{Cos\,\alpha},\quad Sin\,(\alpha \pm \beta) = \frac{Sin\,\alpha\,Cos\,\beta \pm Sin\,\beta\,Cos\,\alpha}{r}$$

u. s. w.

Und so kann man überhaupt alle oben für den Halbmesser 1 entwickelten Formeln, wenn es nöthig sein sollte, für den Halbmesser r herstellen.

Anmerk. Da, wie man sieht, in diesen auf den Halbmesser r bezogenen Formeln durchaus die nämliche Dimension herrscht, was bei der Anwendung der Algebra auf Geometrie überhaupt, wie wir im dritten Abschnitte sehen werden, sobald jede Linie durch einen Buchstaben (und keine durch 1) bezeichnet wird, eine nothwendige Eigenschaft ist; so kann man auch noch kürzer diese Umwandlung der Formeln vom Halbmesser 1 auf jenen r bewirken, indem man die umzuwandelnde Formel in ihren Gliedern mit solchen Potenzen von r multiplicirt oder dividirt, dass dadurch in der ganzen Gleichung oder Formel die besagte gleiche Dimension hergestellt wird. So folgt z. B. aus der in §. 23 entwickelten Formel von $tang\,\alpha$ durch $tang\,\frac{1}{2}\,\alpha$ ausgedrückt, für den Halbmesser 1:

$$tang\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + tang\,\alpha^2}}{tang\,\alpha};$$

stellt man nun im 2. Theil dieser Gleichung durchaus die Dimension $= 1$ her (da auch der erste Theil von dieser Dimension ist), so erhält man:

$$tang\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{-r^2 + r\sqrt{r^2 + tang\,\alpha^2}}{tang\,\alpha},$$

die auf den Halbmesser r sich beziehende Formel, wie man sie auch nach dem obigen Verfahren erhalten würde.

Zweites Capitel.

Ueber die Berechnung der Sinus, Cosinus u. s. w.

§. **36.** Da sich die zur Berechnung der Sinus darbietenden bequemeren und einfacheren Methoden der neueren Zeit hier noch nicht anführen lassen, so wollen wir nur einen kurzen Begriff geben, wie diese Berechnung mit den bisher entwickelten Relationen ausgeführt werden kann.

Mit Hilfe der Formeln in §§. 14, 18, 20 können nach und nach die Sinus von 3°, 6°, 9°... überhaupt von 3 zu 3 Grad durch den ganzen Quadranten gefunden werden. Da es uns aber hier vorzüglich um die Bestimmung von $\sin 3^\circ$ zu thun ist, so sollen, um nämlich den Weg anzugeben, ausser diesem nur einige Sinus aus der erwähnten Reihe gesucht werden.

§. **37.** Nach der Relation in §. 14 hat man für $\alpha = 30$, 45, 60 und 18° der Reihe nach:

$$\sin 30 = \cos 60 = \tfrac{1}{2} chord\ 60 = \tfrac{1}{2} = \cdot 5,$$
$$\sin 45 = \cos 45 = \tfrac{1}{2} chord\ 90 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cdot 707,$$
$$\sin 60 = \cos 30 = \tfrac{1}{2} chord\ 120 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \cdot 866,$$
$$\sin 18 = \cos 72 = \tfrac{1}{2} chord\ 36 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \cdot 309\ ^{*)}.$$

Nach der Formel in §. 20 erhält man jetzt, $\alpha = 60$ und $\beta = 45^\circ$ gesetzt:

$$\sin(60 \pm 45) = \sin 60 \cos 45 \pm \sin 45 \cos 60 \quad \text{oder}$$
$$\sin 105 = \sin 75 = \cos 15 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) = \cdot 966$$
$$\text{und} \quad \sin 15 = \cos 75 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(-1+\sqrt{3}) = \cdot 259.$$

Eben so ist für $\alpha = 18$ und $\beta = 15^\circ$:

$$\sin(18 \pm 15) = \sin 18 \cos 15 \pm \sin 15 \cos 18,$$

und da (§. 18) $\cos 18 = \sqrt{1 - \sin 18^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$ ist:

*) Man substituirt nämlich für *chord* 60, 90, 120 und 36° die aus der Geometrie bekannten Ausdrücke der regelmässigen 6, 4, 3 und 10. Eck-Seite für den Halbmesser 1.

$$sin\,33 = cos\,57 = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\,\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})} = \cdot 545,$$

und (statt der Summe, die Differenz derselben beiden Bestandtheile genommen) $sin\,3 = cos\,87 = \cdot 052$ u. s. w.

§. **38**. Aus dem auf diese Weise gewonnenen kleinsten Sinus, d. i. aus $sin\,3^0$, findet man nach der Formel (§. 25)

$$sin\,\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+sin\,\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-sin\,\alpha},$$

indem man nach und nach $\alpha = 3^0$, $\frac{3^0}{2}$, $\frac{3^0}{4} = 45'$, $\frac{45'}{2}$, $\frac{45'}{4}$ u. s. w. setzt, auch die Sinus dieser Winkel; ist man dabei bis zu $\alpha = \frac{45'}{32}$ gekommen, so findet man $sin\frac{45'}{32} = \cdot 00040903$ und hierauf für $\alpha = \frac{45'}{64}$, sofort $sin\frac{45'}{64} = \cdot 00020452$, so, dass sich also (weil diese Zahl die Hälfte von der vorigen ist) bei dieser Grösse der Winkel, bis auf 7 Decimalstellen genau, die Sinus wie die Winkel verhalten. Um also den für die weitere Berechnung wichtigen Sinus einer Minute zu finden, hat man die Proportion $sin\frac{45'}{64} : sin\,1' = \frac{45}{64} : 1$, und daraus, wenn man für $sin\frac{45'}{64}$ seinen Werth setzt: $sin\,1' = \cdot 00029087$, welcher Werth (da bis auf 12 Stellen genau, $sin\,1' = \cdot 000290888204$) bis auf die 7. Decimalstelle richtig ist.

§. **39**. Da (§. 28) $sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta) = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\beta$ und (§. 23) $cos\,\beta = 1 - 2\,sin\,\tfrac{1}{2}\beta^2$ ist, so erhält man:

$$sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha + [sin\,\alpha - sin(\alpha-\beta)] - 4\,sin\,\alpha\,sin\,\tfrac{1}{2}\beta^2,$$

und daraus und dem vorigen Werth von $sin\,1'$, wenn man $\beta = 1'$ und dann nach und nach $\alpha = 1, 2, \ldots 59'$, so wie endlich Kürze halber, $4\,(sin\,\tfrac{1}{2}')^2 = 4(\cdot 0001454441)^2 = \cdot 0000000846 = k$ setzt:

$$sin\,2' = sin\,1' + (sin\,1' - sin\,0') - k\,sin\,1',$$
$$sin\,3' = sin\,2' + (sin\,2' - sin\,1') - k\,sin\,2',$$
$$sin\,4' = sin\,3' + (sin\,3' - sin\,2') - k\,sin\,3',$$

u. s. w.

§. 40. Hat man auf diese Weise endlich $\sin 60' = \sin 1^0$ berechnet, so findet man nach der nämlichen Formel des vorigen §. die Sinus von 2, 3, .. 90°, wenn man darin $\beta = 1^0$ und nach und nach $\alpha = 1, 2, \ldots 89^0$, oder die Sinus von $1^0 1'$, $1^0 2'$ u. s. w., wenn man $\alpha = 1', 2', \ldots$ setzt.

Von 60° angefangen können jedoch die folgenden Sinus aus den vorhergehenden nach der Formel $\sin(60^0 + \alpha) = \sin(60^0 - \alpha) + \sin\alpha$ (die aus jener im vorigen §. angeführten für $\beta = 60^0$ folgt) bequemer gefunden werden.

Anmerk. 1. Man kann auch, da der Sinus eines sehr kleinen Bogens von dem Bogen selbst nur sehr wenig verschieden ist, von einem solchen kleinen Sinus ausgehen und mit der Berechnung wie oben fortfahren. Dazu muss man jedoch zuerst zwei Sätze beweisen, nämlich erstens, dass im 1. Quadranten der Bogen immer grösser als der zugehörige Sinus, und kleiner als die entsprechende Tangente ist, und zweitens, dass, wenn man den Bogen allmählig bis Null abnehmen lässt, dabei das Verhältniss des Bogens zu seinem Sinus der Einheit so nahe kommen kann, als man nur immer will, d. h. dass dieses Verhältniss die Einheit zur Grenze hat.

Fig. 3. Denn ist für den Bogen AB' (Fig. 3) AL der Sinus und AE' die Tangente, und denkt man sich die Fig. $CALE'$ um CE' umgeschlagen, so, dass dadurch der Punct A auf B, AL auf BL und AE' auf BE' fällt; so ist wegen Bogen $AB >$ Sehne AB auch, wenn man auf die Hälften übergeht, Bog. $AB' > AL$, d. i. der Bogen grösser als sein Sinus.

Ferner ist Bog. $AB < AE' + BE'$, also auch Bogen $AB' < AE'$, d. h. der Bogen kleiner als seine Tangente.

Daraus folgt nun, dass wenn die Differenz $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} - 1$ sehr klein ist, sofort der Unterschied $\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1$ noch kleiner sein muss.

Was ferner den zweiten zu erweisenden Satz anbelangt, so hat man aus der Formel $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ auch $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Da nun (weil $\alpha < 90^0$ vorausgesetzt wird) wenn der Bogen α abnimmt der Cosinus zunimmt, so kann dieser der Einheit so nahe kommen als man will; es nimmt daher, während sich α fortwährend der Null nähert, dieses Verhältniss fortwährend ab und nähert sich dabei ohne Ende der Einheit, oder hat die Einheit zur Grenze.

Da nun der Bogen grösser als der Sinus und kleiner als die Tangente ist, so kann das Verhältniss $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ niemals < 1 und nicht

$> \frac{tang\,\alpha}{sin\,\alpha}$ werden. Da ferner dieses letztere Verhältniss die Einheit zur Grenze hat, so gilt diess auch von dem ersteren Verhältniss.

Diess vorausgeschickt, so kann man den Sinus eines sehr kleinen Bogens, z. B. $sin\,10''$ bis auf eine gewisse Grenze mit dem Bogen verwechseln. Um jedoch diese Grenze zu bestimmen, so hat man aus der Formel (§. 23) $sin\,\alpha = 2\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha\,cos\,\frac{1}{2}\,\alpha$, wegen $tang\,\frac{1}{2}\,\alpha > \frac{1}{2}\alpha$ oder $\frac{sin\,\frac{1}{2}\alpha}{cos\,\frac{1}{2}\alpha} > \frac{1}{2}\alpha$, d. i. $2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha > \alpha\,cos\,\frac{1}{2}\alpha$, sofort:

$$sin\,\alpha > \alpha\,cos\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ oder da } cos\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 - sin\,\tfrac{1}{2}\alpha^2, \text{ folglich}$$
$$cos\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 > 1 - (\tfrac{1}{2}\alpha)^2 \text{ ist, auch } sin\,\alpha > \alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^3.$$

Wendet man nun dieses Ergebniss auf die Bestimmung des Sinus von 10 Secunden an, so hat man, da Bogen $10'' = \frac{\pi}{64800} = \frac{3{\cdot}14159265358979}{64800} = {\cdot}000048481368110$ ist, sofort Bog. $10'' < {\cdot}00005$, folglich

$$\tfrac{1}{4}(\text{Bog. } 10'')^3 < {\cdot}0^{12}32 \text{ und daher } sin\,10'' > \begin{array}{l} + {\cdot}000048481368110 \\ - {\cdot}000000000000032 \end{array}$$
$$\text{d. i. } sin\,10'' > {\cdot}000048481368078.$$

Hieraus folgt also, dass der Sinus von 10 Secunden erst in der 13. Decimalstelle von seinem Bogen abweicht und selbst in dieser Stelle noch keine volle Einheit beträgt. Setzt man also

$$sin\,10'' = {\cdot}0000484813681,$$

so kann man überzeugt sein, dass der Fehler noch keine Einheit in der 13. Decimalstelle beträgt.

Aus diesem Werthe findet man ferner $cos\,10'' = \sqrt{1 - (sin\,10'')^2} = {\cdot}9999999988248$. Man könnte nun die Sinus der Bögen von $20''$, $30''$, $40''$ u. s. w. aufwärts bis 45^0, und zwar nach den Formeln von $sin(\alpha + \beta)$ und $cos(\alpha + \beta)$ berechnen, allein diese Berechnung wird durch das folgende von Thom. Simpson angegebene Verfahren wesentlich erleichtert.

Sieht man nämlich in den aus §. 28, Relation (1) und (3) folgenden Formeln

$$sin(\alpha + \beta) = 2\,cos\,\beta\,sin\,\alpha - sin(\alpha - \beta)$$
$$\text{und } cos(\alpha + \beta) = 2\,cos\,\beta\,cos\,\alpha - cos(\alpha - \beta)$$

die Bögen $\alpha - \beta$, α, $\alpha + \beta$ als die drei aufeinander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe von der Differenz β an, und bezeichnet diese Glieder durch t, t', t'', so hat man:

$$sin\,t'' = 2\,cos\,\beta\,sin\,t' - sin\,t$$
$$\text{und } cos\,t'' = 2\,cos\,\beta\,cos\,t' - cos\,t.$$

Setzt man daher in diesen beiden Formeln, um die Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Secunden zu erhalten, $\beta = 10''$ und bezeichnet die oben gefundenen Werthe von $sin\,10''$ und $cos\,10''$ durch a und b, so erhält man:

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\sin 10'' = a$	$\cos 10'' = b$
$\sin 20'' = 2b \sin 10''$	$\cos 20'' = 2b \cos 10'' - 1$
$\sin 30'' = 2b \sin 20'' - \sin 10''$	$\cos 30'' = 2b \cos 20'' - \cos 10''$
$\sin 40'' = 2b \sin 30'' - \sin 20''$	$\cos 40'' = 2b \cos 30'' - \cos 20''$

u. s. w.

Setzt man die sehr kleine Differenz $2 - 2b = \cdot 0^{8}23504 = \delta$, so wird wegen $2b = 2 - \delta$ auch $\sin t'' - \sin t' = (\sin t' - \sin t) - \delta \sin t'$, in welcher Darstellungsweise wieder eine weitere Abkürzung in der Berechnung begründet ist.

Anmerk. 2. Da es bei diesen Rechnungen nöthig ist, sich von Zeit zu Zeit von der Richtigkeit derselben zu überzeugen, so kann man unter anderen Mitteln dazu die sogenannten Verificationsformeln anwenden. Eine solche ist:

$$\sin A + \sin(36^{0} - A) + \sin(72^{0} + A) = \sin(36^{0} + A) + \sin(72^{0} - A).$$

§. **41.** Sind auf diese Weise die sämmtlichen Sinus, also zugleich auch die Cosinus für den ganzen Quadranten (über welchen man, §. 13, Anmerk., nicht hinauszugehen braucht) gefunden; so kann man nach den Formeln in §. 16 die Tangenten und Cotangenten (da die übrigen Functionen entbehrlich sind) berechnen.

§. **42.** Da bei den wirklichen Rechnungen weniger diese so gefundenen Zahlen der Sinus, Cosinus u. s. w. die sogenannten natürlichen Functionen, als ihre Logarithmen (die künstlichen Functionen) in Anwendung kommen; so sind auch gewöhnlich nur diese Logarithmen (aus dem Briggischen System) in den Tafeln eingetragen. Da aber für den Halbmesser 1, die Sinus durchaus eigentliche Brüche sind, so erhalten ihre Logarithmen (um sie positiv zu machen) eine negative Charakteristik, indem z. B. wegen $\sin 30^{0} = \cdot 5$,

$$\log \sin 30^{0} = \log \cdot 5 = \cdot 6989700 - 1$$

ist; dasselbe gilt auch für die Cosinus und unter 45^{0} für die Tangenten, über 45^{0} für die Cotangenten. Um daher diese angehängten negativen Zahlen zu vermeiden, nimmt man in den Tafeln den Halbmesser nicht $= 1$, sondern $= 10^{10}$, so dass also für diesen Tafelhalbmesser $r = 10^{10}$, $\log r = 10$ wird. Dadurch hat man aus (§. 33) $F(\alpha) = r f(\alpha)$, sofort: $\log F(\alpha) = \log f(\alpha) + 10$, also im vorigen Beispiele auf den Halbm. der Tafel bezogen: $\log \sin 30^{0} = 9\cdot 6989700$.

§. 43. Zusatz. Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen, diese auf den Halbmesser 1 bezogen, werden daher in Tafellogarithmen, oder in solche, die sich auf den Halbmesser der Tafel r beziehen, umgewandelt, indem man zu den ersteren 10 Einheiten addirt; dagegen werden die letzteren auf die ersteren gebracht, indem man von jedem Logarithmus der Tafel 10 Einheiten abzieht.

§. 44. Die Einrichtung und den Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Hilfstafeln lernt man am besten aus der Einleitung kennen, die gewöhnlich einer jeden solchen Tafel beigefügt ist; indess beruht diese Einrichtung immer auf folgenden Sätzen:

1. Im ersten Quadranten nehmen, wenn die Winkel wachsen, die Functionen (Sinus, Tangente etc.) zu, dagegen die Cofunctionen (Cosinus, Cotangente u. s. w.) ab.
2. Die Sinus und Tangenten kleiner Winkel stehen mit den entsprechenden Winkeln in geometrischer, also die Logarithmen dieser Functionen mit den Logarithmen der Winkel in arithmetischer Proportion.
3. Bei grösseren, weniger als um eine Minute von einander verschiedenen Winkeln verhalten sich die Differenzen der Logarithmen der Functionen oder Cofunctionen, wie die Differenzen der zugehörigen Winkel.
4. Die Logarithmen der Cotangenten haben mit jenen der Tangenten einerlei Differenzen.

Von diesen 4 Sätzen ist der 1. bereits (§. 10, Anmerk.) angeführt; der 2. und 3. ergeben sich am einfachsten aus der Tafel selbst, aus welcher man zugleich auch ersieht, wie weit diese Sätze ausgedehnt werden dürfen; der 4. Satz endlich folgt ganz einfach aus der Gleichung (§. 16)

$$tang\, \alpha\, cot\, \alpha = 1\ ^{*)}.$$

*) Hier ist zugleich der Ort, an welchem die nöthigen Uebungen mit den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, um zu irgend einem gegebenen Winkel, *log sin*, *log cos* etc., und umgekehrt, zu einem gegebenen Logarithmus Sinus, Cosinus etc. den entsprechenden Winkel zu finden, vorzunehmen sind.

Drittes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der geradlinigen Dreiecke.

§. **45**. Bezeichnet man in einem beliebigen geradlinigen
Fig. 5. Dreiecke ABC (Fig. 5) die Winkel durch A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten beziehungsweise durch a, b, c, und fällt aus einem der Winkelpuncte, z. B. C, auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel CD; so ist, wenn man sich aus A mit dem Halbmesser $AC = b$ den Kreisbogen beschrieben denkt, CD der Sinus des Winkels A für den Halbmesser b, und man hat, wenn, wie bisher, $\sin A$ den Sinus dieses Winkels A für den Halbmesser $= 1$ bezeichnet (§. 34): $CD = b \sin A$. Eben so ist, wenn der Kreisbogen aus B, mit dem Halbmesser $BC = a$ beschrieben gedacht wird, im Falle das Perpendikel (Fig. 5) CD in das Dreieck fällt:

$$CD = a \sin B,$$

Fig. 5'. und wenn das Perpendikel (Fig. 5') ausserhalb desselben fällt: $CD = a \sin \alpha$ oder wegen $\sin \alpha = \sin(180 - B) = \sin B$ (§. 13) ebenfalls $CD = a \sin B$. Man hat also in beiden Fällen: $b \sin A = a \sin B$ oder $a : b = \sin A : \sin B$.

§. **46**. Da es ganz gleichgiltig ist, von welchem Winkelpuncte das Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird, so hat man eben so gut (was gleichfalls aus der vorigen Proportion durch blosses Vertauschen der Buchstaben folgt) auch:

$$a : c = \sin A : \sin C \quad \text{und} \quad b : c = \sin B : \sin C,$$

folglich allgemein

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

wodurch der erste und wichtigste Satz für das geradlinige Dreieck, dass sich nämlich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, ausgedrückt wird.

§. 47. Aus der vorigen Proportion $a : b = \sin A : \sin B$ folgt auch $a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$, oder

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan g \frac{1}{2}(A+B)}{\tan g \frac{1}{2}(A-B)}$$

(§. 27), d. i.

$$a + b : a - b = \tan g \tfrac{1}{2}(A+B) : \tan g \tfrac{1}{2}(A-B),$$

welche Proportion einen zweiten Hauptsatz des Dreieckes aussagt und darin besteht, dass sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

§. 48. So wie oben (§. 45) $CD = b \sin A = a \sin B$ war, so ist auch (§. 5, Zusatz) (Fig. 5) $AD = b \cos A$ und Fig. 5.
$BD = a \cos B$, folglich $AD + BD$, d. i.

$$c = a \cos B + b \cos A \text{ *)}.$$

Analog mit dieser Relation hat man noch

$$b = a \cos C + c \cos A \quad \text{und} \quad a = b \cos C + c \cos B.$$

Multiplicirt man diese 3 Gleichungen beziehungsweise mit c, b, a; so erhält man:

$$c^2 = ac \cos B + bc \cos A,$$
$$b^2 = ab \cos C + bc \cos A,$$
$$a^2 = ab \cos C + ac \cos B,$$

und wenn man von der Summe der beiden erstern dieser Gleichungen die letztere abzieht:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

woraus endlich der dritte für das geradlinige Dreieck wichtige Satz folgt:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Auch die beiden durch diese Formeln dargestellten Sätze lassen sich ganz einfach durch Worte ausdrücken.

*) Dieselbe Relation findet man auch aus Fig. 5' mit Berücksichtigung, dass

$$BD = a \cos \alpha = -a \cos B \quad \text{und} \quad c = AB = AD - BD \text{ ist.}$$

So ist zu Folge der erstern Relation der Cosinus eines Winkels (in irgend einem Dreiecke) gleich der Summe der Quadrate der beiden einschliessenden Seiten, weniger dem Quadrate der gegenüberliegenden Seite, getheilt durch das doppelte Product der beiden einschliessenden Seiten.

Zufolge der zweiten Relation ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten, weniger dem doppelten Producte dieser beiden Seiten in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Anmerk. Es versteht sich von selbst, dass, wenn A ein stumpfer Winkel und $A' = 180 - A$, also $A' < 90^0$ ist, diese letztere Relation für den practischen Gebrauch (wegen $\cos A = -\cos A'$) durch

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2ab \cos A'$$

ausgedrückt wird.

Viertes Capitel.

Auflösung der geradlinigen Dreiecke.

α) Der rechtwinkeligen.

§. **49.** Obschon die Auflösung der rechtwinkeligen Dreiecke in jener der schiefwinkeligen als besonderer Fall enthalten ist, so verdient diese dennoch, der grossen Einfachheit wegen, besonders angeführt zu werden.

Fig. 6. §. **50.** Bezeichnet man (Fig. 6) den rechten W. durch C, die beiden spitzen W. durch A und B, also die Hypotenuse durch c und die beiden Catheten durch a und b; so können hier bloss 5 verschiedene Fälle vorkommen, und sofort ausser dem rechten W. gegeben sein: 1. a, b, 2. a, c (gleichgeltend mit b, c), 3. a, A (analog mit b, B), 4. a, B (analog mit b, A) und 5. c, A (analog mit c, B).

Ohne nun erst für alle diese Fälle besondere Regeln aufzustellen, ist es einfacher aus der blossen Anschauung

der Figur diejenige Relation oder Gleichung (nach §§. 3, 5 u. 33) anzusetzen, in welchen die beiden gegebenen und das gesuchte Stück vorkommen, und daraus dann das letztere zu bestimmen. Wären z. B. eine Cathete und der gegenüberliegende W. gegeben und die Hypotenuse zu suchen, so würde man unmittelbar aus der Figur (indem man sich aus A mit dem Halbmesser $AB = c$ einen Bogen beschrieben denkt) $a = c \sin A$ und daraus $c = \frac{a}{\sin A}$ haben.

Wäre dagegen die zweite Cathete zu suchen, so würde man ebenfalls aus dem Dreiecke selbst (indem man sich, um eine Relation zwischen a, A, b zu erhalten, aus A mit dem Halbmesser $AC = b$ einen Bogen beschrieben vorstellt) $a = b \operatorname{tang} A$ und daraus $b = \frac{a}{\operatorname{tang} A} = a \cot A$ erhalten.

§. **51.** Die Auflösung der rechtwinkeligen Dreiecke liegt also in den 5 einfachen Relationen: $a^2 + b^2 = c^2$, $a = c \sin A = b \operatorname{tang} A$, $b = c \cos A = a \cot A$; und man erhält, durch Zusammenstellung aller vorkommenden Fälle, sofort folgende Tabelle:

Gegebene Stücke	Gesuchte Stücke
a, b	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tang} A = \frac{a}{b}$.
a, c	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$, $\sin A = \frac{a}{c}$.
a, A	$b = a \cot A$, $c = \frac{a}{\sin A}$.
b, A	$a = b \operatorname{tang} A$, $c = \frac{b}{\cos A}$.
c, A	$a = c \sin A$, $b = c \cos A$, dabei ist überall $B = 90^0 - A$.

§. **52.** Diese Ausdrücke sind zugleich, mit Ausnahme des erstern, so beschaffen, dass man darauf die Logarithmen anwenden kann. Um auch den erstern dafür einzurichten, setze man, da

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

ist, und die Tangente jeden Werth von 0 bis ∞ annehmen kann, $\frac{b}{a} = tang\,\varphi$, wo φ einen Hilfswinkel bezeichnet: so hat man: $c = a\sqrt{1 + tang\,\varphi^2} = a\,sec\,\varphi$ (§. 15) oder auch (§. 16): $c = \frac{a}{cos\,\varphi}$.

Man bestimmt also zuerst aus der Gleichung $log\,tang\,\varphi = log\,b - log\,a$ den Hilfswinkel φ und damit aus der Gleichung $log\,c = log\,a - log\,cos\,\varphi$ die gesuchte Hypotenuse c.

§. 53. Zur Bestimmung der Fläche F des Dreieckes hat man in den genannten 5 Fällen ganz einfach beziehungsweise: $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{1}{2}a^2\,cot\,A = \frac{1}{2}b^2\,tang\,A = \frac{1}{2}c^2\,sin\,A\,cos\,A$ oder (§. 23) auch $= \frac{1}{4}c^2\,sin\,2A$, welche Ausdrücke ebenfalls der logarithmischen Behandlung fähig sind.

Anmerk. 1. Die in den Relationen dieses und des §. 51 vorkommenden trigonometrischen Linien oder Functionen beziehen sich, wie man sieht, wieder auf den Halbmesser 1 und können, wenn man will, nach §. 35, leicht auf jenen r gebracht werden; es gehen z. B. dadurch die Ausdrücke $tang\,A = \frac{a}{b}$, $a = c\,sin\,A$, $F = \frac{1}{2}a^2\,cot\,A$ u. s. w., in $Tang\,A = \frac{ra}{b}$, $a = \frac{c\,Sin\,A}{r}$, $F = \frac{a^2\,Cot\,A}{2r}$ u. s. w. über. Allein wir ziehen es vor, diese Formeln ungeändert zu lassen und dagegen bei der wirklichen Berechnung, nach §. 43, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen der Tafel, auf den Halbmesser 1, und umgekehrt, die gefundenen Logarithmen der auf den Halbmesser 1 sich beziehenden trigonometrischen Functionen, zur Auffindung der entsprechenden Winkel, auf den Tafelhalbmesser zu reduciren.

Anmerk. 2. Zur Uebung in den genannten 5 Fällen mag man das Dreieck nehmen, in welchem $a = 110{\cdot}806$, $b = 148{\cdot}6$, $c = 185{\cdot}364$, $A = 36^0\,42'\,38''$, $B = 53^0\,17'\,22''$, $C = 90^0$ und $F = 8232{\cdot}886$ ist.

b) Der schiefwinkeligen oder beliebigen Dreiecke.

§. 54. Bei der Auflösung der schiefwinkeligen Dreiecke können (da sich darunter immer wenigstens eine Seite

befinden muss) gegeben sein: I. eine Seite und zwei Winkel; II. zwei Seiten und ein Winkel, und zwar α) ein gegenüberliegender oder β) der eingeschlossene W.; III. alle drei Seiten.

§. **55.** I. Gegeben eine Seite und zwei Winkel, z. B. c, A, B. Da in diesem Falle immer auch der 3. W. $C = 180 - (A + B)$ gegeben ist, so hat man (§. 46) $c : a = \sin C : \sin A$ und daraus $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ oder $\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$. Auf dieselbe Art erhält man (wozu in der letztern Relation nur a und b, also auch A und B mit einander zu vertauschen sind):

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C.$$

§. **56.** Zur Bestimmung der Fläche F hat man (Fig. 5) Fig. 5. $F = \frac{1}{2} AB \,.\, CD$, oder da $AB = c$ und $CD = b \sin A = a \sin B$ ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A = \tfrac{1}{2}\, ac \sin B \left(= \tfrac{1}{2}\, ab \sin C\right);$$

es ist also im vorliegenden Falle, wegen $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, sofort

$$F = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A + B)}.$$

Zur Uebung dieses und der folgenden Fälle kann das Dreieck dienen, in welchem $a = 36{\cdot}52$, $b = 48{\cdot}34$, $c = 55{\cdot}62$, $A = 40^\circ\, 22'\, 26{\cdot}''56$, $B = 59^\circ\, 1'\, 46{\cdot}''34$, $C = 80^\circ\, 35'\, 47{\cdot}''1$ und $F = 870{\cdot}826$ ist. (Man sehe Handb. der Trigonom., S. 98 u. f.)

§. **57.** II. α) Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, z. B. a, b, B. In diesem Falle hat man ebenfalls wieder (nach §. 46)

$$b : a = \sin B : \sin A,$$

und daraus $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$ oder

$$\log \sin A = \log a + \log \sin B - \log b.$$

Entspricht nun diesem so berechneten Logarithmus Sinus in der Tafel der W. α, welcher also (§. 41) jedenfalls ein spitzer ist; so kann im Allgemeinen (weil beide Winkel

denselben Sinus haben) $A = \alpha$ und $= 180^0 - \alpha$ sein. Ist aber B der der grösseren Seite gegenüberliegende W., also $a < b$, so ist auch $A < B$, und es kann von den beiden Werthen nur jener $A = \alpha < 90^0$ gelten, so, dass in diesem Falle das Dreieck vollkommen bestimmt ist. Liegt hingegen der gegebene W. B der kleinern Seite gegenüber, ist nämlich $a > b$, also auch $A > B$; so können, ohne gegen diese letztere Bedingung zu verstossen, beide Werthe: $A = \alpha < 90$ und $A = 180 - \alpha > 90$ gelten, so dass es in diesem (unbestimmten) Falle zwei Dreiecke oder Auflösungen gibt (wie diess Alles auch aus der Geometrie schon bekannt ist).

Im 1. oder bestimmten Falle ist ferner, nachdem $A = \alpha$ gefunden ist, $C = 180 - (A + B)$, und aus $c : b = \sin C : \sin B$, wenn man gleich Logarithmen nimmt:

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B,$$

also sind auch C und c bestimmt. Im 2. oder unbestimmten Falle aber erhält man, wegen des zweifachen Werthes von A, auch 2 Werthe sowohl für C als für c, die den erwähnten beiden Dreiecken entsprechen.

§. 58. Zur Berechnung der Fläche hat man (§. 56) $F = \frac{1}{2} ac \sin B$, oder da aus der Gleichung (§. 48)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

wenn man dieselbe nach c auflöst,

$$c = a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin B^2} \text{ folgt:}$$

$$F = \frac{1}{2} a \sin B \left[a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin B^2}\right].$$

Für $b > a$, d. i. im bestimmten Falle, ist

$$b^2 - a^2 \sin B^2 > a^2 - a^2 \sin B^2 = a^2 \cos B^2,$$

also $\sqrt{b^2 - a^2 \sin B^2} > a \cos B$; es kann also, da F positiv sein muss, vor der Wurzelgrösse nur das Zeichen $+$ gelten. Für $b < a$, oder im unbestimmten Falle aber, ist $\sqrt{b^2 - a^2 \sin B^2} < a \cos B$, und es können, ohne dass F negativ ausfällt, beide Zeichen genommen werden, wodurch also auch F zwei verschiedene, den vorhin genannten beiden Dreiecken entsprechende Werthe erhält.

Nimmt man, um auch ein Beispiel für den **unbestimmten** Fall zu haben, von dem oben (§. 56) angegebenen Dreiecke, in welchem $a < b$ ist, a, b und A als gegebene Stücke; so findet man, ausser dem eben genannten Dreieck, auch noch jenes: $a = 36{\cdot}52$, $b = 48{\cdot}34$, $c = 18{\cdot}0339$, $A = 40^0\, 22'\, 26{\cdot}''56$, $B = 120^0\, 58'\, 13{\cdot}''66$, $C = 18^0\, 39'\, 19{\cdot}''78$ und $F = 282{\cdot}352$, welches der Bedingung der Aufgabe ebenfalls entspricht.

§. **59.** II. β) Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, b, C. In diesem Falle hat man zur Bestimmung der beiden fehlenden Winkel A und B (§. 47) $a + b : a - b = tang\, \frac{1}{2}\,(A + B) : tang\, \frac{1}{2}\,(A - B)$, und daraus mit Anwendung der Logarithmen: $log\, tang\, \frac{1}{2}\,(A - B) = log\,(a - b) + log\, tang\, \frac{1}{2}\,(A + B) - log\,(a + b)$, in welchem Ausdrucke, wegen $\frac{1}{2}\,(A + B) = 90 - \frac{1}{2}\,C$, auch $cot\, \frac{1}{2}\,C$ statt $tang\, \frac{1}{2}\,(A + B)$ gesetzt werden könnte. Da nun durch C die Summe $\frac{1}{2}\,(A + B) = s$ bekannt ist, und aus der vorigen Gleichung die Differenz $\frac{1}{2}\,(A - B) = d$ gefunden wird, so ist $A = s + d$ und $B = s - d$; dabei ist für $a > b$, weil d positiv ausfällt, auch $A > B$; für $a < b$ wird d negativ also auch $A < B$ (im letztern Falle kann man auch a mit b verwechseln, oder überhaupt immer die grössere Seite durch a bezeichnen).

Nachdem die W. A und B bestimmt sind, kann man die Seite c nach dem Satze $c : a = sin\, C : sin\, A$, woraus $log\, c = log\, a + log\, sin\, C - log\, sin\, A$ folgt, berechnen.

§. **60.** Um aber, was oft nothwendig und wünschenswerth ist, diese dritte Seite c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu finden, hat man (§. 48)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, C,$$

oder, wenn man zur Anwendung der Logarithmen, im 2. Theil der Gleichung $2ab$ addirt und abzieht, und noch berücksichtiget, dass (§. 23) $1 + cos\, C = 2\, cos\, \frac{1}{2}\, C^2$ ist, sofort

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab\, cos\, \tfrac{1}{2}\, C^2 = (a + b)^2 \left(1 - \frac{4ab\, cos\, \frac{1}{2}\, C^2}{(a + b)^2}\right),$$

und wenn man $\frac{4ab\, cos\, \frac{1}{2}\, C^2}{(a + b)^2} = cos\, \varphi^2$ setzt, wo φ einen Hilfswinkel bezeichnet, auch $c^2 = (a + b)^2\, sin\, \varphi^2$ oder

$$c = (a + b)\, sin\, \varphi.$$

Nachdem man also aus der Gleichung (die aus der vorigen für $\cos\varphi^2$ folgt)

$$\log\cos\varphi = \log 2 + \log\cos\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) - \log(a+b)$$

den Hilfswinkel φ bestimmt hat, findet man c aus jener:

$$\log c = \log(a+b) + \log\sin\varphi.$$

Anmerk. Sind nicht die Seiten a und b selbst, sondern ihre Logarithmen $\log a$ und $\log b$ gegeben, so findet man die beiden Winkel A und B einfacher aus den leicht zu entwickelnden Relationen: $\log\tang\varphi = \log a - \log b$ u. $\tang\tfrac{1}{2}(A-B) = \tang\tfrac{1}{2}(A+B)\tang(\varphi-45)$, wobei immer a für die grössere Seite genommen wird. Im entgegengesetzten Falle darf man nur a mit b, und A mit B vertauschen. Setzt man nämlich $\frac{a}{b} = \tang\varphi$ und ist $a > b$, so ist auch $\tang\varphi > 1$, folglich wegen $\tang 45^0 = 1$, sofort $\varphi > 45^0$, und daher

$$\frac{\tang\varphi - 1}{\tang\varphi + 1} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Da nun (§. 22) $\frac{\tang\varphi - 1}{\tang\varphi + 1} = \tang(\varphi - 45)$ und (§. 47) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\tang\frac{1}{2}(A+B)}$ ist, so hat man auch:

$$\tang(\varphi - 45) = \frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\tang\frac{1}{2}(A+B)},$$

woraus sofort, wenn man auf die Logarithmen übergeht, die vorigen Relationen folgen.

§. **61**. Für die Fläche hat man hier unmittelbar (§. 56) $F = \tfrac{1}{2}ab\sin C$.

Bestimmt man die Seite c nach dem vorigen §., so findet man dazu den Hilfswinkel $\varphi = 40^0\,57'\,8\cdot''85$.

Sind nicht die Seiten a und b selbst, sondern ihre Logarithmen, nämlich $\log a = 1\cdot5625308$ und $\log b = 1\cdot6843066$ gegeben; so erhält man für den in der Anmerkung des vorigen §. angenommenen Hilfswinkel

$$\varphi = 37^0\,4'\,13\cdot''42,$$

und damit (weil man wegen $a < b$, a mit b, also auch A mit B verwechseln muss):

$$\tfrac{1}{2}(B-A) = 9^0\,19'\,39\cdot''85.$$

§. **62**. III. Gegeben alle drei Seiten a, b, c. In diesem Falle hat man zur Berechnung des Winkels A (§. 48) (α) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, oder, wenn man, um diese Formel für die Anwendung der Logarithmen geeignet zu

machen, den halben Winkel einführt und zuerst (§. 23) $\cos A = 2\cos\frac{1}{2}A^2 - 1$ setzt und gleich $2\cos\frac{1}{2}A^2$ besimmt:

$$2\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

oder wenn man Kürze halber $a+b+c=2s$ setzt, wodurch $b+c-a=2(s-a)$, $a+c-b=2(s-b)$ und $a+b-c=2(s-c)$ wird, auch

$$2\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4s(s-a)}{2bc} \quad \text{oder} \quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

§. **63**. Setzt man dagegen in der vorigen Gleichung (α) $\cos A = 1 - 2\sin\frac{1}{2}A^2$ (§. 23) und bestimmt daraus $2\sin\frac{1}{2}A^2$, so erhält man bei der vorigen Annahme von $a+b+c=2s$:

$$2\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc} = \frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}$$

$$\text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

§. **64**. Wegen $\tang\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}A$ und (§. 23) $\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$ hat man auch noch:

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{und}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Durch blosses Vertauschen der Buchstaben findet man aus diesen 4 Formeln die analogen zur Berechnung der beiden übrigen Winkel B und C.

(Ueber die Vorzüge, welche in der Anwendung die 3 erstern Formeln vor der letztern gewähren, beim mündlichen Vortrage; auch s. m. Handb. der Trigonom., S. 113.)

§. **65**. Um endlich noch die Fläche in diesem Falle zu bestimmen, hat man wegen (§. 56) $F = \frac{1}{2}bc\sin A$, wenn man für $\sin A$ den Werth aus dem vorigen §. substituirt:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zur ferneren Uebung mögen noch die beiden Dreiecke dienen:
$a = 842{\cdot}7$, $b = 692{\cdot}3$, $c = 504{\cdot}045$, $A = 88^\circ\, 5'\, 42''{\cdot}8$, $B = 55^\circ\, 11'\, 32''{\cdot}2$,

$C = 36^\circ 42' 45''$, $F = 174378 \cdot 7$, und $a = 24 \cdot 6$, $b = 32 \cdot 8$, $c = 21 \cdot 5$, $A = 48^\circ 35' 17 \cdot'' 94$, $B = 90^\circ 27' 23 \cdot'' 88$, $C = 40^\circ 57' 18 \cdot'' 28$. $F = 264 \cdot 442$.

Fünftes Capitel.

Grundformeln zur Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Fig. 7. §. **66.** Es sei ABC (Fig. 7) ein auf der Kugel vom Mittelpunct O und Halbmesser $OA = OB = OC = 1$ liegendes sphärisches Dreieck, dessen Winkel wir wieder durch A, B, C und gegenüberstehende Seiten beziehungsweise durch a, b, c bezeichnen. Zieht man im Winkelpuncte C an die beiden Seiten oder Kreisbögen CA, CB die Tangenten CD, CE (die also beziehungsweise in den Ebenen COA und COB liegen) und die Secanten OAD und OBE; so ist (wegen Halbm. $= 1$) $CD = tang\, b$, $CE = tang\, a$, $OD = sec\, b$ und $OE = sec\, a$. Nun hat man aus den beiden geradlinigen Dreiecken CDE und ODE nach §. 48:

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2CE \,.\, CD \cos DCE$$
$$= OE^2 + OD^2 - 2OE \,.\, OD \cos DOE,$$

folglich, wenn man diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt, für CE, $CD \ldots$ die vorigen Werthe substituirt und noch berücksichtiget, dass Winkel $DCE =$ sphär. Winkel C und Winkel $DOE = $ W. c ist:

$$tang\, a^2 + tang\, b^2 - 2\, tang\, a\, tang\, b \cos C$$
$$= sec\, a^2 + sec\, b^2 - 2\, sec\, a\, sec\, b \cos c,$$

und wenn man abkürzt, da (§. 15) $sec\, a^2 = 1 + tang\, a^2$ ist, auch $tang\, a\, tang\, b \cos C = sec\, a\, sec\, b \cos c - 1$, aus welcher Gleichung, wenn die Tangenten und Secanten durch Sinus und Cosinus (§. 16) ausgedrückt werden, sofort folgt:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

§. **67.** Bezeichnet man in derselben Ordnung die W.
Fig. 8. des zugehörigen Polardreieckes (Fig. 8) durch A', B', C'

und die gegenüberliegenden Seiten beziehungsweise durch a', b', c'; so ist bekanntlich:

$$A + a' = 180,\ B + b' = 180,\ C + c' = 180^0 \text{ und}$$
$$A' + a = 180,\ B' + b = 180,\ C' + c = 180^0\,{}^*),$$

also $a = 180 - A'$, $b = 180 - B'$, $c = 180 - C'$ und $C = 180 - c'$, mithin, wenn man diese Werthe in der vorigen Formel substituirt (d. h. auf diese die Eigenschaft des Polardreieckes anwendet) (§. 13):

$$- \cos c' = (- \cos C' - \cos A' \cos B') : \sin A' \sin B',$$

oder, wenn man zugleich die Accente weglässt, indem diese Relation nun in jedem sphärischen Dreiecke gilt:

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

§. **68**. Drückt man (auf ähnliche Art, wie in §. 62) in der Formel von §. 66 $\cos C$ durch den halben Winkel aus, so hat man zuerst für $\cos C = 2 \cos \frac{1}{2} C^2 - 1$ gesetzt:

$$2 \cos \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{\sin a \sin b + \cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos c - \cos(a + b)}{\sin a \sin b},$$

*) Da diese Eigenschaft des Polardreieckes nicht in allen Lehrbüchern der Elementar-Geometrie vorgetragen wird, so wollen wir diese hier kurz nachweisen.

Beschreibt man auf der Kugel aus den Winkelpuncten A, B, C des sphärischen Dreieckes ABC (Fig. 8), als Pole, mit der Entfernung von 90° grösste Kreisbögen; so entsteht das zugehörige Polardreieck $A'B'C'$. Dieser Construction zufolge steht aber A' sowohl von B als auch von C um 90° ab, also ist A' der Pol des grössten Kreisbogens BC. Eben so sind B' und C' die Pole der Bögen AC und AB; so wie also $A'B'C'$ das Polardreieck des Dreieckes ABC, so ist auch umgekehrt ABC das Polardreieck von jenem $A'B'C'$.

Nun ist (da DE das Mass des sphärischen Winkels C, und FG jenes des W. C' ist)

$$C + A'B' = DE + A'B' = DE + A'E + B'D - DE$$
$$= A'E + B'D = 90 + 90$$

(weil A' der Pol von CE und B' jener von CD ist), d. i. $C + c' = 180^0$, und damit analog: $B + b' = 180$, $A + a' = 180^0$.

Ferner ist $C' + AB = FG + AB = FB + GA - AB + AB = FB + GA = 90 + 90$ (weil B der Pol von FC' und A der Pol von $C'G$ ist), oder $C' + c = 180^0$, und damit analog auch $B' + b = 180$ und $A' + a = 180$.

oder (§. 26)

$$2\cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b},$$

und wenn man wieder $a+b+c=2s$ setzt (vergl. §. 62)

$$\text{endlich: } \cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}.$$

Analog damit ist noch:

$$\cos\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c} \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}.$$

§. **69.** Setzt man dagegen $\cos C = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}C^2$, so erhält man eben so (wieder mit Rücksicht auf §. 26):

$$2\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\cos(b-a)-\cos c}{\sin a\sin b} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\sin b},$$

$$\text{d. i. } \sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b},$$

und damit analog (durch blosse Vertauschung der Buchstaben):

$$\sin\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}.$$

§. **70.** Setzt man Kürze halber

$$\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} = w,$$

so hat man aus den Formeln der beiden vorigen §§., nach der Relation (§. 23) $\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha$ sofort:

$$\sin A = \frac{2\omega}{\sin b\sin c},\quad \sin B = \frac{2\omega}{\sin a\sin c},\quad \sin C = \frac{2\omega}{\sin a\sin b},$$

und daraus folgt:

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin a : \sin b : \sin c,$$

ein wichtiger (und jenem in §. 46 analoger) Satz der sphärischen Dreiecke.

§. **71.** Aus den erwähnten Formeln der §§. 68 und 69 erhält man durch Multiplication und Division:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2}{\cos\tfrac{1}{2}C^2} = \frac{\sin(s-b)^2}{\sin c^2} \quad \text{oder}$$

$$(\alpha)\quad \frac{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B}{\cos\tfrac{1}{2}C} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c};$$

und auf die nämliche Art:

$$(\beta)\ \frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c},\quad (\gamma)\ \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin s}{\sin c},$$

$$(\delta)\ \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}.$$

Die Gleichung (β) zu jener (α) addirt und davon subtrahirt gibt mit Rücksicht auf die Relation in §. 20:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A\pm B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(s-b)\pm\sin(s-a)}{\sin c},$$

oder, wenn man Summe und Unterschied des 2. Theils der Gleichung, nach §. 26, in Producte verwandelt, ferner für $\sin c$, $2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$ setzt und abkürzt (mit Rücksicht darauf, dass $2s=a+b+c$ ist):

$$(1)\ \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\ \text{und}$$

$$(2)\ \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Genau eben so gibt die Verbindung von $(\gamma)\pm(\delta)$ mit Rücksicht auf die Relationen in §§. 21 und 26:

$$(3)\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\ \text{und}$$

$$(4)\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

welche 4 Formeln gewöhnlich die Gaussischen heissen.

§. **72.** Dividirt man von diesen 4 Formeln (1) durch (4) und (2) durch (3), so erhält man, den Factor $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=1:\cot\frac{1}{2}C$ gleich in den 2. Theil der Gleichung gebracht:

$$\text{I. } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{II. } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

und wenn man auf diese beiden Relationen die Eigenschaft des Polardreieckes anwendet, wodurch (§. 67) $\frac{1}{2}(A+B)=180-\frac{1}{2}(a'+b')$, $\frac{1}{2}(A-B)=-\frac{1}{2}(a'-b')$, $\frac{1}{2}C=90-\frac{1}{2}c'$ und $\frac{1}{2}(a+b)=180-\frac{1}{2}(A'+B')$, $\frac{1}{2}(a-b)=-\frac{1}{2}(A'-B')$, $\frac{1}{2}c=90-\frac{1}{2}C'$ wird, nach Hinweglassung der Accente und der (mit Rücksicht auf §§. 11 und 13) ganz einfachen Reductionen:

III. $tang\,\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\,tang\,\frac{1}{2}c,$

IV. $tang\,\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\,tang\,\frac{1}{2}c,$

vier Formeln, welche unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannt sind.

Sechstes Capitel.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

a) Der rechtwinkeligen und Quadranten-Dreiecke.

§. **73.** Da die Summe der 3 Winkel eines sphärischen Dreieckes überhaupt zwischen 2 und 6 rechten Winkeln eingeschlossen ist, so kann ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck 1, 2 oder 3 rechte Winkel besitzen. Weil aber bei der 2. Gattung 2 Seiten Quadranten sind, und die 3. Seite das Mass des schiefen Winkels, also eines durch das andere gegeben ist, bei der letztern Gattung hingegen jede Seite ein Quadrant, also auch hier alles bekannt ist; so haben wir es hier bloss mit der erstern Art von rechtwinkeligen Dreiecken zu thun.

§. **74.** Man bezeichne nun wieder den rechten Winkel durch C, die beiden schiefen Winkel durch A und B, also die Hypotenuse durch c und die Catheten durch a und b; so können, da jede auflösende Gleichung 3 Stücke: die beiden gegebenen und das gesuchte enthalten muss, diese der Reihe nach sein:

$$BcA,\quad cAb,\quad Aba,\quad baB,\quad aBc,$$
$$acb,\quad BAa,\quad cbB,\quad Aac,\quad bBA,$$

so, dass also bei der Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke im Ganzen 10 Fälle, wovon jedoch (da der 4., 5., 9. und 10. Fall mit dem 3., 2., 8. und 7. identisch

ist, und durch blosse gehörige Vertauschung der Buchstaben entsteht) nur 6 wesentlich von einander verschieden sind, vorkommen. Man erhält diese 10 auflösende Gleichungen, ohne Rücksicht auf ihre Ordnung, ganz leicht auf folgende Weise.

§. **75.** Aus den Relationen in den §§. 66, 67, 70 hat man der Reihe nach, wegen $C = 90°$, also $\sin C = 1$ und $\cos C = 0$, sofort (1) $\cos c = \cos a \cos b$, (2) $\cos c = \cot A \cot B$ und $\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : 1$ oder

$$(3) \quad \sin a = \sin A \sin c, \quad \sin b = \sin B \sin c.$$

Setzt man diesen Werth von $\cos c$ aus (1) in die aus §. 66 folgende Formel

$$(\alpha) \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

so erhält man:

$$(\beta) \quad \cos A = \frac{\cos a (1 - \cos b^2)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a \sin b}{\sin c},$$

oder [(3)] wegen $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, auch

$$(4) \quad \cot A = \cot a \sin b, \text{ und analog } \cot B = \cot b \sin a.$$

Der aus (1) folgende Werth $\cos a = \cos c : \cos b$, in (α) substituirt, gibt

$$\cos A = \frac{\cos c (1 - \cos b^2)}{\sin b \cos b \sin c} = \frac{\cos c \sin b}{\cos b \sin c} \text{ oder}$$

$$(5) \quad \cos A = \tang b \cot c \text{ und } \cos B = \tang a \cot c.$$

Diese erstere Gleich. (5) mit jener [(3)] $\sin b = \sin B \sin c$ multiplicirt, gibt

$$\cos A = \frac{\sin B \cos c}{\cos b} = \frac{\sin B \cos a \cos b}{\cos b} \text{ [(1)] oder}$$

$$(6) \quad \cos A = \cos a \sin B \text{ und } \cos B = \cos b \sin A.$$

Anmerk. Diese Formeln (5) und (6) lassen sich auch ganz einfach aus jener (β) ableiten, wenn man beziehungsweise in diese $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$ [(1)] und $\sin b = \sin B \sin c$ [(3)] setzt und gehörig reducirt.

§. **76.** Diese 10 auflösenden Gleichungen lassen sich auch aus 2 sehr einfachen und leicht zu behaltenden Sätzen, den sogenannten Neper'schen Regeln ableiten. Berücksich-

tiget man nämlich, dass oben (§. 74) in den beiden horizontalen Gruppen von den 5 Stücken des Dreieckes: c, A, b, a, B (da der rechte Winkel C nicht vorkommt) jedes der Reihe nach Mittelstück ist, und die beiden übrigen in der ersten Reihe die diesem Stücke zunächst liegenden, welche wir anliegende, in der 2. Reihe aber die zweitfolgenden Stücke sind, welche wir Kürze halber die gegenüberliegenden nennen wollen, und schreibt man noch überall in diesen beiden Gruppen statt der Catheten a und b ihre Complemente $90 - a$ und $90 - b$; so bestehen diese beiden Regeln in Folgendem:

1. der Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Producte der Cotangenten der anliegenden Stücke;
2. der Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Producte des Sinus der gegenüberliegenden Stücke.

Anmerk. Die Richtigkeit dieser beiden, die sämmtliche Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke enthaltenden Regeln folgt daraus, weil durch ihre Anwendung auf die beiden obigen, alle hier möglichen Combinationen darstellenden Reihen (§. 74) die vorigen 10 Gleichungen erhalten werden. So erhält man aus der 1. Reihe nach der 1. Regel:

$$\cos c = \cot A \cot B \text{ [Gl. (2)]},$$
$$\cos A = \cot c \cot(90 - b) = \cot c \tan b \text{ [(5)] u. s. w.};$$

aus der 2. Reihe nach der 2. Regel:

$$\cos c = \sin(90 - a) \sin(90 - b) = \cos a \cos b \text{ [Gl. (1)]},$$
$$\cos A = \sin B \cos a \text{ [(6)]}, \quad \sin b = \sin c \sin B \text{ [(3)] u. s. w.}$$

Sind also z. B. die Cathete b und der anliegende Winkel A gegeben, und soll die andere Cathete a bestimmt werden; so wird man von diesen 3 Stücken jenes zum Mittelstück wählen, wodurch die beiden übrigen entweder anliegende oder gegenüberliegende Stücke werden, und dann im ersten Falle die 1., im letztern die 2. Regel anwenden. Man sieht hier sogleich, dass b als Mittelstück genommen, die beiden übrigen A und a anliegende Stücke werden; man hat daher nach der 1. dieser Neper'schen Regeln:

$$\cos(90 - b) = \cot A \cot(90 - a), \text{ d. i.}$$
$$\sin b = \cot A \tan a \text{ [Gl. (4)]},$$

und daraus: $\tan a = \tan A \sin b$, und so in allen übrigen Fällen.

§. **77**. Bei der Auflösung der sphärischen rechtwinkeligen Dreiecke kommt ebenfalls ein unbestimmter Fall vor, und es ist jener, in welchem eine Cathete und der gegenüberstehende Winkel, z. B. a und A gegeben sind; in diesem Falle hat man nämlich zur Bestimmung der Hypotenuse [Gl. (3)]: $sin\, c = \frac{sin\, a}{sin\, A}$, und da c aus dem Sinus gefunden wird, so gibt es (vergl. §. 57) für c zwei Werthe, also auch in diesem Falle 2 Dreiecke *). Um indess noch näher zu untersuchen, ob nicht in besondern Fällen c, also das Dreieck dennoch bestimmt sein kann, dienen folgende Betrachtungen.

§. **78**. Aus der Relation (4), §. 71, in welcher die Nenner $sin \frac{1}{2} C$ und (da für jedes aufzulösende Dreieck $c < 180^0$ ist) $cos \frac{1}{2} c$ immer positiv sind, folgt (was auch aus I., §. 72 hervorgeht), dass $cos \frac{1}{2} (A + B)$ und $cos \frac{1}{2} (a + b)$ immer einerlei Zeichen besitzen, also $A + B$ und $a + b$ von einerlei Art, d. i. für $A + B \gtreqless 180$ auch $a + b \gtreqless 180$ und umgekehrt sei; eine Eigenschaft, welche für jedes sphärische Dreieck überhaupt, also auch für das rechtw. gilt.

§. **79**. Für das rechtwinkelige Dreieck folgt insbesondere aus (4), §. 75: $sin\, b = tang\, a : tang\, A$, und da $sin\, b$ immer positiv ist, so haben auch $tang\, a$ und $tang\, A$ immer dasselbe Zeichen, oder es sind die Cathete und der gegenüberstehende Winkel immer von einerlei Art, d. h. es ist für $a \gtreqless 90$ zugleich auch $A \gtreqless 90$.

§. **80**. Ist nun, um auf unsern unbestimmten Fall (§. 77) zurück zu kommen, 1. $A = 90^0$, also $A + C = 180$, mithin

*) Man kann, wenn man will, auch die beiden übrigen Stücke b und B durch c ausdrücken, indem man [Gl. (1) und (5)] $cos\, b = \frac{cos\, c}{cos\, a}$ und $cos\, B = cot\, c\; tang\, a$ hat.

(§. 78) auch $a + c = 180$; so ist, wegen (§. 79) $a = 90$, sofort $c = 90$, also bestimmt (vergl. §. 73). Ist 2. $A < 90$, also $A + C < 180$, folglich (§. 78) auch $a + c < 180$; so ist, wegen (§. 79) $a < 90$, sofort $c \gtrless 90$ *), also unbestimmt, ausgenommen, es wäre der berechnete stumpfe Winkel $c \underset{>}{=} 180 - a$ (wodurch gegen die vorige Relation $a + c \underset{>}{=} 180$ ausfiele), dann müsste der spitze Winkel, d. i. $c < 90$ genommen werden, wodurch das Dreieck bestimmt wäre. Ist endlich 3. $A > 90$, also $A + C > 180$, folglich (§. 78) auch $a + c > 180$; so ist, wegen (§. 79) $a > 90$, sofort $c \gtrless 90$, also wieder unbestimmt, ausgenommen, es fiele der berechnete spitze Winkel $c \underset{<}{=} 180 - a$ aus (wodurch $a + c \underset{<}{=} 180$ würde), dann könnte nur der Werth $c > 90$ gelten, wodurch also auch das Dreieck bestimmt wäre.

Anmerk. Ausser diesem angeführten Falle sind, wie man leicht sieht, alle übrigen vollkommen bestimmt, indem die gesuchten Stücke durch die Tangente, Cotangente oder den Cosinus bestimmt werden. Der einzige Fall, wo noch der Sinus vorkömmt, ist jener, in welchem die Hypotenuse c und ein Winkel, z. B. A gegeben sind und die Cathete a gesucht wird; denn man hat dafür [(3)]: $\sin a = \sin A \sin c$, hier ist aber $a \lessgtr 90$ zu nehmen, je nachdem (§. 79) der gegebene Winkel $A \lessgtr 90$ ist.

Zur Uebung kann man von dem Dreiecke, in welchem $A = 23^\circ 27' 42''$, $B = 66^\circ 58'' 0''\cdot 8$, $a = 4^\circ 35' 26''\cdot 2$, $b = 10^\circ 39' 40''$ und $c = 11^\circ 35' 49''$ ist, abwechselnd 2 Stücke als bekannt annehmen und das 3. bestimmen.

Ein 2. Dreieck ist: $a = 27^\circ 48'$, $b = 69^\circ 9' 47''\cdot 9$, $c = 71^\circ 39' 37''$, $A = 29^\circ 25' 44''$ und $B = 79^\circ 56' 4''\cdot 2$.

§. 81. Ein Dreieck, in welchem eine Seite, z. B. $c = 90^\circ$ ist, heisst ein Quadranten-Dreieck, und da in dem entsprechenden Polardreiecke (§. 67) der Winkel

*) Fände man $c = 90^\circ$ (was für $a = A$ geschieht), so besässe das Dreieck 2 rechte Winkel ($C = B = 90$) und wäre (da auch $b = 90$ wird) vollkommen bestimmt.

$C' = 180 - c = 90$, das Dreieck also ein rechtwinkeliges ist; so kann dieses nach den obigen §§. aufgelöst werden, wodurch dann auch, wenn man wieder auf das ursprüngliche Dreieck zurückgeht, dieses letztere bestimmt ist. Wäre z. B. in einem solchen Dreiecke $c = 90^\circ$, ferner a und B gegeben; so wären es in dem bei C' rechtwinkeligen Polardreiecke die Stücke $A' = 180 - a$ und $b' = 180 - B$, welches sofort aufgelöst wieder die Stücke $b = 180 - B'$, $A = 180 - a'$ und $C = 180 - c'$ des Quadrantendreieckes gibt.

Zur Uebung kann das Dreieck dienen: $a = 32^\circ 57' 6''$, $b = 66^\circ 32'$, $c = 90^\circ$, $A = 23^\circ 49' 26''\cdot 5$, $B = 42^\circ 56' 12''\cdot 3$ und $C = 132^\circ 2' 44''\cdot 6$.

b) Der schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke.

§. **82**. Bei der Auflösung der schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke können die 3 bestimmenden Stücke sein: I. die 3 Seiten; II. die 3 Winkel (weil nämlich ihre Summe nicht wie im geradlinigen Dreiecke unveränderlich ist); III. 2 Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel; IV. 2 Winkel und die zwischen liegende Seite; V. 2 Seiten und ein gegenüber liegender Winkel; endlich VI. 2 Winkel und eine gegenüber liegende Seite.

§. **83**. I. Gegeben die 3 Seiten a, b, c. In diesem Falle findet man den Winkel A nach einer der Formeln (§. 68, 69) $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$ (wobei für $\frac{1}{2} A$ immer der spitze Winkel gilt) oder $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$, oder nach der aus diesen beiden durch Division entstehenden von $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$, welche Formeln zugleich die Anwendung der Logarithmen gestatten. Zur Berechnung der beiden übrigen Winkel B und C dienen die analogen, durch blosse Vertauschung der Buchstaben aus den eben genannten abgeleiteten Formeln.

Zur Uebung dieses und der folgenden Fälle kann das Dreieck dienen, in welchem $a = 50^\circ 54' 32''$, $b = 37^\circ 47' 18''$, $c = 74^\circ 51' 50''$, $A = 44^\circ 10' 40''\cdot 78$, $B = 33^\circ 22' 44''\cdot 86$ und $C = 119^\circ 55' 6''$ ist.

§. 84. II. Gegeben die 3 Winkel A, B, C. Zur Bestimmung der Seite a wird man am einfachsten auf die Formeln des vorhergehenden §. die Eigenschaft des Polardreieckes anwenden, indem sich dadurch die Seiten in Winkel und die Winkel in Seiten verwandeln. Man erhält nämlich, wenn $A' + B' + C' = 2S'$, also $A + B + C = 2S$ gesetzt wird, wegen $s = 270^0 - S'$, $s - a = 90 - (S' - A')$, $s - b = 90 - (S' - B')$, $s - c = 90 - (S' - C')$, $b = 180 - B'$ und $c = 180 - C'$, mit Hinweglassung der Accente:

$$sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{- cos\, S\, cos\, (S - A)}{sin\, B\, sin\, C}} \text{ und}$$

$$cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{cos\, (S - B)\, cos\, (S - C)}{sin\, B\, sin\, C}},$$

woraus auch ganz einfach (§§. 16, 23) die Formeln für $tang \tfrac{1}{2} a$ und $sin\, a$ folgen. Durch gehörige Verwechslung der Buchstaben erhält man auch die analogen Formeln zur Berechnung von b und c.

Anmerk. Da in jedem sphärischen Dreieck $A + B + C > 2R$ und $< 6R$, also $\tfrac{1}{2}(A + B + C)$, d. i. $S > R$ und $< 3R$ ist; so ist (§. 8) $cos\, S$ immer negativ. Da ferner $S - A = \tfrac{1}{2}(B + C - A)$, und im entsprechenden Polardreieck $b' + c' > a'$ oder (§. 67) $180 - B + 180 - C > 180 - A$, d. i. $\tfrac{1}{2}(B + C - A) < 90^0$ ist; so ist $cos\, (S - A)$ immer positiv [was auch für $cos\, (S - B)$ und $cos\, (S - C)$ gilt], also die obige Wurzelgrösse in $sin \tfrac{1}{2} a$ für jedes mögliche Dreieck reell.

§. 85. III. Gegeben 2 Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel, z. B. a, b, C. Um zuerst die beiden Winkel A und B zu bestimmen, wendet man die beiden Neper'schen Analogieen I. und II., §. 72, welche sich zugleich auch logarithmisch behandeln lassen, an, und berechnet nach der erstern $\tfrac{1}{2}(A + B) = s$, und nach der 2. $\tfrac{1}{2}(A - B) = d$; so hat man $A = s + d$ und $B = s - d$ (wäre $A < B$, so dürften nur A und B mit einander verwechselt werden). Sind die Winkel bestimmt, so findet man die 3. Seite c nach einer der Relationen (§. 70):

$$sin\, c = sin\, a\, sin\, C : sin\, A = sin\, b\, sin\, C : sin\, B.$$

§. 86. Um jedoch diese Seite c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu bestimmen, hat man aus §. 66:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

oder wenn man, um diese Formel für die Anwendung der Logarithmen einzurichten, im zweiten Theil der Gleichung $\sin a \sin b$ addirt und abzieht und gleich reducirt:

$$\cos c = \cos(a+b) + \sin a \sin b\,(1 + \cos C)$$
$$= \cos(a+b) + 2 \sin a \sin b \cos \tfrac{1}{2} C^2 \quad (§. 23),$$

und wenn man auch für $\cos c$ den Werth $1 - 2 \sin \frac{1}{2} c^2$ setzt und $2 \sin \frac{1}{2} c^2$ bestimmt:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} c^2 = 1 - \cos(a+b) - 2 \sin a \sin b \cos \tfrac{1}{2} C^2$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b)^2 - 2 \sin a \sin b \cos \tfrac{1}{2} C^2,$$

oder indem man $\frac{\sin a \sin b \cos \frac{1}{2} C^2}{\sin \frac{1}{2}(a+b)^2} = \cos \varphi^2$ setzt:

$$\sin \tfrac{1}{2} c^2 = \sin \tfrac{1}{2}(a+b)^2 (1 - \cos \varphi^2), \text{ d. i.}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \varphi.$$

Man wird also aus dieser Gleichung, auf die sich nun die Logarithmen anwenden lassen, die Seite c berechnen können, sobald man aus jener $\cos \varphi = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \sqrt{\sin a \sin b}$, die sich ebenfalls logarithmisch behandeln lässt, den Hilfswinkel φ bestimmt hat *).

Für das obige Dreieck (§. 83) findet man, wenn c auf die hier vorgetragene Weise gesucht wird, den Hilfswinkel

$$\varphi = 60^0\, 24'\, 13''\cdot 5.$$

§. 87. IV. Gegeben 2 Winkel und die zwischenliegende Seite, z. B. A, B, c. In diesem Falle erhält man die sämmtlichen nöthigen Formeln aus jenen des vorigen Falles, indem man auf diese das Polardreieck anwendet. So wird man zuerst wieder aus den beiden Analogien III. und IV., §. 72 (welche ebenfalls auch auf die erwähnte

*) Setzt man dagegen $\sin \varphi = \cos \frac{1}{2} C \sqrt{\sin a \sin b}$, so folgt (§. 28):

$$\sin \tfrac{1}{2} c^2 = \sin \tfrac{1}{2}(a+b)^2 - \sin \varphi^2$$
$$= \sin [\tfrac{1}{2}(a+b) + \varphi] \sin [\tfrac{1}{2}(a+b) - \varphi].$$

Nach dieser Art findet man für das obige Dreieck:

$$\varphi = 20^0\, 11'\, 46''\cdot 5.$$

Art aus I. und II. entstehen), die Seiten a und b, und dann nach einer der Relationen $sin\,C = \frac{sin\,c\,sin\,A}{sin\,a} = \frac{sin\,c\,sin\,B}{sin\,b}$ den 3. Winkel C, oder wenn man diesen durch die gegebenen Stücke unmittelbar (jedoch mittelst eines Hilfswinkels) ausdrücken will, aus der Formel $cos\,\tfrac{1}{2}\,C = sin\,\tfrac{1}{2}\,(A+B)\,sin\,\varphi$ bestimmen, nachdem man früher den Hilfswinkel φ aus der Gleichung $cos\,\varphi = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,c}{sin\,\frac{1}{2}\,(A+B)}\sqrt{sin\,A\,sin\,B}$ mit Hilfe der Logarithmen berechnet hat *).

Das obige Dreieck als Beispiel gewählt, findet man hier

$\varphi = 53^0\,3'\,51''\cdot 2.$

§. 88. V. Gegeben 2 Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, z. B. a, b, A. Hier bestimmt man zuerst den Winkel B aus der Gleichung

$$sin\,B = \frac{sin\,b\,sin\,A}{sin\,a}\ (\S.\ 70),$$

und dann nach der Relation (I., §. 72)

$$cot\,\tfrac{1}{2}\,C = tang\,\tfrac{1}{2}\,(A+B)\,\frac{cos\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{cos\,\frac{1}{2}\,(a-b)}$$

den Winkel C, so wie endlich mittelst dieses Winkels aus der Formel $sin\,c = \frac{sin\,a\,sin\,C}{sin\,A}$, oder ohne diesen aus jener (§. 72, III.) $tang\,\tfrac{1}{2}\,c = tang\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)\,\frac{cos\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{cos\,\frac{1}{2}\,(A-B)}$ die Seite c.

§. 89. Um aber auch C und c unmittelbar aus den gegebenen Stücken zu bestimmen, hat man (um eine Relation zwischen a, b, A, C zu erhalten) (§. 66):

$$cos\,A = (cos\,a - cos\,b\,cos\,c) : sin\,b\,sin\,c,$$

*) Oder man bestimmt den Hilfswinkel aus

$$sin\,\varphi = sin\,\tfrac{1}{2}\,c\,\sqrt{sin\,A\,sin\,B},$$

und dann C aus der Gleichung:

$$cos\,\tfrac{1}{2}\,C^2 = sin\,[\tfrac{1}{2}(A+B)+\varphi]\,sin\,[\tfrac{1}{2}(A+B)-\varphi]$$

(welche Relationen ebenfalls aus den beiden vorigen in der Note mit Hilfe des Polardreieckes folgen). Für das obige Dreieck erhält man auf diese Weise $\varphi = 22^0\,6'\,30''\cdot 93.$

oder wegen $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ (aus §. 66) auch:

$$\cos a - \cos b \cos c = \cos a (1 - \cos b^2) - \sin a \sin b \cos b \cos C,$$

also wenn man (da $1 - \cos b^2 = \sin b^2$ ist) durch $\sin b$ abkürzt:

$$\cos A = (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C) : \sin c,$$

oder endlich, wegen $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$, auch:

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C = \cot a \sin b;$$

um diese Formel für die Anwendung der Logarithmen geeignet zu machen, setze man (α) $\tang \varphi = \tang A \cos b$, so wird, wie leicht zu sehen: (β) $\sin (C + \varphi) = \tang b \cot a \sin \varphi$.

Ferner ist (zur Berechnung von c) aus der 1. der obigen Gleichungen: $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a$, oder für ($\alpha'$) $\tang \omega = \tang b \cos A$ auch:

$$(\beta') \quad \cos (c - \omega) = \frac{\cos a \cos \omega}{\cos b}.$$

Nachdem man also die Hilfswinkel φ und ω aus den Relationen (α), (α') besimmt hat, findet man C und c mittelst der Gleichungen (β) und (β').

Für unser Dreieck wird

$$\varphi = 37^\circ\, 31'\, 17''{\cdot}23 \quad \text{und} \quad \omega = 29^\circ\, 4'\, 37''{\cdot}12.$$

§. **90**. Da der Winkel B, von welchem auch die übrigen Stücke C und c abhängen, hier aus dem Sinus gefunden wird; so ist dieser Fall (wie jene in §§. 57, 77) ein unbestimmter, und es gibt hier wieder im Allgemeinen 2 Dreiecke, welche der Bedingung der Aufgabe entsprechen. Um die Fälle aufzufinden, in denen das Dreieck dennoch bestimmt ist, dienen wieder folgende Betrachtungen.

§. **91**. Ist α) $a + b = 180^\circ$, also auch (§. 78) $A + B = 180$; so ist 1. für $A = 90$ sofort $B = 90$, 2. für $A < 90$, ist $B > 90$, und 3. für $A > 90^\circ$, ist $B < 90$, also B immer bestimmt.

Ist β) $a + b < 180^\circ$, also auch $A + B < 180$; so ist 1. für $A = 90$ sofort $B < 90$, und 2. für $A > 90$ ebenfalls $B < 90$, also B in beiden Fällen bestimmt. Dagegen ist

3. für $A < 90^0$ sofort $B \gtrless 90$, also unbestimmt *); den Fall ausgenommen, in welchem 4. der durch Rechnung erhaltene stumpfe Winkel $B \overset{=}{>} 180 - A$ ausfiele (wodurch gegen die Voraussetzung $A + B \overset{=}{>} 180^0$ würde), wo dann nur der spitze W. $B < 90$ gelten kann, folglich B bestimmt ist, ein Fall, welcher immer für $b \overset{=}{<} a$ eintritt, weil dann auch $B \overset{=}{<} A$ sein muss.

Ist endlich γ) $a + b > 180^0$, also (§. 78) auch $A + B > 180^0$; so ist 1. für $A =$ und $< 90^0$ sofort $B > 90$, also bestimmt, dagegen 2. für $A > 90$ offenbar $B \gtrless 90^0$, also unbestimmt, den Fall ausgenommen, in welchem 3. der berechnete spitze Winkel $B \overset{=}{<} 180 - A$ ausfiele (wodurch gegen die Annahme $A + B \overset{=}{<} 180$ würde), wo dann nur der Werth $B > 90$ gelten kann, also B bestimmt ist, ein Fall, welcher immer eintritt für $b \overset{=}{>} a$, weil dann auch $B \overset{=}{>} A$ sein muss **).

*) Würde zufällig $B = 90^0$, so wäre das Dreieck rechtwinkelig und bestimmt.

**) Bekanntlich ist in diesem Falle (m. s. z. B. Legendre's Geometrie, übers. aus dem Französ. nach der 12. Original-Auflage, 2. Aufl. der Uebers. S. 404) das Dreieck bestimmt oder es gibt nur ein Dreieck, wenn

$$\begin{array}{lll} A < 90, & b < 90, & a > b \\ A < 90, & b > 90, & a + b > 180 \\ A > 90, & b < 90, & a + b < 180 \\ A > 90, & b > 90, & a < b; \end{array}$$

dagegen unbestimmt oder es gibt zwei Dreiecke oder zwei Auflösungen, wenn

$$\begin{array}{lll} A < 90, & b < 90, & a < b \\ A < 90, & b > 90, & a + b < 180 \\ A > 90, & b > 90, & a > b \\ A > 90, & b < 90, & a + b > 180. \end{array}$$

Nach einer andern Zusammenstellung hat man folgende Resultate:

Nimmt man in dem obigen Dreiecke (§. 83) die Stücke a, b, A als gegeben an, so findet man nur dieses genannte eine Dreieck; aber auch nach β) folgt, wegen $a+b<180$, $A<90$ und $b<a$, dass dieser Fall ein bestimmter ist.

- $A<90^\circ$
 - $b<90^\circ$
 - $a<b$ zwei Auflösungen
 - $a \geqq b$ eine Aufl., wenn nicht $a+b \geqq 180^\circ$
 - $a+b \geqq 180^\circ$ keine Aufl.
 - $b>90^\circ$
 - $a+b<180^\circ$ zwei Aufl.
 - $a+b \geqq 180^\circ$ eine Aufl., wenn nicht $a \geqq b$
 - $a \geqq b$ keine Aufl.
 - $b=90^\circ$
 - $a<b$ zwei Auflösungen
 - $a \geqq b$ keine Aufl.
- $A>90^\circ$
 - $b<90^\circ$
 - $a+b>180^\circ$ zwei Auflösungen
 - $a+b \leqq 180^\circ$ eine Aufl., wenn nicht $a \leqq b$
 - $a \leqq b$ keine Aufl.
 - $b>90^\circ$
 - $a>b$ zwei Auflösungen
 - $a \leqq b$ eine Aufl., wenn nicht $a+b \leqq 180^\circ$
 - $a+b \leqq 180^\circ$ keine Aufl.
 - $b=90^\circ$
 - $a>b$ zwei Auflösungen
 - $a \leqq b$ keine Aufl.
- $A=90^\circ$
 - $b<90^\circ$
 - $a>b$ eine Aufl., wenn nicht $a+b \geqq 180^\circ$
 - $a \leqq b$ keine Aufl.
 - $a+b \geqq 180^\circ$ keine Aufl.
 - $b>90^\circ$
 - $a<b$ eine Aufl., wenn nicht $a+b \leqq 180^\circ$
 - $a \geqq b$ keine Aufl.
 - $a+b \leqq 180^\circ$ keine Aufl.
 - $b=90^\circ$
 - $a=90^\circ$ unendlich viele Auflösungen
 - $a<$ oder $>90^\circ$ keine Aufl.

Das analoge Schema für den VI. Fall erhält man ganz einfach aus dem vorstehenden, wenn man die Eigenschaft des Polardreieckes anwendet und a, b, A in A, B, a, das Zeichen $>$ in jenes $<$ und umgekehrt umwandelt.

Dagegen erhält man für $a = 36^\circ\, 24'\, 12''$, $b = 52^\circ\, 7'\, 15''$ und $A = 40^\circ\, 45'\, 4''$ zwei Dreiecke, und zwar für das eine $c = 64^\circ 20'\, 19''$, $B = 60^\circ 14' 55''\cdot 4$, $C = 97^\circ 29' 54''\cdot 7$, und für das andere: $c = 24^\circ\, 8' 35''\cdot 8$, $B = 119^\circ 45' 4''\cdot 6$, $C = 26^\circ\, 44'\, 13''\cdot 4$.

§. **92.** VI. Gegeben 2 Winkel und eine gegenüber liegende Seite, z. B. A, B, a. Die hier nöthigen auflösenden Gleichungen werden wieder am einfachsten aus jenen des vorigen Falles erhalten, wenn man auf diese das Polardreieck anwendet. Man erhält nämlich der Reihe nach: $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ zur Bestimmung von b; $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b) \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$, oder auch, wenn man vorher den Hilfswinkel φ aus $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} a \cos B$ berechnet hat, aus $\sin(c - \varphi) = \operatorname{tang} B \cot A \sin \varphi$ unmittelbar die Seite c. Endlich findet man mit Hilfe von c aus $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$ oder auch aus $\cot \frac{1}{2} C = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B) \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}$, oder nachdem der Hilfswinkel ω nach der Gleichung $\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} B \cos a$ berechnet worden, unmittelbar aus der Relation

$$\cos[180 - (C + \omega)] = \frac{\cos A \cos \omega}{\cos B} \text{ den W. } C.$$

Für unser Beispiel wird hier

$\varphi = 45^\circ\, 47'\, 12''\cdot 87$ und $\omega = 22^\circ 33' 36''\cdot 71$.

§. **93.** Auch dieser Fall ist im Allgemeinen unbestimmt, so, dass der Aufgabe zwei Dreiecke entsprechen. Wiederholt man die im §. 91 durchgeführte Untersuchung, oder kürzer, wendet man auf alle Relationen dieses §. wieder das Polardreieck an; so findet man Folgendes: Das Dreieck ist bestimmt 1. für $A + B = 180^\circ$; dabei ist für $a >, =, < 90^\circ$ beziehungsweise $b <, =, > 90^\circ$. 2. für $A + B < 180^\circ$ und $a =$ oder $> 90^\circ$; dabei ist $b < 90$. 3. für $A + B > 180^\circ$ und $a =$ oder $< 90^\circ$; dabei ist $b > 90$. Dagegen ist das Dreieck unbestimmt: 1. für $A + B < 180^\circ$ und $a < 90^\circ$; dabei kann $b >$ oder < 90 sein, ausgenommen der stumpfe Winkel b fiele dadurch $=$ oder $> 180 - a$ aus, ein Fall, der immer eintritt, wenn bei der vorigen An-

nahme $B =$ oder $< A$ ist, in welchem Falle dann nur der spitze Winkel für b genommen werden darf, wodurch also b ebenfalls bestimmt ist. 2. für $A + B > 180$ und $a > 90$; dabei kann $b >$ oder < 90 sein, den Fall ausgenommen, in welchem dadurch der spitze Winkel $b =$ oder $< 180 - a$ (was wieder unzulässige Werthe wären) ausfiele (was für $B > A$ geschieht), wo dann nur $b > 90$ sein kann, also der Fall ein bestimmter ist.

Nimmt man wieder aus dem obigen Dreieck (§. 83) die 3 Stücke A, B, a als gegeben an, so findet man, dass dieser Fall ein bestimmter ist (wegen $A + B < 180$, $a < 90$ und $B < A$), mithin nur dieses eine Dreieck.

Dagegen findet man für $A = 40^0 45' 4''$, $B = 60^0 14' 55''\cdot 4$ und $a = 36^0 24' 12''$ (wegen $A + B < 180^0$, $a < 90$ und $B > A$) zwei Dreiecke, und zwar für das eine:

$$b = 52^0 7' 15'', \quad c = 64^0 20' 19'', \quad C = 97^0 29' 54''\cdot 7,$$

und für das andere:

$$b = 127^0 52' 45'', \quad c = 155^0 51' 24'' \text{ und } C = 153^0 15' 46''\cdot 6.$$

§. **94**. Zur Bestimmung der Fläche F eines sphärischen Dreieckes hat man zuerst, wenn die Winkel A, B, C desselben gegeben sind, dabei der rechte Winkel zur Einheit des Winkel-, und das Dreieck mit 3 rechten Winkeln (d. i. der 8. Theil der Kugelfläche) zur Einheit des Flächenmasses genommen wird, bekanntlich: (1) $F = A + B + C - 2$. Man erhält also daraus, wenn die Winkel in Gradmass gegeben sind, und der Kugelhalbmesser $= r$, folglich der 8. Theil der Kugelfläche $= \frac{1}{2} r^2 \pi$ ist, nach dem Sinne dieser Relation:

$$F : \tfrac{1}{2} r^2 \pi = (A + B + C - 180)^0 : 90^0 \text{ oder}$$

$$(2) \quad F = \left(\frac{A + B + C - 180}{180}\right) r^2 \pi.$$

§. **95**. Um F durch 2 Seiten a, b und den eingeschlossenen Winkel C auszudrücken, hat man aus der vorigen Gleichung (1), die Winkel in Gradmass ausgedrückt:

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) = 90 + \tfrac{1}{2} F, \text{ folglich}$$

$$tang\, \tfrac{1}{2}(A + B + C) = - cot\, \tfrac{1}{2} F$$

$$= \left[tang\, \tfrac{1}{2}(A + B) + tang\, \tfrac{1}{2} C\right] : \left[1 - tang\, \tfrac{1}{2}(A + B)\, tang\, \tfrac{1}{2} C\right]$$

(§. 22) oder, wenn man für $tang\, \frac{1}{2}(A + B)$ den Werth I., §. 72 substituirt, und die Brüche wegschafft:

$- \cot \frac{1}{2} F = [\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}(a+b) \tan \frac{1}{2} C^2] : [\cos \frac{1}{2}(a+b) - \cos \frac{1}{2}(a-b)] \tan \frac{1}{2} C = [\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b (1 + \tan \frac{1}{2} C^2) + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b (1 - \tan \frac{1}{2} C^2)] : - 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \tan \frac{1}{2} C$, oder nach einer einfachen Reduction (wobei für *tang*, der Quotient *sin* : *cos* gesetzt wird):

$$\cot \tfrac{1}{2} F = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}.$$

§. **96**. Um endlich noch F durch die 3 Seiten a, b, c auszudrücken, hat man aus dieser letzten Formel $1 + \cot \frac{1}{2} F^2$, das ist

$$(\alpha) \quad 1 : \sin \tfrac{1}{2} F^2$$
$$= [\cot \tfrac{1}{2} a^2 \cot \tfrac{1}{2} b^2 + 2 \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b \cos C + 1] : \sin C^2.$$

Drückt man in der Gleichung (§. 66)

$$\cos C = (\cos c - \cos a \cos b) : \sin a \sin b$$

die Sinus und Cosinus nach den Formeln

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} x^2$$

aus; so erhält man, beide Theile der Gleichung noch mit $2 \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$ multiplicirt:

$$(r) \quad 2 \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b \cos C = \frac{\sin \frac{1}{2} a^2 + \sin \frac{1}{2} b^2 - \sin \frac{1}{2} c^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2} - 2.$$

Es ist ferner

$$\cot \tfrac{1}{2} a^2 \cot \tfrac{1}{2} b^2 = \frac{(1 - \sin \frac{1}{2} a^2)(1 - \sin \frac{1}{2} b^2)}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2}$$
$$= \frac{1 - \sin \frac{1}{2} a^2 - \sin \frac{1}{2} b^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2} + 1,$$

daher, wenn man diesen und den vorigen Werth (r) oben in (α) substituirt:

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2} F^2} = \frac{\cos \frac{1}{2} c^2}{\sin \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{1}{2} b^2 \sin C^2} \text{ oder}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} F = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c} \sin C,$$

und wenn man endlich für $\sin C$ den Werth aus §. 70 setzt, und dabei $\sin a$ und $\sin b$ durch den halben Winkel ausdrückt:

$$(3) \quad \sin \tfrac{1}{2} F = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \text{*)}.$$

*) Zwar lassen sich auch noch in den drei übrigen Fällen Formeln ableiten, in welchen die Fläche F unmittelbar durch die 3 Bestim-

Für das obige hier durchgehends als Beispiel gewählte Dreieck (§. 83) ist der sphärische Excess in Graden ausgedrückt: $(A+B+C-180)^0 = 17^0{\cdot}47546$, folglich die Fläche für den Kugelhalbmesser r [§. 94, (2)]: $F = {\cdot}305004\, r^2$. Für die beiden Dreiecke des 2. Beispiels in §. 91 findet man auf den Kugelhalbmesser = 1 bezogen, für das erste: $F = {\cdot}32285$, und für das zweite: $F = {\cdot}12635$. Endlich hat man noch für jene beiden in §. 93 (2. Beisp.) angegebene Dreiecke, für das erste $F = {\cdot}32285$, und für das zweite: $F = 1{\cdot}29613$. und zwar in Quadratschuh, Quadratklafter u. s. w., je nachdem der Kugelhalbmesser gleich 1 Schuh, 1 Klafter u. s. w. ist.

Zur ferneren Uebung können noch die Dreiecke dienen, in welchen

$$a = 65^0\,15'\,26'',\quad b = 78^0\,44'\,37'',\quad c = 45^0\,54'\,56'',$$
$$A = 66^0\,20'\,17''{\cdot}4,\quad B = 98^0\,27,40'',\quad C = 46^0\,25'\,18''.$$
$$F = {\cdot}54491 \text{ und}$$
$$a = 40^0\,18'\,27'',\quad b = 72^0\,24'\,12'',\quad c = 51^0\,0'\,42'',$$
$$A = 39^0\,25'\,2''{\cdot}5,\quad B = 110^0\,40'\,7''{\cdot}6,\quad C = 49^0\,43'\,28''{\cdot}5,$$
$$F = {\cdot}34576 \text{ ist.}$$

mungsstücke ausgedrückt ist; allein diese Formeln werden so verwickelt, besonders wenn man sie für die Anwendung der Logarithmen einrichten will, dass es jedenfalls kürzer ist, entweder die Winkel oder die Seiten des Dreiecks zu bestimmen, und dann F respective nach der obigen Formel (2) (§. 94) oder nach der eben entwickelten (3) zu berechnen.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Functionen.

Erstes Capitel.

Von den Functionen im Allgemeinen.

Erklärungen.

§. 97. Behält eine Grösse während der Rechnung oder Entwickelung denselben Werth unverändert bei, so heisst sie beständig oder constant; im entgegengesetzten Falle wird diese Grösse veränderlich oder variabel genannt. Man bezeichnet die ersteren gewöhnlich durch die ersten, die letzteren durch die letzten Buchstaben des Alphabetes.

§. 98. Jede Grösse, deren Werth von dem Werthe einer andern Grösse auf irgend eine Weise abhängt, wird eine Function dieser letzteren genannt. Obschon aber nach dieser Erklärung der Werth eines jeden analytischen Ausdruckes von allen darin vorkommenden Grössen abhängt, so berücksichtiget man in der Regel doch nur die veränderlichen Grössen, und betrachtet einen solchen Ausdruck als Function dieser letztern. — Um die Abhängigkeit von diesen Variablen kurz anzuzeigen, setzt man denselben einen der Buchstaben: f, F, φ, ψ u. s. w. vor und bezeichnet z. B. die Ausdrücke $a + bx$, $\sqrt{ay - \sin y}$, $a + b^2 y - 2 \log y$ beziehungsweise durch $f(x)$ oder $F(x)$ u. s. w. $f(y)$ oder $F(y)$ etc. und $f(x, y)$ oder $F(x, y)$ u. s. w. Uebrigens wendet man in ein und derselben Entwickelung den nämlichen Buchstaben nur für solche Ausdrücke an, welche sich in nichts als den, die variable Grösse bezeichnenden Buchstaben unterscheiden. Bezeichnet man z. B.

die Relation $a + b^x - ab\sin x$ durch $\varphi(x)$, so versteht man in der nämlichen Entwickelung unter $\varphi(y)$ den Ausdruck: $a + b^y - ab\sin y$ *). Functionen, wie diese beiden, heissen ähnliche Functionen.

Anmerk. Häufig bedient man sich auch statt der Bezeichnung von $f(x)$, $F(y)$, $f(z)$ u. s. w. bloss der grossen gleichnamigen Buchstaben X, Y, Z.

§. 99. Bei Gleichungen, wie z. B. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = 2x - 3a + \log v$ u. s. f. schreibt man ebenfalls: $y = f(x)$, $z = F(x, v)$ etc., um auszudrücken, dass y eine Function von x, z eine Function von x und v u. s. w. sei. Die Grössen y und z (die Functionen), welche ebenfalls, obschon nicht unabhängig, variabel sind, werden abhängig oder relativ veränderliche Grössen genannt, während jene x, dann x und v unabhängig oder absolut variabel heissen **).

§. 100. Die im vorigen §. angeführten Functionen sind zugleich Beispiele von gesonderten oder entwickelten (expliciten) Functionen, weil y und z allein oder gesondert auf der einen Seite der Gleichung stehen. Ist hingegen bloss die Relation der Function mit den veränderlichen Grössen, von welcher sie abhängt, gegeben, ohne noch gehörig gesondert oder durch diese letztern bestimmt zu sein; so wird sie eine unentwickelte (implicite) Function genannt; so ist z. B. in dem Ausdrucke

$$y^2 - axy + bx^4 = 0.$$

y eine unentwickelte Function von x, so wie auch umgekehrt x eine eben solche Function von y; man bezeichnet

*) Bedeutung von $Ff(x)$, $ff(x)$ u. s. w.?

**) Bei der nähern Erörterung oder Discussion der Gleichung des Kreises $y = \sqrt{2ax - x^2}$ z. B. ist der Halbmesser a eine beständige, die Abscisse x die unabhängig variable, und y, welche von a und x, oder wenn die Untersuchung in einem und demselben Kreise geführt wird, also a nicht weiter in Betracht kommt, von x abhängt, die abhängig veränderliche Grösse oder die Function von x.

diess durch $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ u. s. w. In $y = log\, x$ ist y eine entwickelte Function von x, dagegen x eine unentwickelte Function von y.

§. **101.** Eine Function heist algebraisch, wenn sich bei den Verbindungen der constanten mit den veränderlichen Grössen auf diese letztern bloss algebraische Operationen (Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Potenzirung mit ganzen oder gebrochenen, jedoch constanten Exponenten) beziehen; im entgegengesetzten Falle wird die Function eine transcendente genannt, unter welchen die logarithmischen und Kreisfunctionen die wichtigsten sind. So sind $a + bx - \frac{c}{x^2}$, $a\sqrt{x} + x^3 \log a$ Beispiele von algebraischen, und $a - 2ba^x$, $1 - \log x$, $a + b \sin x$ Beispiele von transcendenten Functionen.

§. **102.** Eine algebraische Function heisst rational, wenn die variable Grösse, nach allen möglichen Reductionen, weder einen gebrochenen Exponenten besitzt, noch unter einem Wurzelzeichen vorkömmt; im Gegentheile wird sie irrational genannt. So ist von den Functionen

$$2 + 3ax - 4x^2\sqrt{a} \quad \text{und} \quad a - b\sqrt[3]{x}$$

die erstere rational, die letztere irrational.

§. **103.** Eine Function heisst ferner eine ganze Function, wenn die Variable weder als Nenner, noch mit einem negativen Exponenten erscheint; im entgegengesetzten Falle nennt man sie eine gebrochene. So sind die im vorigen §. angeführten Beispiele ganze, dagegen folgende: $2a = bx^{-1}$, $3ax - \frac{4 \log a}{x}$ gebrochene Functionen.

§. **104.** Die allgemeine Form einer ganzen, rationalen Function ist sonach: $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ *), so wie die einer gebrochenen, rationalen:

*) Wie lässt sich jede andere Function von der Form

$$Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots$$

auf diese zurückführen?

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots}{a + bx + cx^2 + \ldots}$$

wobei A, B, C, ..., a, b, c, ... von x unabhängige Coefficienten bezeichnen. Ist bei der erstern Function n der höchste Exponent, so sagt man sie sei vom n^{ten} Grad. Ist bei der letztern Function die höchste Potenz von x im Nenner grösser als jene im Zähler, so heisst die Function echt, im Gegentheile unecht gebrochen.

§. **105**. Eine Function zweier oder mehrerer Variablen heisst gleichartig oder homogen, wenn die Summe der Exponenten der veränderlichen Factoren (die sogenannte Dimension) in jedem einzelnen Gliede gleich gross ist; im entgegengesetzten Falle wird die Function ungleichartig oder heterogen genannt. So sind z. B.

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 \quad \text{und} \quad z = \frac{2x^3 - y^3 + 4x^2y}{2x - 3y}$$

homogene Functionen des 3. und 2. Grades, während jene

$$a - bx + cx^2 + dy^2 \quad \text{und} \quad \frac{1 - 2xy^2 + 3x^4}{x + 5y}$$

heterogene Functionen des 2. und 3. Grades sind.

§. **106**. Aus der vorigen Definition folgt auch, dass eine Function $f(x, y, z \ldots)$ homogen und vom m^{ten} Grade sei, wenn die Relation besteht:

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots),$$

wobei t eine willkürliche, etwa neue variable Grösse bezeichnet. So ist für das vorige 1. Beispiel, wenn man tx und ty statt x und y schreibt:

$$at^3x^3 + bt^2x^2ty + ctxt^2y^2 = t^3(ax^3 + bx^2y + cxy^2) = t^3z.$$

also z eine homogene Function des 3. Grades, wie vorhin.

§. **107**. Von zwei oder mehreren Functionen von den nämlichen Variablen sagt man, sie seien von einerlei Form, wenn die Exponenten der veränderlichen Grössen in allen Functionen nach demselben Gesetze fortschreiten.

So sind z. B. die beiden Functionen $ax + bx^3 + cx^5 + \ldots$ und $Ax + Bx^3 + Cx^5 + \ldots$, so wie auch jene:

$$ax + (bx^2 + cxy + dy^2) + \ldots \text{ und}$$
$$Ax + (Bx^2 + Cxy + Dy^2) + \ldots$$

von der nämlichen Form, und unterscheiden sich sofort bloss in der Verschiedenheit ihrer Coefficienten.

§. **108**. Eine Function heisst ein- oder vielförmig (vieldeutig), je nachdem ihr für jeden besondern Werth der veränderlichen Grösse nur ein oder mehrere Werthe zukommen; je nach der Anzahl dieser Werthe heisst sie 2, 3, ... nförmig. So ist z. B. y in $y = 2 - 3x + x^2$ eine einförmige, dagegen in $y = 2x \pm \sqrt{x - 1}$ eine zweiförmige Function von x.

Zusatz. Die höheren Gleichungen gehören sofort zu den vielförmigen Functionen.

§. **109**. Eine Function mehrerer Variablen heisst symmetrisch, wenn in ihr diese Grössen auf eine ganz gleiche Weise vorkommen, so, dass also die Function ungeändert bleibt, wenn man die veränderlichen Grössen unter einander beliebig vertauscht. So sind z. B. $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + y^3 + z^3 - \frac{xy}{z} - \frac{xz}{y} - \frac{yz}{x}$ symmetrische Functionen von x, y und x, y, z; so ist die Radicalgrösse ω in §. 70 eine symmetrische Function von den 3 Seiten a, b, c.

§. **110**. Aendert sich der Werth einer Function, während die veränderliche Grösse allmälig oder continuirlich zu- oder abnimmt, ebenfalls nur allmälig, d. i. so, dass sie alle Grade der Grösse von einem Werthe zum andern stetig durchläuft; so wird die Function continuirlich, im Gegentheile aber discontinuirlich genannt (eine weitere Definition dieser Functionen folgt im §. 145). So sind z. B. $a + bx$ und x^n für alle endlichen Werthe von x continuirliche, jene $\frac{a}{x}$, x^{-n} und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nur für $x \gtrless 0$ continuirliche, dagegen für $x = 0$ discontinuirliche Functio-

nen von x. Hieraus erhellet zugleich, dass eine Function innerhalb gewisser Grenzen continuirlich, dagegen ausserhalb derselben discontinuirlich sein kann.

§. **111**. Lehrsatz. Ist eine Function von der in §. 104 angegebenen Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, wobei A, B, C, ... von x unabhängige Coefficienten bezeichnen, für jeden Werth der Variablen x gleich Null; so ist auch jeder Coefficient für sich gleich Null.

Denn besteht die Gleichung (1) $A + Bx + Cx^2 + \ldots = 0$ für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$; so folgt dafür aus (1): $A = 0$ und $x(B + Cx + \ldots) = 0$. Dieser letztern Gleichung wird aber nicht bloss für $x = 0$, sondern (da diese Gleichung auch für jeden andern Werth von x bestehen muss) auch für $B + Cx + \ldots = 0$ Genüge geleistet, aus welcher Gleichung aber wieder, wie in (1) $B = 0$ und $x(C + Dx + \ldots) = 0$, d. i. $C + Dx + \ldots = 0$ folgt; daraus wird wieder für $x = 0$ sofort $C = 0$ u. s. w.

§. **112**. Zusatz. Sind 2 Functionen von derselben Form (§. 107) für alle Werthe der veränderlichen Grösse (oder Grössen) einander gleich, so sind auch die gleichnamigen, d. i. jene Coefficienten, die beiderseits zu denselben Potenzen, oder wenn es Functionen mehrerer Variablen sind, zu denselben Combinationen der veränderlichen Grössen gehören, einander gleich.

Denn ist z. B. $A + Bx + Cx^2 + \ldots = a + bx + cx^2 + \ldots$, so ist auch für jeden Werth von x: $(A - a) + (B - b)x + (C - c)x^2 + \ldots = 0$, also nach dem vorigen §. $A - a = 0$, $B - b = 0$, $C - c = 0$ u. s. w., d. i. $A = a$, $B = b$, $C = c$ etc. Eben so folgt auch aus der Gleichung $A_1 x + A_2 x^2 y + A_3 xy^2 + \ldots = a_1 x + a_2 x^2 y + a_3 xy^2 + \ldots$ sofort $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$, $A_3 = a_3$ u. s. w.

Anmerk. Dieser hier vorgetragene Lehrsatz, unter dem Namen des Satzes oder der Methode der unbestimmten Coefficienten bekannt, ist der fruchtbarste und wichtigste Satz für die gesammte höhere Analysis

§. 113. Lehrsatz. Werden 2 oder mehrere Functionen von der genannten Form: $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ *a*) zusammen addirt oder von einander abgezogen, *b*) zusammen multiplicirt, *c*) durch einander dividirt, oder wird eine solche Function *d*) zu was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenzen erhoben; so ist das Resultat immer wieder eine Function von der nämlichen (hier angeführten) Form.

a) Denn man erhält durch Addition und Subtraction der beiden Functionen $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ und $a + bx + cx^2 + \ldots$ sofort: $(A \pm a) + (B \pm b)x + (C \pm c)x^2 + \ldots$, ein Ergebniss, welches in der That dieselbe Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ besitzt.

b) Durch Multiplication dieser beiden Functionen erhält man: $Aa + (Ba + Ab)x + (Ca + Bb + Ac)x^2 + \ldots$, welches Product abermals von der besagten Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ ist *).

c) Die Einheit durch die Functionsreihe $a + bx + cx^2 + \ldots$ dividirt, gibt nach der Natur der Division einen Quotienten von der Form $p + qx + rx^2 + \ldots$ Nun ist aber

$$(A + Bx + Cx^2 + \ldots) : (a + bx + cx^2 + \ldots)$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + \ldots)\,[1 : (a + bx + cx^2 + \ldots)]$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + \ldots)\,(p + qx + rx^2 + \ldots),$$

also endlich wegen *b*) der Form nach $= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$

d) Für einen ganzen positiven Exponenten n folgt die Richtigkeit der Gleichung (m) $(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^n = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ unmittelbar aus *b*). Für einen negativen Exponenten hat man dann: $(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^{-n} = 1 : (A + Bx + Cx^2 + \ldots)^n = 1 : (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots) = p + qx + rx^2 + \ldots$ (*c*). Endlich ist, wenn man beide Theile der Gleichung (m) zur Potenz $\frac{m}{n}$ erhebt.

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)^{\frac{m}{n}}$$
$$= (A + Bx + Cx^2 + \ldots)^m = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

*) Man sieht leicht, dass sich der in *a*) und *b*) geführte Beweis auf jede beliebige Anzahl von Functionen, welche die nämliche Form besitzen, ausdehnen lässt.

weil nämlich m eine ganze Zahl ist; dabei kann auch m, folglich der Exponent $\frac{m}{n}$ negativ sein.

Zweites Capitel.

Allgemeine Gesetze für die Multiplication der Functionsreihen; polynomischer und binomischer Lehrsatz.

Multiplication der Functionsreihen.

§. **114**. Für die folgenden Entwickelungen soll die allgemeine Functionsreihe (§. 104) durch

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} + \ldots,$$

nämlich so bezeichnet werden, dass die dem Buchstaben A angehängten Zeiger 1, 2, 3, ... zugleich die Stelle anzeigen, die jeder Coefficient in der Reihe einnimmt. Diess vorausgesetzt, erhält man durch die Multiplication der beiden Functionsreihen

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} \ldots) \text{ und}$$
$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} \ldots)$$

ganz einfach das Product:

$$A_1 a_1 + \left.\begin{array}{c} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{c} A_3 a_1 \\ A_2 a_2 \\ A_1 a_3 \end{array}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{array}{c} A_n a_1 \\ A_{n-1} a_2 \\ A_{n-2} a_3 \\ \\ \ldots\ldots \\ A_2 a_{n-1} \\ A_1 a^n \end{array}\right\} x^{n-1} + \ldots,$$

in welchem sich hinsichtlich der Bildung der einzelnen Glieder folgende Gesetze aussprechen:

1. Die Summe der Zeiger der mit einander multiplicirten Coefficienten ist im 1. Gliede $= 2$, gleich der Anzahl der zusammen multiplicirten Functionsreihen.
2. In jedem folgenden Gliede wächst diese Summe um eine Einheit, und ist in den sämmtlichen Partialproducten,

die zusammen einen Coefficienten ausmachen, durchaus die nämliche; so ist diese im 2. Coefficienten durchaus $= 3$, im 3. $= 4$ u. s. w:, im n^{ten} Coefficienten $= n + 1$ $= 2 + (n - 1)$.

3. Jede dieser Summen erscheint so oft als möglich in 2 Theile zerlegt, wobei die Elemente jeder Complexion auch noch permutirt sind, so, dass also die Zeiger die 2. Classe der Variationen zu bestimmten Summen bilden.
4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte der auf einander folgenden Coefficienten correspondirt mit den Gliedern der Reihe: $1, 2, 3, \ldots n$, so, dass das 3. Glied aus 3, das n^{te} Glied aus n Theilen u. s. w. besteht.
5. Die Exponenten von x bilden dasselbe Gesetz wie in den ursprünglichen Reihen (§. 113, b).

Um also irgend ein, z. B. das fünfte Glied dieses Productes zu entwickeln, wird man die zweite Classe der Variationen zur Summe $2 + 5 - 1 = 6$, d. i. 51, 42, 33, 24, 15 bilden, in allen diesen Complexionen die ersten Zahlen links für die Zeiger von A, und die folgenden für jene von a (oder umgekehrt) gelten lassen, und sofort als 5tes Glied erhalten:

$$(A_5 a_1 + A_4 a_2 + A_3 a_3 + A_2 a_4 + A_1 a_5)\, x^4.$$

§. **115.** Wird das vorige Product noch mit der 3ten Functionsreihe $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots$ multiplicirt, so erhält man, mit Anwendung der eben ausgesprochenen Gesetze, für das Product der 3 Functionen $(A_1 + A_2 x + \ldots)\,(a_1 + a_2 x + \ldots)\,(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots)$ sofort:

$$A_1 a_1 \alpha_1 + \left.\begin{array}{l|l} A_2 a_1 & \\ A_1 a_2 & \alpha_1 \\ \hline A_1 a_1 & \alpha_2 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{l|l} A_3 a_1 & \\ A_2 a_2 & \alpha_1 \\ A_1 a_3 & \\ \hline A_2 a_1 & \\ A_1 a_2 & \alpha_2 \\ \hline A_1 a_1 & \alpha_3 \end{array}\right\} x^2 + \ldots$$

in welchem man wieder ohne Schwierigkeit (wenn man sich noch die angezeigten Multiplicationen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ausgeführt denkt) folgende, mit jenen des vorigen §. analoge, Gesetze erkennt:

1. Im 1. Gliede ist die Summe der Zeiger gleich der Anzahl der zusammen multiplicirten Functionsreihen ($= 3$).

2. Diese Summe nimmt in jedem folgenden Glied um Eins zu, ist also im 2. Glied $= 4$, im 3. $= 5$ u. s. w., im n^{ten} Glied $= n + 2 = 3 + (n - 1)$.

3. Jede dieser Summen erscheint so oft als möglich in 3 Theile zerlegt, oder es bilden, da auch alle Permutationen vorkommen, die Zeiger der einzelnen Coefficienten die 3. Variationsclasse zu den Summen 3, 4, 5 u. s. w.

4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte, aus welchen jeder der auf einander folgenden Coefficienten zusammengesetzt ist, wird durch die correspondirenden Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, ... $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, welche durch successives Summiren der Glieder der vorigen Reihe 1, 2, 3, ... n entsteht, ausgedrückt.

5. Die Exponenten von x befolgen wieder das ursprüngliche Gesetz.

Es kann demnach auch hier sehr leicht jedes Glied des Productes unabhängig von allen übrigen gebildet werden. So ist z. B. für das 5. Glied die Summe der Zeiger $= 3 + 5 - 1 = 7$, und für diese Summe die 3. Variationsclasse: 511, 421, 331, 241, 151, 412, 322, 232, 142, 313, 223, 133, 214, 124, 115, wobei die Anzahl der Theile oder Complexionen in der That auch mit dem correspondirenden 5. Glied 15 der hier geltenden Verificationsreihe (die uns hier vorläufig nur als ein mechanisches Hilfsmittel dienen soll): 1, 3, 6, 10, 15, 21 u. s. w. übereinstimmt.

Dieses fünfte Glied ist demnach:

$$(A_5 a_1 \alpha_1 + A_4 a_2 \alpha_1 + A_3 a_3 \alpha_1 + A_2 a_4 \alpha_1 + \ldots + A_1 a_2 \alpha_4 + A_1 a_1 \alpha_5)\, x^4$$

welches indess, in der Form der erstern Glieder des obigen Schemas dargestellt, für die Anwendung auf gegebene Zahlenbeispiele bequemer ist.

§. **116.** Wird das vorige Product abermals mit einer Functionsreihe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{A}_3 x^2 + \ldots$ multiplicirt; so erhält man für das Product von 4 solchen Reihen genau wieder die mit obigen analogen Gesetze: die Summe der Zeiger ist im n^{ten} Gliede $= 4 + (n - 1) = n + 3$; die Zeiger selbst bilden die 4. Variationsclasse zu dieser jedesmaligen Summe; die Anzahl der Theile in jedem einzelnen Coefficienten stimmt mit dem gleichnamigen Gliede der Verifica-

tionsreihe 1, 4, 10, 20, ... $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, die wieder auf dieselbe Weise aus jener des vorigen §. wie diese letztere aus der ihr vorausgehenden (§. 114), d. i. durch successives Summiren der Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, ... entsteht, überein.

§. **117.** Da sich nun diese Gesetze fortwährend wiederholen und für $m+1$ solcher Functionsreihen als giltig erweisen, wenn man sie für m Functionen als richtig annimmt; so kann jetzt ohne Schwierigkeit aus dem Producte jeder beliebigen Anzahl von dergleichen Functionsreihen jedes beliebige Glied gebildet werden.

Um dieses durch ein Beispiel nachzuweisen, wollen wir setzen, es sei aus dem Producte der 4 Functionen:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots, \quad 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 \ldots,$$
$$2 + 3x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots, \quad 3 - x - 3x^2 - 2x^3 - 4x^4 - \ldots$$

das 3. Glied zu bestimmen. Bildet man sonach die 4. Variationsclasse zur Summe $4+3-1=6$, so erhält man: 3111, 2211, 1311, 2121, 1221, 1131, 2112, 1212, 1122, 1113, also im Ganzen 10 Complexionen, welche Zahl auch in der That mit dem 3. Glied der hieher gehörigen Verificationsreihe 1, 4, 10, ... übereinstimmt. Lässt man ferner in diesen Complexionen die ersten Zahlen links für die Zeiger der Coefficienten der 1. Function, die folgenden für jene der Coefficienten in der 2. Function u. s. w. gelten, oder schreibt man, was für die Rechnung bequemer und kürzer ist, diesen Coefficienten, übereinstimmend mit der Darstellung in §§. 114 und 115, auf folgende Art:

$$[(31+22+13)1+(21+12)2+(11)3]1$$
$$+[(21+12)1+(11)2]2+[(11)1]3;$$

so erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction ganz einfach für das verlangte 3. Glied: $-13x^2$.

Anmerk. Sind die Functionsreihen von der Form

$$A_1 x^n + A_2 x^{n+m} + \ldots,$$

so darf man nur $x^m = y$ setzen, um diese wieder auf die hier vorausgesetzte Form zu bringen; denn man erhält dadurch:

$$y^{\frac{n}{m}}(A_1 + A_2 y + A_3 y^2 \ldots)$$

Polynomischer Lehrsatz.

§. **118.** Setzt man in der Entwickelung von §. 114 $a_1 = A_1$, $a_2 = A_2$, ... $a_n = A_n$; so erhält man nach einer einfachen Reduction für die 2. Potenz eines Polynoms:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^2 = A_1^2 + 2A_1A_2x$$
$$+ (2A_1A_3 + A_2^2)x^2 + (2A_1A_4 + 2A_2A_3)\,x^3 + \ldots,$$

wobei also wieder dieselben Gesetze wie im angeführten §., jedoch mit einiger Vereinfachung gelten. Um hier z. B. das 7. Glied ausser der Reihe zu entwickeln, wird man bloss die 2. Combinationsclasse zur Summe $2 + 7 - 1 = 8$ bilden, und jede Complexion (welche sofort die Zeiger des Buchstaben A geben) mit einer Zahl (welche den betreffenden Coefficienten liefert) versehen, welche anzeigt, wie oft sich die Elemente dieser Complexion permutiren lassen. Man erhält dadurch die 4 Complexionen: 71, 62, 53, 44, zu denen der Reihe nach die Permutationszahlen 2, 2, 2, 1 kommen, deren Summe 7 (welche an die Stelle der Summe der Partialproducte in §. 114 tritt) wieder mit dem 7. Glied der hieher gehörigen Verificationsreihe 1, 2, 3, ... übereinstimmt; es ist also das verlangte 7. Glied:

$$(2A_1A_7 + 2A_2A_6 + 2A_3A_5 + A_4^2)x^6.$$

§. **119**. Setzt man eben so in §. 115 $\alpha_1 = a_1 = A_1$, $\alpha_2 = a_2 = A_2$ u. s. f.; so erhält man für die 3. Potenz eines Polynoms:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^3 = A_1^3 + 3A_1^2A_2x$$
$$+ (3A_1^2A_3 + 3A_1A_2^2)x^2 + (3A_1^2A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2^3)x^3 + \ldots;$$

dabei bilden die Zeiger im 1., 2., ... n^{ten} Glied die 3. Combinationsclasse zur Summe 4, 5, ... $3 + n - 1 = n + 2$, und die Coefficienten die zugehörigen Permutationszahlen.

Um also hier z. B. das 6. Glied zu bilden, hat man als Summe der Zeiger: $3 + 6 - 1 = 8$, und dafür: 611, 521, 431, 422, 332, welchen Complexionen beziehungsweise die Permutationszahlen 3, 6, 6, 3, 3 (deren Summe 21 sofort wieder mit dem 6. Gliede der hieher gehörigen Verificationsreihe 1, 3, 6, 10, ... übereinstimmt) zukommen, so, dass man endlich für das 6. Glied den Ausdruck erhält:

$$(3A_1^2A_6 + 6A_1A_2A_5 + 6A_1A_3A_4 + 3A_2^2A_4 + 3A_2A_3^2)x^5.$$

§. **120**. Bildet man nun nach dem nämlichen Gesetze die n^{te} Potenz des Polynoms oder der Functionsreihe, indem man nach und nach die Zahlen n, $n + 1$, $n + 2$, ... als Summen der Zeiger im 1., 2., 3. Glied etc. so oft als

möglich in n Theile ohne Wiederholung zerlegt, jeder so gebildeten Complexion die zugehörige Permutationszahl beifügt, und endlich aus diesen Elementen auf die vorige Weise die Glieder zusammensetzt; so erhält man nachstehende, unter dem Namen des polynomischen Lehrsatzes bekannte Entwickelung:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^n$$
$$= A_1^n + nA_1^{n-1}A_2x + \left[nA_1^{n-1}A_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_2^2\right]x^2$$
$$+ \left[nA_1^{n-1}A_4 + n(n-1)A_1^{n-2}A_2A_3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}A_1^{n-3}A_2^3\right]x^3 + \ldots$$

welche nicht nur α) für jeden ganzen positiven, sondern auch β) für negative und γ) gebrochene Exponenten gilt, wie wir in den nächsten §§. erweisen werden.

§. **121.** α) Multiplicirt man beide Theile der vorigen Gleichung mit dem Polynom $A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots$, welches Kürze halber durch P bezeichnet werden soll; so erhält man ganz einfach:

$$P^{n+1} = A_1^{n+1} + (n+1)A_1^nA_2x$$
$$+ \left[(n+1)A_1^nA_3 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}A_1^{n-1}A_2^2\right]x^2 + \ldots,$$

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der vorigen Entwickelung (§. 120) hervorgeht, wenn man darin $n+1$ statt n schreibt: gilt demnach diese genannte Entwickelung für irgend einen ganzen, positiven Exponenten n, so gilt sie auch für den nächst folgenden um eine Einheit grössern $n+1$; da nun aber diese Entwickelung (§. 119) für $n=3$ gilt, so gilt sie auch für $3+1=4$, und da sie sonach für $n=4$ gilt, wieder für $4+1=5$ u. s. w., also allgemein für jeden ganzen, positiven Exponenten n.

§. **122.** β) Bezeichnet man Kürze halber die Coefficienten der Entwickelung §. 120 durch B_1, B_2, . . ., setzt nämlich $P^n = B_1 + B_2x + \ldots$; so ist

$$P^{-n} = 1 : P^n = 1 : (B_1 + B_2x + B_3x^2 + \ldots)$$
$$= T_1 + T_2x + T_3x^2 + \ldots \text{ (§. 113, } c\text{)},$$

wo also T_1, T_2, ... die zu bestimmenden Coefficienten sind. Multiplicirt man zu diesem Ende die letzte Gleichung mit dem Nenner oder Divisor $B_1 + B_2 x + \ldots$, so erhält man (§. 114):

$$1 = T_1 B_1 + (T_2 B_1 + T_1 B_2) x + (T_3 B_1 + T_2 B_2 + T_1 B_3) x^2 + \ldots,$$

und daraus nach §. 111 (oder 112), wenn man für B_1, B_2, ... die Werthe aus §. 120 herstellt:

$$T_1 B_1 = 1, \text{ also } T_1 = 1 : B_1 = 1 : A_1^n = A_1^{-n};$$

$$T_2 B_1 + T_1 B_2 = 0, \text{ also } T_2 = - T_1 B_2 : B_1 = - n A_1^{-n-1} A_2;$$

$$T_3 = (- T_2 B_2 - T_1 B_3) : B_1$$

$$= - n A_1^{-n-1} A_3 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} A_1^{-n-2} A_2^2 \text{ u. s. w.};$$

es ist also

$$P^{-n} = A_1^{-n} - n A_1^{-n-1} A_2 x + \left[- n A_1^{-n-1} A_3 + \frac{-n(-n-1)}{1 \cdot 2} A_1^{-n-2} A_2^2 \right] x^2 + \ldots,$$

woraus sofort folgt, dass die obige Entwickelung §. 120 auch für **negative** Exponenten gilt.

§. 123. γ) Sei endlich der Potenzexponent $= \frac{n}{m}$, wo n und m ganze Zahlen sein sollen; so hat man für $P^{\frac{n}{m}} = T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \ldots$ (§. 113, *d*), wenn die Gleichung zur m. Potenz erhoben wird:

$$P^n = (T_1 + T_2 x + T_3 x^2 + \ldots)^m, \text{ d. i. (§. 120):}$$

$$A_1^n + n A_1^{n-1} A_2 x + \ldots = T_1^m + m T_1^{m-1} T_2 x + \ldots$$

Aus dieser Gleichung folgt nach §. 112:

$$T_1^m = A_1^n \quad \text{oder} \quad T_1 = A_1^{\frac{n}{m}},$$

$$m T_1^{m-1} T_2 = n A_1^{n-1} A_2 \quad \text{oder} \quad T_2 = \frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_2 \text{ u. s. w.},$$

so, dass man also erhält:

$$P^{\frac{n}{m}} = A_1^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_2 x + \left[\frac{n}{m} A_1^{\frac{n}{m}-1} A_2 + \frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right)}{1 \cdot 2} A_1^{\frac{n}{m}-2} A_2^2 \right] x^2 + \ldots,$$

wodurch sofort der Beweis hergestellt ist, dass die besagte Entwickelung in §. 120 auch für **gebrochene** Exponenten, die übrigens (da, nach §. 122, n oder m auch negativ sein darf) positiv oder negativ sein können, gilt.

Anmerk. Diese Entwickelung (§. 120) oder der polynomische Lehrsatz gilt übrigens nicht bloss für rationale, sondern (wie wir im §. 131 sehen werden) auch für irrationale und selbst imaginäre Exponenten.

Zur Uebung entwickle man $(1 - 2x + x^2 - 3x^3)^4$ vollständig und von $(1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + x^8)^4$ das 7. Glied. Man erhält beziehungsweise:

$$1 - 8x + 28x^2 - 68x^3 + 142x^4 - 236x^5 + 322x^6 - 404x^7$$
$$+ 397x^8 - 336x^9 + 270x^{10} - 108x^{11} + 81x^{12} \text{ und } 1208x^{12}\,*).$$

Binomiseher Lehrsatz.

§. **124**. Aus der Entwickelung des §. 120 folgt als specieller Fall für $A_3 = A_4 = \text{etc.} = 0$, wenn man noch zur grössern Einfachheit $A_1 = a$ und $A_2 x = b$ setzt, die unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannte Entwickelung:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots,$$

welche also ebenfalls für ganze, gebrochene, positive und negative Werthe von n gilt.

Anmerkung. Der Kürze wegen werden wir in der Folge die Binomialcoefficienten, das ist $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, ... $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}$, der Reihe nach, durch $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... $\binom{n}{m}$ bezeichnen.

§. **125**. Von den Gesetzen, welche in dieser Entwickelung Statt finden, führen wir hier, als die für uns wichtigsten, nur folgende an: 1) für **ganze, positive** Exponenten n bricht die Reihe ab und schliesst mit dem $n + 1$ Glied. 2) In diesem Falle besitzen je 2 von den beiden

*) Man sehe I. S. 28.

äussern gleich weit abstehende Glieder einerlei Coefficienten und die Exponenten von a und b sind bloss mit einander verwechselt. 3) Für negative und gebrochene Exponenten n geht die Reihe oder Entwickelung ohne Ende fort.

Denn das Abbrechen der genannten Reihe hängt offenbar bloss von dem Nullwerden eines der Schlussfactoren $n-1$, $n-2$, $n-3$ u. s. w. ab; setzt man daher den Schlussfactor des $m+2$. Gliedes, d. i. $n-m$ Null, so hat man als Bedingungsgleichung für das Abbrechen der obigen Reihe: $n-m=0$, und daraus $m=n$, so, dass also (da m seiner Natur nach nur ganz und positiv sein kann) für ganze, positive Werthe von n, das $m+2.=n+2$. Glied zuerst verschwindet, und sonach (da dieser Factor $n-m$ nun auch in allen folgenden Gliedern erscheint) die Reihe mit dem $n+1$. Gliede abbricht; dagegen für negative oder gebrochene Werthe von n, wofür diese Bedingungsgleichung $n-m=0$ gar nicht bestehen kann, die Reihe ohne Ende fortläuft.

Ferner ist das $m+1$. Glied vom ersten gezählt

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}\,a^{n-m}b^{m},$$

und das $m+1$. Glied vom letzten gezählt, welches sofort vom ersten an gerechnet, das $n-m+1$. bildet

$$=\frac{n(n-1)\ldots(m+2)(m+1)}{1\,.\,2\ldots(n-m-1)(n-m)}\,a^{m}b^{n-m}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(m+2)(m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m\quad(m+1)\quad(m+2)\,.\,.\,.\,(n-m-1)(n-m)}\,a^{m}b^{n-m}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}\,a^{m}b^{n-m}$$

wodurch auch das zweite Gesetz bewiesen ist.

§. **126**. Für einen ganzen positiven Exponenten n folgt also nach dem vorigen §.:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots$$
$$+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\binom{n}{1}ab^{n-1}+b^n,$$

oder, wenn man in dieser Reihe das 1. und letzte, 2. und vorletzte Glied u. s. w. zusammennimmt, auch:

$$(1)\quad (a+b)^n=(a^n+b^n)+\binom{n}{1}ab(a^{n-2}+b^{n-2})$$
$$+\binom{n}{2}a^2b^2(a^{n-4}+b^{n-4})+\binom{n}{3}a^3b^3(a^{n-6}+b^{n-6})+\ldots$$

dabei ist, wie man aus dem allgemeinen Gliede

$$\binom{n}{m} a^m b^m (a^{n-2m} + b^{n-2m})$$

findet, das letzte Glied, für n gerad (da man $m = \frac{n}{2}$ setzen und von dem Resultat die Hälfte nehmen muss):

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

und für n ungerad (indem man $m = \frac{n-1}{2}$ zu setzen hat):

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} (a+b).$$

§. **127**. Wir wollen nun in dieser Entwickelung $a + b = y$ setzen, und sofort auch die Binome des zweiten Theils: $a^n + b^n$, $a^{n-2} + b^{n-2} \ldots$, durch y auszudrücken suchen, dabei aber, um nur mehr den Gang der Rechnung anzuzeigen, nie weiter als bis zu dem Binome $a^{n-6} + b^{n-6}$ gehen, und sonach die folgenden $a^{n-8} + b^{n-8}$ u. s. w. auslassen. Diess vorausgesetzt, setze man, da die spätern Binome zuerst bestimmt werden müssen, in der genannten Entwickelung (1) $n - 6$ statt n; so erhält man:

$$y^{n-6} = a^{n-6} + b^{n-6}$$

(wo man stehen bleiben muss, indem im folgenden Gliede schon das Binom $a^{n-8} + b^{n-8}$ vorkäme), wodurch nun schon das Binom $a^{n-6} + b^{n-6}$, welches das letzte in unserer Reihe bilden soll, bestimmt ist.

Setzt man ferner in (1) $n - 4$ statt n, so erhält man:

$$y^{n-4} = (a^{n-4} + b^{n-4}) + (n-4)\,ab\,(a^{n-6} + b^{n-6}),$$

und daraus, wenn gleich für das letzte Binom der eben gefundene Werth substituirt wird:

$$a^{n-4} + b^{n-4} = y^{n-4} - (n-4)\,aby^{n-6}.$$

Eben so folgt, wenn oben $n - 2$ statt n gesetzt wird:

$$y^{n-2} = (a^{n-2} + b^{n-2}) + (n-2)\,ab\,(a^{n-4} + b^{n-4}) \\ + \frac{(n-2)(n-3)}{1\;.\;2}\,a^2 b^2 (a^{n-6} + b^{n-6}),$$

und daraus erhält man, nach gehöriger Substitution der bereits gefundenen Werthe und der einfachen Reduction:

$$a^{n-2} + b^{n-2} = y^{n-2} - (n-2)\,ab\,y^{n-4} \\ + \frac{(n-2)(n-5)}{1\;.\;2}\,a^2 b^2 y^{n-6}.$$

Lässt man endlich in (1) n ungeändert, bestimmt daraus $a^n + b^n$, indem man für die bereits durch y ausgedrückten Binome substituirt; so erhält man, wenn man zugleich die Entwickelung so weit hersetzt, wie sie erhalten wird, wenn man nicht mit dem Binome $a^{n-6} + b^{n-6}$, sondern erst mit jenem $a^{n-10} + b^{n-10}$ überall abbricht *):

$$(\alpha) \quad a^n + b^n = y^n - naby^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\;.\;2}\,a^2 b^2 y^{n-4} \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\;.\;2\;.\;3}\,a^3 b^3 y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}\,a^4 b^4 y^{n-8} \\ - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}\,a^5 b^5 y^{n-10} + \ldots,$$

wobei also $a + b = y$ und n eine ganze, positive Zahl ist. Aus den leicht (nach jenen in §. 126) zu bildenden letzten Gliedern folgt, dass diese Reihe immer nur so weit fortgesetzt werden darf, bis y den Exponenten 0 oder 1 erhält (die Entwickelung hat nämlich, je nachdem n gerad oder ungerad ist, $\frac{n}{2} + 1$ oder $\frac{n+1}{2}$ Glieder).

§. **128**. Aus der Ableitungsart (§. 124) folgt, dass das Binomialtheorem für jeden rationalen Exponenten Giltigkeit habe; um dieses aber auch, des künftigen Gebrauches willen, für irrationale, ja selbst imaginäre Exponenten zu erweisen, behandeln wir in der nachstehenden

*) Eine dem Anfänger, der dankbaren Reductionen wegen, sehr empfehlenswerthe Uebung.

directen Ableitung dieses Satzes, den Exponenten vollkommen als variable Grösse.

§. **129**. Man setze (1) $(1+x)^y = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$, wobei A_1, A_2, ... von x unabhängige Coefficienten, also offenbar gewisse (eben zu bestimmende) Functionen vom Exponenten y sind. Lässt man x um die ganz willkürliche Grösse z zunehmen, so erhält man auch:

$$(2)\quad (1+x+z)^y = 1 + A_1(x+z) + A_2(x+z)^2 + \dots + A_n(x+z)^n + \dots$$

Setzt man ferner in (1) $\frac{x}{z}$ statt x, so folgt, wenn man gleich durchaus mit dem Nenner z^y multiplicirt und hierauf z in $z+1$ übergehen lässt:

$$(3)\quad (1+z+x)^y = (1+z)^y + A_1(1+z)^{y-1}x + A_2(1+z)^{y-2}x^2 + \dots + A_n(1+z)^{y-n}x^n + \dots$$

Aus (1) folgt aber, da A_1, A_2, ... nur vom Exponenten abhängen: $(1+z)^y = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$, $(1+z)^{y-1} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$, $(1+z)^{y-2} = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$ etc., $(1+z)^{y-n-1} = 1 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots$, $(1+z)^{y-n} = 1 + N_1 z + N_2 z^2 + \dots$, so, dass man also die Coefficienten B_1, C_1, ... N_1 aus A_1, jene B_2, C_2, ... N_2 aus A_2 u. s. w. erhält, indem man beziehungsweise in A_1, A_2, ... A_n (als Functionen von y) der Reihe nach $y-1$, $y-2$, ... $y-n$ setzt. Werden diese Werthe in (3) substituirt, hierauf die Entwickelungen (2) und (3) (als identische Ausdrücke) einander gleichgesetzt, und zugleich in (2) von den Potenzen (die man, weil die Exponenten ganze Zahlen sind, als bekannt voraussetzen darf) nur überall die beiden ersten Glieder, als für unsern Zweck hinreichend, entwickelt; so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \\
&+ A_1 z + 2A_2 xz + 3A_3 x^2 z + \dots + nA_n x^{n-1} z + \dots \\
&= 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_1 x(1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots) \\
&+ A_2 x^2 (1 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots) + \dots \\
&\qquad + A_{n-1} x^{n-1} (1 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots),
\end{aligned}$$

und daraus, nach §. 112 (da A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... etc.

von x und z unabhängig sind): $2A_2 = A_1 B_1$, $3A_3 = A_2 C_1$ u. s. w., $nA_n = A_{n-1} M_1$, woraus man der Reihe nach

$$A_2 = \frac{A_1 B_1}{1 \cdot 2}, \quad A_3 = \frac{A_1 B_1 C_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc.,}$$

und dieses Gesetz für A_{n-1} als giltig angenommen, also

$$A_{n-1} = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$$

gesetzt, aus der letzten Gleichung:

$$A_n = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1 M_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

(wodurch die Allgemeingiltigkeit dieses Gesetzes erwiesen ist) erhält. — Nach dem, was vorhin über die Bildung der Coefficienten B_1, C_1, ... M_1 bemerkt worden, würden also die sämmtlichen Coefficienten A_2, A_3, ... A_n gefunden sein, wenn jener A_1 bekannt wäre.

§. **130**. Um aber diesen ersten Coefficienten A_1, von welchem alle folgenden abhängen, zu bestimmen, setze man (da er irgend eine Function vom Exponenten y sein muss), $A_1 = \varphi(y)$; so ist (§. 129) $(1+x)^y = 1 + x\varphi(y) + \ldots$ und eben so: $(1+x)^z = 1 + x\varphi(z) + \ldots$, $(1+x)^{y+z} = 1 + x\varphi(y+z) + \ldots$ Nun ist aber auch $(1+x)^{y+z} = (1+x)^y (1+x)^z$, also, wenn man substituirt:

$$\begin{aligned} 1 + x\varphi(y+z) + \ldots &= [1 + x\varphi(y) + \ldots]\,[1 + x\varphi(z) + \ldots] \\ &= 1 + x[\varphi(y) + \varphi(z)] + \ldots; \end{aligned}$$

daraus folgt (§. 112): $\varphi(y+z) = \varphi(y) + \varphi(z)$. Diese Relation gibt für $z = y$: $\varphi(2y) = 2\varphi(y)$, für $z = 2y$: $\varphi(3y) = \varphi(y) + \varphi(2y) = 3\varphi(y)$, und so allgemein: $\varphi(ny) = n\varphi(y)$ oder $\frac{\varphi(ny)}{ny} = \frac{\varphi(y)}{y}$; die Function $\varphi(y)$ ist demnach so beschaffen, dass der Quotient $\varphi(y) : y$ ungeändert bleibt, wenn man statt y irgend ein Vielfaches von y setzt; diese ist also nothwendig von der Form Ay, wo A eine constante Grösse bezeichnet. Man hat demnach $(1+x)^y = 1 + Ay \cdot x + \ldots$, und da es gleichgiltig ist, bei welchem Werth von y die davon unabhängige Grösse A be-

stimmt wird, so setze man $y=1$; dadurch erhält man: $1+x=1+Ax+\ldots$, so, dass also (§. 112) $A=1$, folglich $A_1=\varphi(y)=Ay=y$ wird. Mit diesem Werthe von $A_1=y$ hat man daher (§. 129) $B_1=y-1$, $C_1=y-2,\ldots$ $M_1=y-(n-1)$, $N_1=y-n$ u. s. w., also, wenn man diese Werthe in die obigen Ausdrücke von A_2, $A_3,\ldots A_n$, so wie dann diese Coefficienten in der Reihe (1) substituirt:

$$(\beta)\ (1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}x^n+\ldots,$$

in welcher Entwickelung nun der Exponent durchaus jeden (sowohl reellen als imaginären) Werth haben kann.

§. **131**. Zusatz. Man kann jetzt auch der Entwickelung in §. 120 oder dem polynomischen Lehrsatze dieselbe Allgemeinheit hinsichtlich des Exponenten verschaffen, wenn man $A_2x+A_3x^2+\ldots=B$ setzt, wodurch die Entwickelung des Polynoms P^y in jene des Binoms

$$(A_1+B)^y=A_1^y+yA_1^{y-1}B+\frac{y(y-1)}{1\,.\,2}A_1^{y-2}B^2+\ldots$$

übergeht, hierauf die Potenzen B^2, B^3, ... nach §§. 118, 119 etc. (oder §. 120, wo n nur ganze Werthe erhält), entwickelt und die erhaltenen Resultate gehörig substituirt. Man erhält dadurch, übereinstimmend mit §. 120:

$$P^y=A_1^y+yA_1^{y-1}A_2x+[yA_1^{y-1}A_3+\frac{y(y-1)}{1\,.\,2}A_1^{y-2}A_2^2]x^2+\ldots$$

wobei aber nun diese Entwickelung für jeden Exponenten gilt.

Drittes Capitel.

Von den Grenzen der Functionen; dem unendlich Grossen und Kleinen.

Erklärungen.

§. 132. Nähert sich bei der steten Zu- oder Abnahme der veränderlichen Grösse die davon abhängige Function immer mehr und mehr einer bestimmten Grösse, ohne diese jemals überschreiten zu können; so wird diese letztere Grösse Grenze *(limes)* der Function genannt.

So ist z. B., wenn x fortwährend wächst, a die Grenze der Function $y = a \pm \frac{b}{x}$ (was man kurz durch $lim. y = a$ zu bezeichnen pflegt); die Einheit die Grenze der Summe der unendlichen Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 - \frac{1}{2^x}$; der Kreisumfang die Grenze der demselben ein- und umgeschriebenen regelmässigen Vielecke, bei fortwährender Zunahme der Seitenzahl u. s. w. Eben so ist bei der steten Abnahme des numerischen Werthes von x, 1 die Grenze der Function $y = \frac{a}{a \pm x}$, welche Grenze sie überdiess für $x = 0$ vollkommen erreicht.

§. 133. Von einer wachsenden Grösse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte, über alle angebbaren Grenzen hinaus zunimmt, sagt man, sie werde unendlich, oder ihre Grenze, die man dann durch ∞ bezeichnet, sei das unendlich Grosse. Will man anzeigen, dass u bereits grösser als jede angebbare Zahl geworden sei; so schreibt man: $u = \infty$. (Da jedoch das Unendliche nie im Sein, sondern nur im Werden besteht, so schreibt man auch $lim. u = \infty$).

So würde z. B. in der ohne Ende fortlaufenden Reihe: 1, 2, 3, 4, . . . eines der spätesten oder letzten Glieder $u = \infty$ sein.

Eine Grösse kann beständig, d. i. ohne Ende zunehmen; und gleichwohl nicht unendlich werden, sondern an eine bestimmte endliche Grenze gebunden sein, wie im obigen Beispiele (voriger §.) die

Function $y = a - \frac{b}{x}$ bei der fortwährenden Zunahme von x, oder wie der Umfang und die Fläche eines im Kreise beschriebenen regelmässigen Vieleckes ohne Ende mit der Seitenzahl zunehmen, ohne dass sie jedoch jemals grösser als der Umfang und die Fläche des Kreises werden können. Man hat daher ein Wachsen ohne Ende, von einem Wachsen oder Zunehmen bis ins Unendliche zu unterscheiden.

§. **134.** Von einer Grösse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte abnimmt und dabei kleiner werden kann als jede noch so kleine angebbare Grösse, sagt man, sie werde unendlich klein oder habe die Null zur Grenze. — Ist a eine endliche, u eine bis ins Unendliche wachsende Grösse; so kann jede unendlich klein werdende Grösse durch $\omega = \frac{a}{u}$ dargestellt werden. Stellt man sich vor, dass u ihre (fingirte) Grenze ∞ im Zunehmen erreicht hat; so ist auch ω mit ihrer Grenze 0 zusammengefallen und man hat $0 = \frac{a}{\infty}$. (Da auch das unendlich Kleine nur im Werden existirt, so schreibt man wieder $lim. \omega = 0$).

So sind z. B. die letzten Glieder der unendlichen Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ unendlich klein und von Null nicht mehr zu unterscheiden.

Eine Grösse kann ebenfalls ohne Ende abnehmen, ohne desshalb unendlich klein zu werden, wie z. B. bei der unendlichen Zunahme von x, die obige Function $y = a + \frac{b}{x}$, nicht kleiner als a, der Umfang oder die Fläche eines einem Kreise umschriebenen regelmässigen Polygons, bei der fortwährenden Zunahme der Seitenzahl, nicht kleiner als der Umfang oder die Fläche des Kreises werden kann u. s. w.

Analog mit der hier für die unendlich klein werdende Grösse ω angeführte Bezeichnung lässt sich eine unendlich gross werdende Grösse auch durch $u = \frac{a}{\omega}$ darstellen, und es wird u ihre Grenze im Zunehmen erreicht haben, wenn ω die ihrige im Abnehmen erreicht hat, so, dass $\infty = \frac{a}{0}$ ist.

§. **135.** Da bei der unendlichen Zunahme von u nichts destoweniger das geometrische Verhältniss $u : u^2$ jenem von $1 : u$ ungeändert gleich bleibt, so wird auch, wie u gegen

1, so u^2 gegen u unendlich zunehmen, und für $u = \infty$, sofort ∞^2 gegen ∞ selbst wieder unendlich gross sein. Aus diesem Grunde heisst auch ∞^2 das Unendliche der zweiten Ordnung, während jenes einfache ∞ auch das der ersten Ordnung genannt wird. Aus gleichem Grunde heissen ∞^3, ∞^4, ... ∞^n beziehungsweise unendliche Grössen der 3., 4., ... n. Ordnung.

Obschon also bei dem unendlichen Wachsen von u die Grössen u, u^n, a^u, $log\, u$ u. s. w. durchweg Unendlich werden; so können sie dennoch von verschiedenen Ordnungen sein, und selbst noch für $u = \infty$ eine Vergleichung unter einander gestatten.

§. 136. Da eben so für die unendlich klein werdende Grösse ω fortwährend $\omega : \omega^2 = 1 : \omega$ bleibt, so wird, wie ω gegen 1, so ω^2 gegen ω selbst wieder unendlich klein, und man nennt desshalb auch ω^2 das unendlich Kleine der zweiten Ordnung, so wie aus gleichem Grunde ω^3, ω^4, ... ω^n unendlich kleine Grössen der 3., 4., ... n. Ordnung heissen.

Lehrsätze.

§. 137. Aus den über das unendlich Grosse (§§. 133, 135) gegebenen Erklärungen folgen unmittelbar folgende Lehrsätze:

§. 138. Eine unendlich werdende, oder kürzer, eine unendliche Grösse wird nicht geändert, wenn man eine endliche Grösse hinzuaddirt oder davon abzieht.

Denn es ist, wenn a eine endliche, u eine unendlich werdende Grösse bezeichnet, offenbar $u + a = u$; indem ja schon in dem Begriffe des Unendlichwerdens von u, jede gedenkbare Zunahme liegt, also durch $u + a$ nichts ausgedrückt wird, was nicht schon u an und für sich bezeichnet. Ist aber $u + a = u$, so ist auch (beiderseits a abgezogen) $u = u - a$, also überhaupt: $u \pm a = u$, oder, auf die Grenzen übergehend: $\infty \pm a = \infty$ [oder auch $lim. (u \pm a) = \infty$].

§. 139. Eine unendliche Grösse höherer Ordnung wird durch Addition oder Subtraction einer unendlichen Grösse niederer Ordnung weder vermehrt noch vermindert. (Oder die Grenze einer unendlichen Grösse höherer Ordnung wird

nicht geändert, wenn zu dieser Grösse eine unendliche Grösse von niederer Ordnung addirt oder davon subtrahirt wird.)

Denn für $A = au^n$ und $B = bu^{n-m}$, wo also A (bei unendlicher Zunahme von u) eine unendliche Grösse von höherer Ordnung als B ist, hat man $A \pm B = u^{n-m}(au^m \pm b) = u^{n-m}.au^m$ (zufolge des vorigen §) $= au^n = A$, oder auch, auf die Grenzen übergehend: $a\infty^n \pm b\infty^{n-m} = a\infty^n$ [d. i. $lim. (A \pm B) = lim. . A$ *)].

*) Sind ω und ω' verschwindende oder unendlich klein werdende Grössen, so erhält man für die Grenzrechnung folgende Hauptsätze:

Aus $x = a \pm \omega$ folgt $a = lim. x$ und daher ist auch $x = lim. x \pm \omega$. Daraus folgt weiter:

1. Es sei $x = lim. x + \omega$ und $y = lim. y + \omega'$, so ist $x \pm y = lim. x \pm lim. y + (\omega \pm \omega')$, und bei dem Unendlichkleinwerden von $\omega \pm \omega'$ auch:

$$lim. (x \pm y) = lim. x \pm lim. y.$$

2. Aus dieser Relation folgt für $y = x$ und das untere Zeichen $lim. (x - y) = lim\, x - lim\, y = 0$, also $lim. y = lim. x$.

3. Die beiden ersteren Gleichungen in 1. geben $xy = lim. x . lim. y + (\omega' lim. x + \omega\, lim\, y + \omega\omega')$, woraus sofort $lim. (xy) = lim. x . lim. y$ folgt.

Ist $y = A$ eine constante Grösse, so ist $lim. Ax = A\, lim. x$ (wegen $lim. A = A$). Auf gleiche Weise folgt auch:

$$lim. (xyz\ldots) = lim. x . lim. y . lim. z \ldots$$

4. Aus den genannten beiden Gleichungen in 1. folgt ferner:

$$\frac{x}{y} = \frac{lim. x + \omega}{lim. y + \omega'} = \frac{lim. x}{lim. y} + \frac{\omega\, lim. y - \omega'\, lim. x}{(lim. y + \omega')\, lim. y};$$

da im 2. Theile dieser Gleichung der 2. Bruch bei dem unendlichen Abnehmen von ω und ω' unendlich klein wird, so ist sofort

$$lim. \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{lim. x}{lim. y}.$$

5. Aus 3. folgt, wenn n eine ganze positive Zahl ist, unmittelbar:

$$lim. (x^n) = (lim. x)^n.$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = q$ und $x^{\frac{p}{q}}$ statt x, so folgt:

$$lim. (x^p) = (lim. x^{\frac{p}{q}})^q, \text{ und daraus}$$

$$lim. (x^{\frac{p}{q}}) = (lim. x^p)^{\frac{1}{q}}, \text{ oder wegen } lim. x^p = (lim. x)^p \text{ auch}$$

$$lim. (x^{\frac{p}{q}}) = (lim. x)^{\frac{p}{q}}.$$

Eben so ist wegen $\frac{1}{lim. (x^n)} = \frac{1}{(lim. x)^n} = (lim. x)^{-n}$ und auch

§. **140.** Unendlich werdende continuirliche Grössen behalten das bei irgend einem endlichen Werth obwaltende geometrische Verhältniss auch dann noch bei, wenn sich diese ihren Grenzen schon, so weit man nur immer will, genähert haben.

Denn für $A = nu$ und $B = mu$ hat man $A : B = nu : mu = n : m$, welches Verhältniss selbst noch für $u = \infty$, wofür also A und B Unendlich werden, gilt.

§. **141.** Aus den Erklärungen (§§. 134, 136) über das unendlich Kleine, ergeben sich gleichfalls folgende, mit den eben angeführten, analoge Lehrsätze:

§. **142.** Eine endliche Grösse kann durch die Hinzufügung oder Wegnahme einer unendlich kleinen Grösse weder vermehrt noch vermindert werden.

Denn ist ω eine unendlich klein werdende, oder kürzer, eine unendlich kleine Grösse; so ist (§. 134) $\omega = \frac{a}{u}$, folglich

$$A \pm \omega = A \pm \frac{a}{u} = \frac{Au \pm a}{u} = \frac{Au}{u} = A,$$

weil (§. 138) die endliche Grösse a gegen die unendliche Au verschwindet.

§. **143.** Eine unendlich kleine Grösse niederer Ordnung wird durch die Addition oder Subtraction einer unendlich kleinen Grösse höherer Ordnung nicht geändert.

$\frac{1}{lim.\,(x^n)} = \frac{lim.\,1}{lim.\,(x^n)} = lim.\left(\frac{1}{x^n}\right) = lim.\,(x^{-n})$, folglich $lim.\,(x^{-n}) = (lim.\,x)^{-n}$.

6. Da, wie man leicht sieht, $lim.\,(a^\omega) = 1$ ist, also $a^\omega = 1 + \omega'$ gesetzt werden kann, so folgt $a^x = a^{lim.\,x + \omega} = a^{lim.\,x} \,.\, a^\omega = a^{lim.\,x}(1 + \omega') = a^{lim.\,x} + \omega' a^{lim.\,x}$, und es ist $lim\,(a^x) = a^{lim.\,x}$.

7. Auf ähnliche Weise findet man noch $lim.\,(x^y) = (lim.\,x)^{lim.\,y}$.

Mit Hilfe dieser Sätze folgt nun die obige Relation auf folgende Art. Wegen $A \pm B = a \,.\, u^n \pm b \,.\, u^{n-m} = \left(a \pm \frac{b}{u^m}\right) u^n$ ist, wenn man auf die Grenzen übergeht, $lim.\,(A \pm B) = lim.\left(a \pm \frac{b}{u^m}\right) .\, lim.\,(u^n) = lim.\,a \,.\, lim.\,(u)^n = a\,lim.\,(u^n) = lim.\,(a\,u^n) = lim.\,A$, wie angegeben wurde.

Denn für $A = a\omega^{n-m}$ und $B = b\omega^n$, wo also B unendlich klein von höherer Ordnung als A ist, folgt mit Berücksichtigung des vorigen Satzes (§. 142): $A \pm B = \omega^{n-m}(a \pm b\omega^m) = \omega^{n-m} . a = a\omega^{n-m} = A$. (Auch kann man in diesem §. auf eine ganz ähnliche Weise, wie in §. 139 die Grenzen zum Grunde legen).

§. **144**. Unendlich klein werdende continuirliche Grössen behalten das geometrische Verhältniss, welches sie bei irgend einem endlichen Werthe gegen einander besitzen, selbst dann noch bei, wenn sie sich schon ihrer Grenze Null, so weit man nur immer will, genähert haben.

Denn setzt man $A = n\omega$ und $B = m\omega$, so findet fortwährend, obschon A und B mit ω unendlich klein werden, das Verhältniss Statt: $A : B = n\omega : m\omega = n : m$.

§. **145**. Zusatz. Mit Hilfe des unendlich Kleinen lässt sich nun auch von den continuirlichen Functionen (§. 110) folgende einfache Definition geben: die Function $f(x)$ ist innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = b$ stetig, wenn eine unendlich kleine Zu- oder Abnahme von x, dieses x zwischen a und b genommen, eine unendlich kleine Aenderung in $f(x)$ hervorbringt. Liegt α zwischen a und b, so sagt man auch, die Function $f(x)$ sei, wie klein auch die Differenz $a - b$ oder $b - a$ sein mag, in der Nähe von $x = \alpha$ stetig oder continuirlich.

So ist für $f(x) = x^n$ sofort $f(x + \omega) = (x + \omega)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\omega + \binom{n}{2} x^{n-2}\omega^2 + \ldots = x^n + P\omega$, wo P für alle endlichen Werthe von x (und natürlich n) eine endliche, also $P\omega$ eine unendlich kleine Grösse, daher die Aenderung der Function $f(x + \omega) - f(x) = P\omega$ selbst unendlich klein, also x^n für alle endlichen Werthe der Variablen x eine continuirliche Function von x ist.

Viertes Capitel.

Theorie der höheren Gleichungen.

I.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

Erklärungen.

§. **146**. Eine höhere Gleichung mit einer unbekannten Grösse heisst geordnet, wenn sie auf die Form gebracht ist:

(1) $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0.$

In dieser Gleichung des n. Grades, von der Unbekannten x, können die Buchstaben- oder Zahlencoefficienten A_1, A_2, . . . A_n reell oder imaginär, rational oder irrational, ganz oder gebrochen, positiv oder negativ und zum Theil (selbst alle von A_1 bis inclus. A_{n-1}) auch Null sein; indess setzen wir hier ein für alle Mal reelle, rationale Coefficienten voraus.

§. **147**. Der Kürze wegen werden wir diese allgemeine Gleichung durch $X = 0$ darstellen, wobei X das Polynom der Gleichung heisst und sofort eine Function von x ist.

§. **148**. Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck, welcher, für x gesetzt, der Gleichung Genüge leistet, also das Polynom X auf Null bringt, heisst Wurzel der Gleichung.

So ist z. B. für die Gleichung $4x^2 + 1 = 3x + 2x^3$, welche geordnet in $x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ übergeht, jeder der 3 Ausdrücke: 1, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1})$ eine Wurzel, wovon man sich leicht überzeugen kann.

§. **149**. Lehrsatz. In jeder höhern Gleichung $X = 0$ ist das Polynom X für alle endlichen Werthe von x eine continuirliche Function von x.

Denn lässt man x um die willkürliche Grösse ω zunehmen oder in $x+\omega$ übergehen, so geht X oder $f(x)$ über in

$$f(x+\omega) = (x+\omega)^n + A_1(x+\omega)^{n-1} + A_2(x+\omega)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(x+\omega) + A_n,$$

und wenn man (§. 124) entwickelt und Alles nach Potenzen von ω ordnet, erhält man:

$$(\alpha)\quad f(x+\omega) = X + X_1\omega + X_2\omega^2 + X_3\omega^3 + \dots + X_{n-1}\omega^{n-1} + X_n\omega^n,$$

wobei die auf einander folgenden Coefficienten X, X_1, ... folgende Werthe haben:

$$X = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n,$$

$$X_1 = \frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1}A_1x^{n-2} + \frac{(n-2)}{1}A_2x^{n-3} + \dots + A_{n-1},$$

$$X_2 = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}A_1x^{n-3} + \dots + A_{n-2},$$

$$X_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}A_1x^{n-4} + \dots + A_{n-3},$$

. .

$$X_{n-1} = \frac{n(n-1)\dots 3\,.\,2}{1\,.\,2\dots(n-1)}x + A_1 = nx + A_1,$$

$$X_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\dots(n-1)n} = 1.$$

Da nun X nichts anderes als $f(x)$ ist, so folgt:

$$f(x+\omega) - f(x) = \omega(X_1 + X_2\omega + \dots + X_n\omega^{n-1}),$$

und es ist, wenn ω eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, für alle endliche Werthe von x, wofür, wie man sieht, auch X, X_1, X_2, ... X_n endliche Grössen sind, diese Differenz oder Aenderung der Function $f(x)$ unendlich klein, mithin diese Function $f(x) = X$ (§. 145) innerhalb dieser Grenzen in der That continuirlich.

Anmerk. Da die obige Entwickelung (α) in der Folge häufig angewendet wird, so machen wir darauf aufmerksam, dass sie immer leicht hingeschrieben werden kann, wenn man nur die ganz einfachen Bildungsgesetze der Coefficienten X, X_1, X_2, ... berücksichtiget; diese sind nämlich folgende: X ist das gegebene Polynom

der Gleichung selbst. X_1 wird aus X gebildet oder abgeleitet, indem man in jedem Gliede den Exponenten von x zum Coefficienten macht und den Exponenten selbst um eine Einheit vermindert. Genau auf dieselbe Art wird X_2 aus X_1, X_3 aus X_2 u. s. w., X_n aus X_{n-1} abgeleitet oder derivirt, nur dass man zuletzt noch alle Glieder in X_1 durch 1, in X_2 durch 1 . 2 u. s. w., in X_n durch 1.2.3...n dividiren muss. Aus diesem Grunde heissen die Polynome X_1, X_2, ... X_n, der Reihe nach, das 1., 2., ... n. abgeleitete (und durch 1, 1.2 etc. dividirte) Polynom, und man erhält, was als Rechnungsprobe dienen kann, für das letzte Polynom X_n immer den 1. Coefficienten des Polynoms X der gegebenen Gleichung (also A_0, wenn $X = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots$ ist).

§. **150.** Lehrsatz. Ist, vom Zeichen abgesehen, A_m der grösste Coefficient des Polynoms X; so wird für $x \geqq A_m + 1$ das 1. Glied x^n desselben grösser, als die Summe aller übrigen Glieder.

Denn setzt man Kürze halber $A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = P$, so ist offenbar $A_m x^{n-1} + A_m x^{n-2} + A_m x^{n-3} + \ldots + A_m$, d. i. (1) $A_m \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) > P$. Setzt man nun $x \geqq A_m + 1$, so folgt $x - 1 \geqq A_m$ oder $(x - 1) x^n \geqq A_m x^n$, und wenn man davon die Relation $0 < A_m$ abzieht, für beide Fälle:

$$(x - 1) x^n > A_m x^n - A_m \text{ oder } x^n > A_m \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right).$$

Diese Relation, mit der vorigen (1) verglichen, gibt um so mehr: $x^n > P$, d. i. $x^n > A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$, was zu beweisen war.

So wird z. B. in $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$, für $x = 4 + 1 = 5$, das 1. Glied $x^3 = 125$ grösser, als die Summe der übrigen Glieder: $50 + 20 + 3 = 73$. In vielen Fällen (besonders wenn auch negative Glieder vorkommen) reichen sogar schon kleinere Zahlen, wie namentlich hier die Zahl 4, zu diesem Zwecke hin.

§. **151.** Folgerung. Aus diesem Satze folgt unmittelbar folgender: Es lassen sich in der endlichen oder unendlichen Reihe $y^m + A_1 y^{m+1} + A_2 y^{m+2} + \ldots$ für y so kleine Werthe angeben, dass dadurch das 1. Glied y^m grösser als die Summe aller folgenden Glieder ausfällt.

Denn setzt man in dem obigen Polynom X (vor. §.) $x = \frac{1}{y}$, so hat man für $\frac{1}{y} \overset{=}{>} A_m + 1$ sofort:

$$\frac{1}{y^n} > A_1 \frac{1}{y^{n-1}} + A_2 \frac{1}{y^{n-2}} + \ldots + A_{n-1} \frac{1}{y} + A_n,$$

d. i. für $y \overset{=}{<} \frac{1}{A_m + 1}$ sofort: $1 > A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n$, oder, wenn man mit y^m multiplicirt, bei diesen angegebenen Werthen von y, auch:

$$y^m > A_1 y^{m+1} + A_2 y^{m+2} + \ldots + A_n y^{m+n},$$

wobei auch offenbar $n = \infty$ sein kann.

§. **152**. Lehrsatz. Erhält man aus dem Polynome X der Gleichung $X = 0$, für die 2 auf einander folgenden Substitutionen $x = a$ und $x = b$, Resultate mit verschiedenen Zeichen; so liegt zwischen a und b wenigstens eine (je nach Beschaffenheit von a und b reelle oder imaginäre) Wurzel dieser Gleichung.

Denn da $X = f(x)$ (§. 149) eine continuirliche Function von x ist, so muss $f(x)$ bei dem Uebergange von $f(a)$ in $f(b)$, d. i. vom Positiven ins Negative, oder umgekehrt, nothwendig (da hier $f(x)$ nicht Unendlich werden kann) durch Null gehen, so, dass es also einen zwischen a und b liegenden Werth α geben muss, wofür $f(\alpha) = 0$ wird; dann ist aber (§. 148) $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = X = 0$.

§. **153**. Zusatz 1. Da bei dieser Voraussetzung (dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen besitzen) $f(x)$ bei dem Uebergange von $f(a)$ in $f(b)$, oder umgekehrt, im Allgemeinen 3, 5, . . . $2m + 1$ Mal durch Null gehen kann, so kann auch überhaupt zwischen a und b eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $X = 0$ liegen.

§. **154**. Zusatz 2. Man sieht ferner leicht, dass, wenn $f(a)$ und $f(b)$ einerlei Zeichen besitzen, zwischen a und b sofort 0, 2, 4, . . . $2m$, d. i. überhaupt eine ge-

rade Anzahl von Wurzeln, die Null mitgerechnet (also auch gar keine), liegen könne.

§. 155. Lehrsatz. Jede Gleichung von einem ungeraden Grad hat wenigstens eine reelle Wurzel, ihr Zeichen ist das entgegengesetzte von jenem des letzten Gliedes A_n.

Denn setzt man als 1. Substitution $x = 0$, so fallen in X alle Glieder bis auf das letzte A_n weg, und man hat je nach dem Zeichen desselben für X ein positives oder negatives Resultat. Setzt man ferner als 2. Substitution, je nachdem A_n positiv oder negativ ist, $x = \mp (A_m + 1)$, so erhält (§. 150) X das Zeichen des 1. Gliedes x^n, wird also negativ oder positiv, und es liegt daher (§. 152) im erstern Falle zwischen 0 und $-(A_m + 1)$, im letztern Falle zwischen 0 und $+(A_m + 1)$, wenigstens eine reelle Wurzel, und diese ist beziehungsweise negativ oder positiv.

§. 156. Lehrsatz. Jede Gleichung von einem geraden Grad, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, davon ist eine positiv, die andere negativ.

Denn setzt man wieder als 1. Substitution $x = 0$, so wird X (gleich dem letzten Glied) negativ; setzt man dann als 2. Substitution $x = \pm (A_m + 1)$, so wird in beiden Fällen X positiv: es liegt also (§. 152) eine Wurzel zwischen 0 und $+(A_m + 1)$, die sonach reell und positiv, und eine Wurzel zwischen 0 und $-(A_m + 1)$, welche sofort reell und negativ ist.

§. 157. Lehrsatz. Jede Gleichung von einem geraden Grad, deren letztes Glied positiv ist, so wie überhaupt jede Gleichung von was immer für einem Grad, deren Coefficienten sämmtlich oder theilweise imaginär, jedoch in der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ enthalten sind, hat wenigstens eine in dem Ausdruck $p + q\sqrt{-1}$, wobei p und q reelle Grössen (die theilweise auch Null sein können) bezeichnen, enthaltene Wurzel.

Da sich dieser allgemeine Satz hier nicht ohne viele Weitläufigkeit, mit Hilfe der Differentialrechnung hingegen sehr einfach beweisen lässt, so verweisen wir in dieser Beziehung auf die Anmerkung am Ende des 5. Kapitels der Differentialrechnung.

§. **158**. Zusatz. Fasst man das in den drei letzten §§. Gesagte zusammen, so folgt, dass jeder höhern Gleichung ohne Ausnahme wenigstens eine Wurzel, diese mag nun reell oder imaginär sein, entsprechen müsse.

§. **159**. Lehrsatz. Ist $x=\omega$ eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so ist das Polynom X durch $x-\omega$ theilbar.

Denn ist ω eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so findet (§. 148) die Gleichung Statt: $\omega^n+A_1\omega^{n-1}+A_2\omega^{n-2}+\ldots+A_{n-1}\omega+A_n=0$; bestimmt man also aus dieser Gleichung A_n und setzt dessen Werth in das Polynom X, so erhält die Gleichung $X=0$ die Form:

$$(x^n-\omega^n)+A_1(x^{n-1}-\omega^{n-1})+\ldots+A_{n-2}(x^2-\omega^2)+A_{n-1}(x-\omega)=0,$$

unter welcher die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar erkannt wird *).

§. **160**. Zusatz. Theilt man wirklich, so erhält man, Alles wieder nach x geordnet:

$$x^{n-1}+B_1x^{n-2}+B_2x^{n-3}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1}=0,$$

dabei ist, wie man leicht findet: $B_1=A_1+\omega$, $B_2=A_2+A_1\omega+\omega^2$, $B_3=A_3+A_2\omega+A_1\omega^2+\omega^3$, ... $B_{n-1}=A_{n-1}+A_{n-2}\omega+\ldots+\omega^{n-1}$, und nach demselben Bildungsgesetz:

$$B_n=A_n+A_{n-1}\omega+\ldots+A_1\omega^{n-1}+\omega^n=X=0\ldots(\beta)$$

*) Scharfsinniger noch ist folgender Beweis: theilt man X durch $x-\omega$ und die Division geht nicht auf, so wird der Quotient X' eine ähnliche Function von x wie X sein, dagegen der Rest R, nach der Natur der Division, kein x mehr enthalten, und man hat $X=(x-\omega)X'+R$. Setzt man nun $x=\omega$, so wird, da ω eine Wurzel ist, $X=0$, und man erhält daher $0=0+R$, d. i. $R=0$.

oder auch in anderer Darstellung (recurrirend), und wenn man im Polynome X den Coefficienten zu x^n allgemein mit A_0 bezeichnet, wodurch der Quotient $B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = 0$ entsteht, sofort:

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = B_0 \omega + A_1, \quad B_2 = B_1 \omega + A_2, \ldots$$
$$B_{n-1} = B_{n-2} \omega + A_{n-1} \text{ und } (\delta) \; B_n = B_{n-1} \omega + A_n = 0.$$

Es ist also, um es wiederholt zu bemerken:

$$X = (x - \omega)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}) = 0.$$

Anmerk. 1. Sind die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots$ der Gleichung $X = 0$ in Zahlen gegeben und ist $x = \alpha$ eine Wurzel dieser Gleichung, so erhält man bei der wirklichen Rechnung den Quotienten $\frac{X}{x - \alpha}$ am einfachsten und bequemsten, wenn man sich zur Herleitung der Zahlencoefficienten $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ des zuletzt angegebenen Schemas bedient; zugleich kann man die Relation (δ), welche dabei $B_n = 0$ geben muss, als Controlle für die Richtigkeit der Rechnung benützen.

Um z. B. die Gleichung $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$, welche die Wurzel $x = 3$ besitzt, durch $x - 3$ zu theilen, schreibt man:

	A_0	A_1	A_2	A_3
	2	-3	-11	$+6$
$x = 3$	[2],	$2 \times 3 - 3 =$ [3],	$3 \times 3 - 11 =$ [-2],	$-2 \times 3 + 6 =$ [0]
	B_0	B_1	B_2	B_3

und erhält sofort als gesuchten Quotienten: $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Eben so hat man für die Gleichung $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$, in welcher $x = -1$ eine Wurzel ist, um den durch Division mit $x + 1$ entstehenden Quotienten zu erhalten, nach diesem Verfahren:

	1,	$+1$,	-7,	-1
$x = -1$	1,	$-1 \times 1 + 1 = 0$,	$-1 \times 0 - 7 = -7$,	$-1 \times -7 - 1 = +6$
				$+6$
				$-1 \times 6 + 6 = 0$

also den Quotienten $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Ferner daraus, wegen $x = 2$, wenn man mit $x - 2$ dividirt:

	1,	0,	-7,	$+6$
$x = 2$	1,	$2 \times 1 + 0 = 2$,	$2 \times 2 - 7 = -3$,	$2 \times -3 + 6 = 0$

sofort $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Endlich folgt wieder daraus, da in dieser Gleichung $x = 1$ eine Wurzel ist, wenn man mit $x - 1$ theilt:

	1,	$+2$,	-3
$x = 1$	1,	$1 \times 1 + 2 = 3$,	$1 \times 3 - 3 = 0$

der Quotient $x + 3 = 0$,

so dass hier $x = -3$ die Wurzel ist.

Auch die **vielfachen** Wurzeln einer Gleichung geben sich dadurch zu erkennen; denn ist z. B. die Gleichung $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = 0$ gegeben, und man untersucht ob 2 eine Wurzel derselben ist; so hat man nach diesem Verfahren ganz kurz das Schema:

	1,	−3,	−6,	+28,	−24
	1,	−1,	−8,	+12,	[0]
2	1,	+1,	−6,	[0]	
	1,	+3,	[0]		
	1,	[5]			

Da also nicht bloss das Polynom der gegebenen Gleichung durch $x - 2$ theilbar ist, sondern auch der durch die Division von $x - 2$ entstehende Quotient und so auch der folgende und der nächst folgende; so besitzt die gegebene Gleichung diese Wurzel $x = 2$ drei Mal und der aus der Division mit $(x - 2)^3$ entstehende Quotient ist $x + 3 = 0$, also noch $x = -3$.

Anmerk. 2. Theilt man das Polynom X durch den Factor $x - \alpha$, und ist α **keine** Wurzel der Gleichung $X = 0$; so erhält man nach diesem Vorgange für B_n nicht Null, sondern wie aus der Gleichung (β) zu ersehen, jenen Werth, welcher auch entsteht, wenn man in dem Polynom X die Unbekannte $x = \alpha$ setzt.

Um also z. B. die Resultate für die Substitutionen von $x = 2, 3, 4, \ldots$ in dem Polynome $X = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 148{\cdot}6$ zu erhalten, hat man nach diesem Verfahren:

	1,	3,	2,	6,	−148·6
2)	1,	5,	12,	30,	[−88·6]
3)	1,	6,	20,	66,	[+49·4]
4)	1,	7,	30,	126,	[+355·4]
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

wobei die eingeklammerten Zahlen die gesuchten Resultate dieser Substitutionen sind. Dieses Rechnungsverfahren stellt sich gegen das gewöhnliche um so bequemer heraus, je höhere Potenzen von x in dem Polynome X vorkommen.

§. **161.** Lehrsatz. Jede Gleichung des n. Grades hat n Wurzeln, und zwar weder mehr noch weniger.

Denn ist ω_1 jene Wurzel, die der Gleichung $X = 0$ (§. 158) nothwendig zukommt, so hat man (vorig. §.)

$$X = (x - \omega_1)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}) = 0.$$

Diese Gleichung wird aber nicht bloss für $x - \omega_1 = 0$, woraus eben die genannte Wurzel $x = \omega_1$ folgt, sondern auch für $X' = x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = 0$ befriediget.

Ist daher wieder ω_2 die Wurzel, welche dieser letztern Gleichung nothwendiger Weise entsprechen muss; so hat man eben so:

$$X' = (x - \omega_2)(x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + \ldots C_{n-2}) = 0.$$

eine Gleichung, welcher auf doppelte Weise, ein Mal für $x - \omega_2 = 0$ (woraus eben $x = \omega_2$ folgt) und dann auch für $X'' = x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2} = 0$ Genüge geleistet wird. Bezeichnet man desshalb die Wurzel, welche diese letztere Gleichung haben muss, durch ω_3; so ist eben so

$$X'' = (x - \omega_3)(x^{n-3} + D_1 x^{n-4} + \ldots + D_{n-3}) = 0.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so erhält man, da zuletzt statt dem Polynom nur noch ein Binom als Quotient entsteht: $X^{(n-2)'} = (x - \omega_{n-1})(x + Q) = 0$, so, dass aus $x + Q = 0$ sofort die letzte Wurzel $x = -Q = \omega_n$ hervorgeht. Man hat daher endlich durch die stufenweise Substitution:

$$X = (x - \omega_1) X' = (x - \omega_1)(x - \omega_2) X''$$
$$= (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) X'''$$

u. s. w., und zuletzt:

$$(\gamma) \quad X = (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \ldots (x - \omega_n) = 0,$$

aus welcher Darstellung nun auch unmittelbar folgt, dass erstlich jede der n Grössen ω_1, ω_2, ... ω_n, statt x gesetzt, die Gleichung $X = 0$ befriediget, also eine Wurzel derselben ist, und ferner, dass es ausser diesen keine andere Wurzel mehr geben könne.

§. **162**. Zusatz. Sind also ω_1, ω_2, ω_3, ... ω_n die n Wurzeln der Gleichung $X = 0$; so lässt sich das Polynom derselben durch $X = (x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \ldots (x - \omega_n)$ darstellen *), also in n einfache Factoren von der Form $x + p$, oder, wenn man will (für den Fall, dass p ein Bruch wäre), $a + bx$ zerlegen. Ist n gerade, und nimmt man immer 2 einfache Factoren zusammen, so entstehen $\frac{n}{2}$ qua-

*) Nach dieser Darstellung ist es ebenfalls leicht die Sätze in §§. 152 — 154 zu erweisen.

dratische Factoren von der Form $a + bx + cx^2$; für n ungerade hingegen erhält man $\frac{n-1}{2}$ quadratische und einen einfachen Factor.

So hat z. B. die Gleichung $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ die Wurzeln $x = +1, -1, +2, -3$; also ist:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$
$$= (x^2-1)(x^2+x-6) = (x^2-3x+2)(x^2+4x+3) \text{ u. s. w,}$$

Um das Polynom $12x^3 + 16x^2 - 3x - 4$ in Factoren zu zerlegen, bilde man die (sogleich geordnete) Gleichung

$$x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{3} = 0,$$

und da die Wurzeln dieser Gleichung sind: $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$; so folgt $x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{4}{3})$, oder, wenn man die Brüche wegschafft:

$$12x^3 + 16x^2 - 3x - 4 = (2x-1)(2x+1)(3x+4).$$

§. **163**. Lehrsatz. Ist $p + q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so muss auch der conjugirte Werth $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel dieser Gleichung sein.

Denn setzt man in $X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$, $x = p + q\sqrt{-1}$; so erhält man, nachdem sowohl die reellen, als auch imaginären Theile für sich zusammen genommen worden, einen Ausdruck von der Form $P + Q\sqrt{-1}$, wo P nur gerade und Q nur ungerade Potenzen von q enthält. Setzt man ferner im Polynome X, $x = p - q\sqrt{-1}$; so ändert sich durchaus nichts, als (da man nur $-q$ statt $+q$ zu setzen hat) das Zeichen von Q, und man erhält als Resultat dieser Substitution: $P - Q\sqrt{-1}$. Ist nun $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so hat man (§. 148) $P + Q\sqrt{-1} = 0$, d. i. (indem diese Relation nicht anders bestehen kann) $P = 0$ und $Q\sqrt{-1} = 0$, woraus durch Subtraction auch $P - Q\sqrt{-1} = 0$ folgt: es bringt also auch die 2. Substitution, nämlich $x = p - q\sqrt{-1}$, das Polynom X auf Null, folglich ist auch dieser Werth von x eine Wurzel der Gleichung $X = 0$.

§. **164**. Zusatz 1. Da also die imaginären Wurzeln einer Gleichung immer paarweise und conjugirt vorkommen, so entspringen aus jedem Paar die einfachen Factoren $(x-p) - q\sqrt{-1}$ und $(x-p) + q\sqrt{-1}$, welche zu-

sammen den quadratischen Factor $(x-p)^2+q^2$ geben; es kann demnach das Polynom einer jeden höhern Gleichung in lauter reelle quadratische Factoren von der Form x^2+ax+b aufgelöst werden, wozu für eine Gleichung von ungeradem Grade, noch ein, ebenfalls reeller, einfacher Factor kommt.

§. **165.** Zusatz 2. Da ferner die quadratischen Factoren, also auch ihr Product, wesentlich positiv ist; so kann das Polynom einer höhern Gleichung von lauter imaginären Wurzeln für gar keinen reellen Werth von x negativ werden.

§. **166.** Eigenschaften der Coefficienten. Verrichtet man in (γ) §. 161 die Multiplication mit den n Binomial-Factoren und ordnet das Ganze nach fallenden Potenzen von x, so erhält man:

(δ) $X=x^n-C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}-C_3x^{n-3}+\ldots+(-1)^nC_n$,

wobei die Coefficienten C_1, C_2, . . . nachstehende Werthe haben: $C_1=\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$, $C_2=\omega_1\omega_2+\omega_1\omega_3+\ldots+\omega_1\omega_n+\omega_2\omega_3+\ldots+\omega_2\omega_n+\text{etc.}+\omega_{n-1}\omega_n$, $C_3=\omega_1\omega_2\omega_3+\text{etc.}+\omega_{n-2}\omega_{n-1}\omega_n$ u. s. w., $C_n=\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_{n-1}\omega_n$, so, dass also C_1 die Summe der Wurzeln oder die Summe ihrer Combinationen zu 1, C_2 die Summe ihrer Combinationen zu 2 u. s. w., C_n die Summe ihrer Combinationen zu n, d. i. ihr Product, bezeichnet.

§. **167.** Zusatz. Fehlt also in einer höhern Gleichung das 2. Glied, so muss die Summe der positiven Wurzeln jener der negativen Wurzeln gleich sein. Fehlt das letzte Glied (A_n), so muss wenigstens eine ihrer Wurzeln gleich Null sein.

Anmerk. Sind die sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung $X=0$ negativ, so besitzt das Polynom $X=(x+\omega_1)(x+\omega_2)\ldots(x+\omega_n)$ nur positive Coefficienten.

§. **168.** Lehrsatz. Aendert man in der Gleichung $X=0$ die Zeichen des 2., 4., . . . d. i. jedes in gerader Stelle stehenden Gliedes; so verwandelt man dadurch die

Gleichung in eine andere, welche die nämlichen Wurzeln, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen besitzt.

Denn setzt man, um die Zeichen der Wurzeln zu ändern, in $X=0$, statt x, $-x$; so erhält man, für n gerad: $x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots + A_n = 0$, und für n ungerad: $-x^n + A_1 x^{n-1} - \ldots + A_n = 0$, oder, wenn man durchaus die Zeichen ändert, wieder: $x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \ldots - A_n = 0$. Diese Gleichung hat also die Wurzeln $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ etc., wenn die ursprüngliche $X=0$ die Wurzeln $+\alpha$, $+\beta$, $-\gamma$ u. s. w. besitzt.

So hat z. B. die Gleichung $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ die Wurzeln $+1$, -2, -3, während jene $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ die Wurzeln -1, $+2$, $+3$ besitzt.

Anmerk. 1. Mit Rücksicht auf die Gleichung (δ) (§. 166), in welcher die Wurzeln positiv angenommen sind, folgt also, dass eine Gleichung $X=0$, in welcher das Polynom lauter positive Coefficienten besitzt, nur negative Wurzeln haben könne. (Vergleiche auch die vorige Anmerk.)

Anmerk. 2. Wir werden die Gleichung mit entgegengesetzten Wurzeln (wie man sich Kürze halber auszudrücken pflegt) kurz durch $\underline{X} = 0$ bezeichnen.

§. **169.** Erklärung. Je nachdem zwei auf einander folgende Glieder des Polynoms X gleiche, oder verschiedene Zeichen besitzen, sagt man, dass diese beiden Glieder eine Zeichenfolge (Permanenz) oder einen Zeichenwechsel (Variation) bilden.

Hieraus folgt, dass, wenn in einer Gleichung des n. Grades kein Glied fehlt, die Summe aus der Anzahl der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel gleich n ist.

So enthält z. B. die Gleichung $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 5 = 0$ 3 Zeichenwechsel und 2 Zeichenfolgen.

§. **170.** Lehrsatz. Eine Gleichung $X=0$ kann nicht mehr reelle positive Wurzeln besitzen, als in X, und nicht mehr negative Wurzeln haben, als in $\underline{X}=0$ (§. 168) Zeichenwechsel vorkommen.

Denn stellt man das Polynom X' einer Gleichung des m. Grades durch $X' = x^m + + \ldots - A_p x^p - - \ldots + A_q x^q + +$

etc. $-A_u x^u - - \ldots - A_m$ dar, wobei, ohne Rücksicht auf die etwa fehlenden Glieder, $A_p x^p$ das erste vorkommende negative, $A_q x^q$ das hierauf zuerst folgende positive Glied u. s. w., endlich $A_u x^u$ dasjenige Glied bezeichnet, in welchem der letzte Zeichenwechsel Statt findet, und daher mit dem letzten Gliede A_m, welches wir, um die Ideen zu fixiren, als negativ voraussetzen, einerlei Zeichen besitzt, also hier ebenfalls negativ ist, und diesem sonach unmittelbar ein positives Glied vorausgeht; so erhält man, wenn X' mit dem Binom $x-\omega$, wobei ω positiv sein soll, multiplicirt wird:

$$X'(x-\omega) = x^{m+1} \left.\begin{matrix} + + \ldots - A_p \\ - - \ldots - \alpha\omega \end{matrix}\right\} x^{p+1} \left.\begin{matrix} - - \ldots + A_q \\ + + \ldots + \beta\omega \end{matrix}\right\} x^{q+1}$$
$$\left.\begin{matrix} + + \ldots - A_u \\ \mp \mp \ldots - \varepsilon\omega \end{matrix}\right\} x^{u+1} \left.\begin{matrix} - - \ldots - A_m \\ + + \ldots + \nu\omega \end{matrix}\right\} x + \mu\omega,$$

so, dass dieses Product die Form hat:

$$x^{m+1} \ldots - A'_p x^{p+1} \ldots + A'_q x^{q+1} \ldots - A'_u x^{u+1} \ldots + \mu\omega.$$

Obschon nun in diesem Producte die Zeichen der Zwischenglieder unbekannt sind, so ist doch so viel gewiss, dass vom 1. Glied x^{m+1} bis zu jenem $A'_p x^{p+1}$ wenigstens ein, bis zu jenem $A'_q x^{q+1}$ wenigstens zwei u. s. w., also bis zu jenem $A'_u x^{u+1}$ wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, wie im ursprünglichen Polynom X' von x^m bis zu dem nämlichen oder correspondirenden Gliede $A_u x^u$ Statt finden. Da aber von da an in X' kein Zeichenwechsel mehr, dagegen im vorliegenden Producte wenigstens noch ein solcher (durch das letzte Glied $+\mu\omega$ begründet) vorkommt; so besitzt das Product $X'(x-\omega)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr, als X' *).

Stellt nun X' das Product aller einfachen Factoren dar, welche aus den negativen und imaginären Wurzeln unserer Gleichuug $X=0$ entspringen (also $X'=1$ ist, wenn keine solchen Wurzeln vorhanden sind), und bezeichnen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ die positiven Wurzeln derselben; so hat man

*) Der Beweis ist der nämliche, wenn man das letzte Glied A_m, also auch damit $A_u x^u$ positiv, mithin das diesem Gliede vorausgehende als negativ annimmt.

$X = X'(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots$, und es gibt sonach in $X'(x-\omega_1)$ wenigstens einen, in $X'(x-\omega_1)(x-\omega_2)$ wenigstens zwei u. s. w. Zeichenwechsel mehr, als in X'. Selbst also, wenn in X' gar kein Zeichenwechsel vorkommt, besitzt das Polynom X dennoch wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, als in der Gleichung $X = 0$ positive Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots$ vorhanden sind.

Verwandelt man ferner (§. 168) die Gleichung $X = 0$ in jene mit entgegengesetzten Wurzeln $\underline{X} = 0$, so erscheinen die negativen Wurzeln der erstern, als positive Wurzeln der letztern Gleichung, und diese muss daher wenigstens r Zeichenwechsel darbieten, wenn die Gleichung $X = 0$ r negative Wurzeln besitzt.

Da also jede positive Wurzel der Gleichung $X = 0$ wenigstens einen Zeichenwechsel in X, und jede negative Wurzel einen solchen Wechsel in $\underline{X}$ begründet; so kann man auch sagen, dass in $X = 0$ nicht mehr positive und negative reelle Wurzeln vorhanden sein können, als beziehungsweise in X und $\underline{X}$ Zeichenwechsel Statt finden.

§. **171**. Zusatz. Fehlt aber in einer Gleichung kein Glied, so kann diese nicht mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative reelle Wurzeln haben, als Zeichenfolgen vorhanden sind. Sind dabei die sämmtlichen Wurzeln reell, so bietet das Polynom genau so viele Zeichenwechsel und Folgen dar, als die Gleichung beziehungsweise positive und negative Wurzeln besitzt.

Die oben (§. 168) angeführte Gleichung $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ besitzt 2 positive und 1 negative Wurzel; es enthält aber auch in der That das Polynom derselben 2 Zeichenwechsel und 1 Folge. So besitzt ferner das Polynom der Gleichung $X = x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0$, deren Wurzeln sofort 1, 1, 2, -4 sind, 3, und jenes der Gleichung $\underline{X} = x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = 0$ 1 Zeichenwechsel; es hat aber auch diese Gleichung $X = 0$ wirklich 3 positive und 1 negative Wurzel.

Transformation der Gleichungen.

§. **172**. Aufgabe. Eine gegebene Gleichung $X = 0$ in eine andere $Y = 0$ zu verwandeln, in welcher die Wurzeln um a kleiner als in der ursprünglichen sind.

Auflösung. Bezeichnet man die Unbekannte oder das Symbol aller Wurzeln der transformirten Gleichung durch y, so soll $y = x - a$ oder $x = a + y$ sein. Dieser Werth für x in $X = 0$ substituirt, gibt in Uebereinstimmung mit der Entwickelung in §. 149 für die transformirte Gleichung

$$Y = y^n + T_1 y^{n-1} + T_2 y^{n-2} + \ldots + T_{n-1} y + T_n = 0,$$

wobei (in §. 149, $x = a$ und $\omega = y$ gesetzt):

$$T_n = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a + A_n,$$
$$T_{n-1} = n a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \text{ etc.,}$$
$$T_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (n-1) A_1 a + A_2 \text{ und } T_1 = n a + A_1 \text{ ist.}$$

Auch kann man in dieser Gleichung statt y den Buchstaben oder das Symbol x setzen, muss aber dann die transformirte Gleichung $Y = 0$ durch $f(x + a) = 0$ bezeichnen, wenn die ursprüngliche Gleichung $X = 0$ durch $f(x) = 0$ ausgedrückt wird, weil $f(x) = f(y + a)$ ist.

Anmerk. Um für die practische Rechnung wieder ein kurzes und bequemes Verfahren abzuleiten, kann folgende Betrachtung dienen.

Soll z. B., um die Ideen festzusetzen, die Gleichung

$$X = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0 \ldots (1)$$

in eine andere $Y = 0$ verwandelt werden, deren Wurzeln um die Grösse a kleiner sind, wofür also $y = x - a$, oder $x = y + a$ wird, so erhält man durch Substitution und Entwickelung eine Gleichung von der Form

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \ldots (2),$$

wobei es sich also um die leichte und bequeme Berechnnng der Coefficienten a_0, a_1, . . . handelt.

Setzt man aber in dieser letztern Gleichung für y seinen Werth $x - a$, so wird auch:

$$a_0 (x-a)^3 + a_1 (x-a)^2 + a_2 (x-a) + a_3 = 0 \ldots (3),$$

und da diese Gleichung entwickelt und nach x geordnet mit jener (1) identisch sein muss, so folgt sogleich $a_0 = A_0$.

Da ferner das Polynom (3) durch $x - a$ getheilt den Rest a_3 und den Quotienten $a_0 (x-a)^2 + a_1 (x-a) + a_2$ gibt, so muss, wegen der erwähnten Identität, auch das ursprüngliche Polynom X in (1) durch $x - a$ getheilt, diesen Quotienten und den Rest a_3 geben. Wird der erhaltene Quotient abermals durch $x - a$ getheilt, so erhält man den Rest a_2 und Quotienten $a_0 (x-a) + a_1$, welcher wieder mit $x - a$ dividirt den Rest a_1 und Quotienten $a_0 = A_0$ gibt.

Da man nun durch das in §. 160, Anmerk. angegebene Verfahren diese auf einander folgenden Divisionen mit $x - a$ sehr leicht

ausführen und so diese Reste a_3, a_2, a_1 erhalten kann; so hat man auch dadurch die gesuchte Gleichung (2) gefunden.

Soll z. B. die Gleichung $3x^5 - x^4 - 18x^3 - 18x^2 - x + 3 = 0 \ldots$ (1) in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um 2 kleiner sind, so hat man nach diesem Verfahren:

$$\begin{array}{llllll}
 & 3, & -1, & -18, & -18, & \\
x=2 & 3, & 2\times 3-1=5, & 2\times 5-18=-8, & 2(-8)-18=-34, & \\
 & & & -1, & +3 & \\
 & & & 2(-34)-1=-69, & 2(-69)+3=[-135] & \\
 & 3, & 2\times 3+5=11, & 2\times 11-8=14, & 2\times 14-34=-6, & \\
 & & & & 2(-6)-69=[-81] & \\
 & 3, & 2\times 3+11=17, & 2\times 17+14=48, & 2\times 48-6=[90] & \\
 & 3, & 2\times 3+17=23, & 2\times 23+48=[94] & & \\
 & 3, & 2\times 3+23=[29], & & &
\end{array}$$

folglich für die gesuchte Gleichung, da die eingeklammerten Zahlen die genannten Reste sind, und wenn man das Symbol der Unbekannten statt mit y ebenfalls durch x bezeichnet:

$$3x^5 + 29x^4 + 94x^3 + 90x^2 - 81x - 135 = 0 \ldots (2),$$

und in der That sind -1, -1, -1, 3 und $\frac{1}{3}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung (1), während diese letztere Gleichung (2) die Wurzeln besitzt: -3, -3, -3, $+1$ und $-\frac{5}{3}$.

Sollten dagegen die Wurzeln der Gleichung (1) z. B. um 1 vergrössert werden, so würde man $x = -1$ setzen und dadurch folgendes Schema erhalten:

$$\begin{array}{llllll}
3, & -1, & -18, & -18, & -1, & +3 \\
3, & -4, & -14, & -4, & +3, & [0] \\
3, & -7, & -7, & +3, & [0] & \\
3, & -10, & +3, & [0] & & \\
3, & -13, & [+16] & & & \\
3, & [-16] & & & &
\end{array}$$

folglich wäre die transformirte Gleichung:

$$3x^5 - 16x^4 + 16x^3 = 0,$$

also die Wurzel $x = 0$ 3 Mal vorhanden, so, dass man durch Abkürzung mit x^3 die Gleichung $3x^2 - 16x + 16 = 0$ und daraus für die beiden übrigen Wurzeln $x = 4$ und $x = \frac{4}{3}$ erhält, wie es sein soll.

Dass man endlich in dem vorigen Schema, von der zweiten Zeile angefangen, überall das erste Glied 3 hätte auslassen können, wird man von selbst bemerken, und es würde sich mit Rücksicht auf diese Bemerkung, wenn z. B. die Gleichung

$$3x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 8x - 9 = 0$$

in eine andere verwandelt werden sollte, deren Wurzel jede um $\frac{1}{3}$

kleiner ist, das Schema auf die einfachste und kürzeste Art entwickelt, so darstellen:

$$\begin{array}{llllll} & 3, & -13, & +7, & -8, & -9 \\ x=\frac{1}{3} & & -12, & +3, & -7, & [+\frac{34}{3}] \\ & & -11, & -\frac{2}{3}, & [-\frac{65}{9}] & \\ & & -10, & [-4] & & \\ & & [-9], & & & \end{array}$$

und dadurch die verlangte Gleichung $3x^4 - 9x^3 - 4x^2 - \frac{65}{9}x + \frac{34}{3} = 0$ erhalten.

§. **173**. Aufgabe. Aus einer Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen.

Auflösung. Transformirt man die gegebene Gleichung $X=0$ nach dem vorigen §. in jene $Y=0$, so soll in dieser Gleichung sofort T'_1, d. i. $na+A_1=0$ sein: aus dieser Bedingungsgleichung folgt aber $a=-\frac{A_1}{n}$, also $x=y-\frac{A_1}{n}$, und daraus ganz einfach die Regel zur Wegschaffung des 2. Gliedes der Gleichung $X=0$.

So muss man also, um aus der Gleichung $x^4-8x^3+2x^2+6x-5=0$ das 2. Glied wegzuschaffen,

$$x=y-\left(\frac{-8}{4}\right)=y+2$$

setzen, wodurch man die Gleichung $y^4-22y^2-50y-33=0$ erhält.

§. **174**. Aufgabe. Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln m Mal so gross sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Auflösung. Ist $X=0$ die gegebene, $Y=0$ die transformirte Gleichung; so soll $y=mx$ oder $x=\frac{y}{m}$ sein. Diesen Werth in X substituirt, erhält man, wenn auch gleich zur Wegschaffung der Brüche durchaus mit m^n multiplicirt wird:

$$y^n+mA_1y^{n-1}+m^2A_2y^{n-2}+\ldots$$
$$+m^{n-1}A_{n-1}y+m^nA_n=0,$$

ein Resultat, welches man auch kürzer erhält, indem man unter die Glieder von X (die etwa fehlenden durch Nullen ergänzt) die geometrische Reihe $1, m, m^2, \ldots m^n$ setzt, je zwei über einander stehende Glieder mit einander multiplicirt, und überall y statt x schreibt.

Um z. B. die Gleichung $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ in eine andere mit 3 Mal so grossen Wurzeln zu verwandeln, hat man nach diesem Verfahren: $y^3 + 3 . y^2 - 9 . 10y + 27 . 8 = 0$, d. i. $y^3 + 3y^2 - 90y + 216 = 0$; es sind in der That die Wurzeln der gegebenen Gleichung $= 1, 2, -4$, während die letztere die Wurzeln $3, 6, -12$ besitzt.

§. **175.** Aufgabe. Aus einer gegebenen Gleichung, ohne dass sie (§. 146) aufhört geordnet zu sein, die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung. Seien, um die Ideen festzusetzen, aus der Gleichung $x^3 + \frac{a}{p}x^2 + \frac{b}{q}x + \frac{c}{r} = 0$ die Brüche wegzubringen. Transformirt man nach dem vorigen §. diese Gleichung in eine andere, deren Wurzeln m Mal so gross sind, so hat man:

$$y^3 + \frac{ma}{p}y^2 + \frac{m^2b}{q}y + \frac{m^3c}{r} = 0.$$

Nimmt man nun für die hier als unbestimmt anzusehende Grösse m den kleinsten Werth, für welchen p, q, r beziehungsweise in m, m^2, m^3 (da man die Brüche $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{q}$, . . als zur kleinsten Benennung gebracht voraussetzt) enthalten sind; so ist die Aufgabe mit den möglich kleinsten Zahlen aufgelöst.

Die Brüche werden übrigens stets (wenn auch nicht immer mit den kleinsten Zahlen) weggebracht, wenn man für m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von p, q, r nimmt.

Um z. B. aus der Gleichung $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$ die Brüche wegzuschaffen, hat man nach der eben erwähnten allgemeinen Regel, wenn man, da 8 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner ist, die Wurzeln 8 Mal so gross macht, also $x = \frac{1}{8}y$ setzt (§. 174): $y^4 - \frac{8}{2}y^3 + \frac{8^2 . 3}{4}y^2 - \frac{8^3 . 5}{4}y + \frac{8^4 . 3}{8} = 0$, das ist $y^4 - 4y^3 + 48y^2 - 640y + 1536 = 0$. Indess erreicht man hier seinen Zweck schon dadurch, dass man die Wurzeln der gegebenen Gleichung bloss verdoppelt, indem man dafür

$$y^4 - \frac{2}{2}y^3 + \frac{4 . 3}{4}y^2 - \frac{8 . 5}{4}y + \frac{16 . 3}{8} = 0.$$

d. i. $y^4 - y^3 + 3y^2 - 10y + 6 = 0$, also eine weit einfachere Gleichung als vorhin erhält.

§. 176. Aufgabe. Für eine gegebene Gleichung die Differenzen-Gleichung, d. i. jene Gleichung zu finden, deren Wurzeln die Differenzen aus je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Auflös. Sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung, und ist y die Unbekannte der gesuchten Gleichung $Y = 0$; so ist zufolge der Aufgabe y der allgemeine Stellvertreter der sämmtlichen Differenzen $\omega_1 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2, \ldots \omega_1 - \omega_n$, $\omega_2 - \omega_1$, $\omega_2 - \omega_2, \ldots \omega_2 - \omega_n$ u. s. w., die sich aus den n Wurzeln der gegebenen Gleichung bilden lassen. Da nun ω_1 und ω_2 Wurzeln von $X = 0$ sind, so bestehen (§. 148) die Gleichungen:

$$(1) \quad \omega_1^n + A_1\omega_1^{n-1} + A_2\omega_1^{n-2} + \ldots + A_n = 0 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \omega_2^n + A_1\omega_2^{n-1} + A_2\omega_2^{n-2} + \ldots + A_n = 0.$$

Aus $\omega_2 - \omega_1 = y$ folgt $\omega_2 = \omega_1 + y$, und wenn man diesen Werth in der letztern Gleichung (2) substituirt, so erhält man nach §. 149, $\omega = y$ gesetzt:

$$A + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots + \tau_{n-1} y^{n-1} + \tau_n y^n = 0,$$

wobei $A, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ die dort angegebenen Werthe von $X, X_1, X_2, \ldots X_n$, nur überall ω_1 statt x gesetzt, besitzen. Da aber auf diese Weise A das Polynom der vorigen Gleichung (1), und dieses gleich Null ist; so hat man auch:

$$\tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots + \tau_n y^n = 0,$$

oder wenn man mit y abkürzt, d. i. die Wurzel $y = 0$ (die den Differenzen $\omega_1 - \omega_1$, $\omega_2 - \omega_2, \ldots \omega_n - \omega_n$ entspricht), gleich auslässt, auch:

$$(m) \quad \tau_1 + \tau_2 y + \tau_3 y^2 + \ldots + \tau_{n-1} y^{n-2} + y^{n-1} = 0$$

(wegen $\tau_n = 1$), in welcher Gleichung sofort (§. 149) die Coefficienten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Functionen von ω_1, nämlich die abgeleiteten Polynome aus der Gleichung (1) sind. Eliminirt man daher aus dieser Gleichung (m) und jener (1) die Grösse ω_1, so erhält man eine Gleichung in y, deren Coefficienten gewisse Functionen von den gegebenen $A_1, A_2, \ldots$ sind, als gesuchte Gleichung.

Da man aber statt der in Rechnung gebrachten Differenz $\omega_2 - \omega_1 = y$ eben so gut jede andere $\omega_3 - \omega_2 = y$,

$\omega_2 - \omega_3 = y$ u. s. w. der übrigen hätte nehmen können; so muss man gleichzeitig in (1) und den Coefficienten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ (als Functionen von ω_1) die Wurzel ω_1 mit den übrigen ω_2, $\omega_3, \ldots \omega_n$ vertauschen können, und immer noch durch die angedeutete Elimination (nun von ω_2 oder ω_3 u. s. w.) aus den betreffenden Gleichungen (m) und (1) die gesuchte Gleichung erhalten.

Man kann also auch in (1) statt ω_1 den allgemeinen Stellvertreter von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, d. i. x, wodurch aber diese Gleichung in die ursprüngliche $X = 0$, und eben so in den Coefficienten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ der Gleichung (m) x statt ω_1 setzen, wodurch diese Gleichung genau in jene

$X_1 + X_2 y + X_3 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-2} + y^{n-1} = 0$ (vergl. §. 149)

übergeht, und aus diesen beiden Gleichungen x eliminiren, um die gesuchte Gleichung $Y = 0$ zu erhalten.

So ist z. B. für die Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ sofort $X = x^3 - 7x + 6$, $X_1 = 3x^2 - 7$, $X_2 = 3x$, $(X_3 = 1)$: man muss daher, um dazu die Differenzengleichung zu finden, aus den beiden Gleichungen $x^3 - 7x + 6 = 0$, $(X = 0)$ und $3x^2 - 7 + 3xy + y^2 = 0$ $(X_1 + X_2 y + y^2 = 0)$ x eliminiren. Man findet als Resultat dieser Elimination die Gleichung $y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0$, welches auch in der That die verlangte Differenzengleichung ist; denn es sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung: $1, 2, -3$, aus denen sich sofort die Differenzen $1 - 2 = -1$, $1 + 3 = 4$, $2 - 1 = 1$, $2 + 3 = 5$, $-3 - 1 = -4$ und $-3 - 2 = -5$ (da jene $1 - 1$, $2 - 2$ etc., bereits ausgeschieden sind) als Wurzeln dieser letzteren Gleichung ergeben.

Eben so findet man $y^6 - 36y^4 + 324y^2 + 459 = 0$ als Differenzengleichung der Gleichung $x^3 - 6x - 7 = 0$.

§. 177. Da sich die n Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, wenn man, wie es bereits oben geschehen ist, jene Differenzen $\omega_1 - \omega_1$, $\omega_2 - \omega_2, \ldots \omega_n - \omega_n$ auslässt, $n(n-1)$ Mal zu 2 combiniren lassen, nämlich eben so viele Differenzen oder Wurzeln der Gleichung $Y = 0$ geben; so ist diese letztere vom $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Da ferner jeder positiven Wurzel eine gleiche negative entspricht, indem man hat:

$$\omega_1 - \omega_2 = +\alpha \text{ und } \omega_2 - \omega_1 = -\alpha,$$
$$\omega_1 - \omega_3 = +\beta \text{ und } \omega_3 - \omega_1 = -\beta \text{ u. s. w};$$

so ist das Polynom der Differenzengleichung $Y=0$ in Factoren aufgelöst (§. 162):

$$Y=(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)..=(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)..,$$

so, dass dieses also aus $\frac{n(n-1)}{2}=m$ quadratischen Factoren von der Form $y^2=\omega^2$ besteht, welche sofort ein Product von lauter geraden Potenzen, d. i. ein Product von der Form

$$Y=y^{2m}+\delta_1 y^{2m-2}+\delta_2 y^{2m-4}+..+\delta_{m-1}y^2+\delta_m$$

geben. Setzt man daher $y^2=z$, so geht die Gleichung $Y=0$ über in jene: $Z=z^m+\delta_1 z^{m-1}+\delta_2 z^{m-2}+..+\delta_m=0$, deren Grad nur halb so gross, als jener der Differenzengleichung ist, und in welcher die W. $z=y^2$ die Quadrate von den Differenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $X=0$ sind; aus diesem Grunde wird diese letztere Gleichung die quadrirte Differenzengleichung, oder besser, die Gleichung der quadrirten Differenzen der Gleichung $X=0$ genannt.

Für die im vorigen §. angeführte Gleichung $x^3-7x+6=0$ hat man sonach $z^3-42z^2+441z-400=0$ als die quadrirte Differenzengleichung.

Auf gleiche Art findet man $z^3-42z^2+441z-49=0$ als quadrirte Differenzengleichung für die Gleichung $x^3-7x\pm7=0$.

§. 178. Aufgabe. Zu untersuchen, ob eine gegebene Gleichung gleiche oder sogenannte vielfache Wurzeln besitzt.

Auflösung. Bezeichnet man in der Gleichung $X=0$, deren Wurzeln $\omega_1, \omega_2, .. \omega_n$ sind, die Binome $x-\omega_1$, $x-\omega_2$, .. $x-\omega_n$ Kürze halber durch b_1, b_2, .. b_n; so ist (§. 162)

$$X=b_1 b_2 b_3, .. b_n.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x+\alpha$ statt x, wo α eine ganz willkürliche Grösse bezeichnet; so geht (§. 149) X in $X+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\ldots+\alpha^n$, und das Product $b_1 b_2 .. b_n$ in $(b_1+\alpha)(b_2+\alpha)\ldots(b_n+\alpha)=C_n+C_{n-1}\alpha+C_{n-2}\alpha^2+\ldots+C_1\alpha^{n-1}+\alpha^n$ über, wobei (analog mit §. 166) C_n die Summe der Combinationen der Grössen b_1, b_2, .. b_n zu n, C_{n-1} jene der Combinationen zu $n-1$ u. s. w., d. i. $C_n=b_1 b_2 .. b_n$, $C_{n-1}=\frac{C_n}{b_1}+\frac{C_n}{b_2}+..+\frac{C_n}{b_n}$ u. s. w. ist. Man hat also die

Gleichung $X + X_1 \alpha + .. + \alpha^n = C_n + C_{n-1}\alpha + .. + \alpha^n$, und daraus (§. 112), da $X, X_1, \ldots C_n, C_{n-1}, \ldots$ von α unabhängig sind: $X = C_n = b_1 b_2 \ldots b_n$ (die ursprüngliche Gleichung), $X_1 = C_{n-1} = \frac{X}{b_1} + \frac{X}{b_2} + \ldots + \frac{X}{b_n}$ u. s. w.

Besitzt nun die gegebene Gleichung $X = 0$ m gleiche Wurzeln, und zwar $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_m = a$, so ist auch $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$, und man hat $X = b_1^m b_{m+1} \ldots b_n$ und $X_1 = \frac{mX}{b_1} + \frac{X}{b_{m+1}} + \ldots + \frac{X}{b_n}$, d. i.

$$X_1 = m b_1^{m-1} b_{m+1} \ldots b_n + b_1^m b_{m+2} \ldots b_n + \text{etc.}$$
$$+ b_1^m b_{m+1} \ldots b_{n-1},$$

woraus sofort folgt, dass die beiden Polynome X und X_1 als grössten gemeinschaftlichen Divisor den Factor $b_1^{m-1} = (x - a)^{m-1}$ besitzen. Besässe die obige Gleichung $X = 0$ ausserdem noch p Wurzeln jede $= b$, so würde man eben so finden, dass die beiden Polynome X und X_1 als grössten gemeinschaftlichen Factor den Ausdruck $(x - a)^{m-1}(x - b)^{p-1}$ haben, u. s. w.

§. **179**. Um also zu untersuchen, ob die Gleichung $X = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, leite man (§. 149, Anmerk.) aus X das Polynom X_1 ab und suche zu X und X_1 den grössten gemeinschaftlichen Divisor; ist dieser, in einfache Factoren zerlegt, von der Form $(x - a)^m (x - b)^p (x + c)^r \ldots$, so enthält diese Gleichung die Wurzel a $(m + 1)$ Mal, jene b $(p + 1)$ Mal, die Wurzel $-c$ $(r + 1)$ Mal u. s. f.; findet man keinen solchen gemeinschaftlichen Divisor, so hat die Gleichung auch keine gleichen Wurzeln.

So ist z. B. für die Gleichung $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$: $X = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, $X_1 = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$; und da man zwischen X und X_1 als grössten gemeinschaftlichen Divisor $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ findet, so enthält diese Gleichung die Wurzel $x = 1$ 3 Mal; und in der That sind die Wurzeln dieser Gleichung 1, 1, 1 und -2.

Cubische Gleichungen.

§. **180**. Da sich (§. 173) aus jeder Gleichung das 2. Glied wegschaffen lässt, so können wir zur grössern Ein-

fachheit die aufzulösende cubische Gleichung in der Form voraussetzen: (1) $x^3+px+q=0$.

Um diese Gleichung aufzulösen, setze man (2) $x=y+z$; so geht dieselbe über in: $y^3+z^3+(3yz+p)\,x+q=0$, und wenn man, um y und z zu bestimmen, nebst der vorigen Bedingungsgleichung (2) noch die folgende: $3yz+p=0$, woraus (3) $z=-\frac{p}{3y}$ folgt, annimmt, so folgt: (4) $y^3+z^3+q=0$ oder $y^3-\frac{p^3}{27y^3}+q=0$, d. i. $y^6+qy^3=\frac{p^3}{27}$, woraus sofort $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ folgt. Aus (4) hat man $z^3=-q-y^3$, oder wenn man für y^3 substituirt und die Wurzel auszieht: $z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$. Es folgt also endlich aus (2), von den doppelten Zeichen nur die obern beibehaltend, indem die untern dasselbe Resultat geben:

$$(5)\quad x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]},$$

welcher Ausdruck unter dem Namen der Cardan'schen Formel bekannt ist.

§. 181. Setzt man Kürze halber

(6) $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=A$ und $-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}=B$,

so geht die Formel (5) über in (7) $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$. Um nun zu sehen, wie diese Formel die sämmtlichen 3 Wurzeln der Gleichung (1) enthält, bemerke man, dass die 3 Cubikwurzeln aus a^3 sind: a, $a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ und $a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ *),

*) Setzt man nämlich $\sqrt[3]{a^3}=x$, so folgt $x^3-a^3=0$, und da $x=a$ eine Wurzel, also (§. 159) x^3-a^3 durch $x-a$ theilbar ist; so erhält man noch $x^2+ax+a^2=0$, und daraus die beiden übrigen oben angegebenen imaginären Wurzeln von $\sqrt[3]{a^3}$.

oder für $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\alpha$ auch: a, αa, $\alpha^2 a$. Versteht man also unter $\sqrt[3]{A}$ die gewöhnliche, reelle oder arithmetische Cubikwurzel aus A; so sind die 3 Wurzeln von $\sqrt[3]{A}$ sofort: $1.\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$. Auf die nämliche Art hat man für die 3 Werthe von $\sqrt[3]{B}$ auch $1.\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$; da nun aber [vergl. (2) und (3)] wegen $yz=-\frac{p}{3}$ in (6) für $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ nur jene Werthe genommen werden dürfen, die zusammen ein reelles Product geben; so sind für x nur folgende 3 Combinationen möglich oder brauchbar:

$$(8)\quad x_1=1.\sqrt[3]{A}+1.\sqrt[3]{B},\ x_2=\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B},$$
$$\text{und}\quad x_3=\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B},$$

welches zugleich die gesuchten 3 Wurzeln der Gleichung (1) sind.

§. **182**. Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die vorigen 3 Wurzeln der Gleichung $x^3+px+q=0$, in welcher p und q positiv oder negativ sein können, reell oder imaginär ausfallen, muss man die 3 Fälle unterscheiden: 1.) wenn $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, 2.) $=0$ und 3.) <0 ist. Man findet durch diese Discussion [I, 105], dass im 1. Falle die Wurzel x_1 reell, die beiden übrigen imaginär sind; dass im 2. Falle alle drei Wurzeln reell sind und dabei $x_2=x_3$ ist, und dass endlich auch im 3. Falle die sämmtlichen 3 Wurzeln reell ausfallen, obschon sie in der Cardan'schen Formel unter einer imaginären Form erscheinen; wesshalb man diesen auch den irreducibeln Fall genannt hat.

Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst trigonometrisher Functionen.

§. **183**. Für den 1. der im vorigen §. angeführten 3 Fälle setze man, wenn a) der Coefficient p positiv ist, (m) $\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}=tang\,\varphi$ und $\sqrt[3]{tang\,\frac{1}{2}\varphi}=tang\,\psi$, wo φ und ψ

zwei Hilfswinkel bezeichnen; so erhält man für die Grössen A und B im §. 181, (6), nach einigen leichten Reductionen: $A = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \cdot tang \frac{1}{2} \varphi$ und $B = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \cdot cot \frac{1}{2} \varphi$, folglich für die reelle Wurzel x_1 in (8): (α) $x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot cot 2\psi$. Man wird also zuerst aus (m) (mit beständiger Anwendung der Logarithmen) die Hilfswinkel φ und ψ, und mit diesem letzteren aus der Gleichung (α) die Wurzel x_1 berechnen.

§. **184**. Ist aber b) p negativ, so setze man, wenn überall [nämlich in (1) und (6), §§. 180, 181] p gleich negativ genommen, und dann unter p wieder nur der numerische Werth verstanden wird: (m') $\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = sin \varphi$ und wieder $\sqrt[3]{tang \frac{1}{2} \varphi} = tang \psi$; so findet man

$$A = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \cdot tang \tfrac{1}{2} \varphi, \quad B = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \cdot cot \tfrac{1}{2} \varphi$$

$$\text{und} \quad (\alpha') \; x_1 = -\frac{2}{sin 2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

wobei die Rechnung wieder nach der vorigen Angabe zu führen ist.

§. **185**. Da sich im 2. Falle die 3 Wurzeln unmittelbar logarithmisch berechnen lassen, indem $x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, $x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ ist; so sind hierzu keine anderweitigen Hilfsgrössen nothwendig.

§. **186**. Für den 3. oder sogenannten irreduciblen Fall, in welchem p nothwendig negativ sein muss, setze man, wenn unter p wieder nur der numerische Werth verstanden [also die Gleichung (1) durch $x^3 - px + q = 0$ dargestellt] wird, $x = r \, sin \varphi$ oder $sin \varphi = \frac{x}{r}$; so erhält man wegen (§. 23. Anmerkung) $sin 3\varphi = 3 \, sin \varphi - 4 \, sin \varphi^3$ oder $sin \varphi^3 - \frac{3}{4} sin \varphi + \frac{1}{4} sin 3\varphi = 0$ sofort:

$$(n) \quad x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x + \tfrac{1}{4} r^3 sin 3\varphi = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln in dem Ausdrucke (d) $x = r \sin\varphi$, wobei für φ alle Werthe gesetzt werden müssen, für welche $\sin 3\varphi$ (als Bestandtheil des letzten Gliedes der vorigen Gleichung) ungeändert bleibt, enthalten sind. Diese so beschaffenen Werthe von φ sind aber die dritten Theile von 3φ, $180 - 3\varphi$, $3.180 - 3\varphi$, $5.180 - 3\varphi$, ... und $360 + 3\varphi$, $2.360 + 3\varphi$, $3.360 + 3\varphi$ u. s. w., also die Werthe: φ, $60 - \varphi$, $180 - \varphi$, $300 - \varphi$, ... und $120 + \varphi$, $240 + \varphi$, $360 + \varphi$ u. s. w. Es ist aber leicht zu sehen, dass diese unzähligen Bögen nur 3 verschiedene Sinus, nämlich $\sin\varphi$, $\sin(60 - \varphi)$ und $-\sin(60 + \varphi)$ haben, so, dass also auch aus dem genannten Ausdrucke (d) für die Gleichung (n) nur 3 Wurzeln, nämlich (β) $x_1 = r \sin\varphi$, $x_2 = r \sin(60 - \varphi)$ und $x_3 = -r \sin(60 + \varphi)$ hervorgehen. Vergleicht man endlich die obige Gleichung (n) mit der ursprünglichen:

$$x^3 - px + q = 0,$$

so folgt: (γ) $\frac{3}{4}r^2 = p$ und $\frac{1}{4}r^3 \sin 3\varphi = q$, woraus nun ganz einfach r und φ, und mit Hilfe dieser Werthe aus (β) die 3 Wurzeln mittelst Logarithmen berechnet werden können.

Man findet z. B. für die dem 1. Falle (§. 183) entsprechende Gleichung $x^3 + 3x - 2 = 0$ die Hilfswinkel $\varphi = 135^0$, $\psi = 53^0\ 17'\ 52''\cdot 7$, und damit die reelle Wurzel $x_1 = \cdot 5960717$.

Für die (dem im §. 184 angeführten Falle entsprechende) Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$ folgt $\varphi = 15^0\ 47'\ 35''\cdot 4$, $\psi = 27^0\ 22'\ 4''$ und $x_1 = -2$. (Die beiden imaginären Wurzeln sind: $-1 \pm \sqrt{-1}$.)

Aus der zum 2. Falle (§. 185) gehörigen Gleichung $x^3 - 3x - 2 = 0$ erhält man die Wurzeln $x_1 = +2$, $x_2 = x_3 = -1$.

Endlich findet man für die zum 3. Falle (§. 186) gehörende Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$, aus (γ): $\log r = \cdot 4850183$ und $\varphi = 19^0\ 6'\ 23''\cdot 8$, folglich mit diesen Werthen aus (β): $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Gleichungen des vierten Grades.

§. **187.** Es sei auch hier die aufzulösende Gleichung bereits von ihrem 2. Gliede befreit und auf die Form gebracht: (1) $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Man setze (2) $x = u + y + z$, so wird $x^2 = u^2 + y^2 + z^2 + 2(uy + uz + yz)$ und $x^4 = (u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2 + y^2 + z^2)(uy + uz + yz) +$

$4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + 8uyzx$ [wegen (2)]; diese Werthe für x^2 und x^4 in (1) substituirt, erhält man:

(3) $(u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + p(u^2 + y^2 + z^2) + r + [4(u^2 + y^2 + z^2) + 2p](uy + uz + yz) + (8uyz + q)x = 0.$

Da die Gleichung (2) unbestimmt ist und noch 2 Bedingungen gestattet, so setze man (4) $4(u^2 + y^2 + z^2) + 2p = 0$ und (5) $8uyz + q = 0$; dadurch geht die vorige Gleichung (3), wenn man zugleich noch für $u^2 + y^2 + z^2$ den aus (4) folgenden Werth $-\frac{p}{2}$ substituirt, in die folgende einfachere über: (6) $u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2 = \frac{1}{16}(p^2 - 4r)$; endlich folgt noch aus (5) die Relation (7) $u^2y^2z^2 = \frac{q^2}{64}$.

Da nun von den 3 Grössen u^2, y^2, z^2 in (4) die Summe der Combinationen zu 1, in (6) die Summe der Combinationen zu 2, und in (7) die Summe der Combinationen zu 3 oder ihr Product ausgedrückt ist; so können diese (§. 166) als die Wurzeln der cubischen oder sogenannten reducirten Gleichung

$$(8) \quad v^3 + \frac{p}{2}v^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)v - \frac{q^2}{64} = 0$$

angesehen werden.

§. **188.** Löst man diese cubische Gleichung nach den vorhergehenden §§. auf, und bezeichnen v_1, v_2, v_3 die 3 Wurzeln derselben; so hat man $u = \pm\sqrt{v_1}$, $y = \pm\sqrt{v_2}$, $z = \pm\sqrt{v_3}$, und zufolge der Gleichung (2):

$$x = \pm\sqrt{v_1} \pm \sqrt{v_2} \pm \sqrt{v_3}.$$

Macht man in dieser letztern Summe hinsichtlich der doppelten Zeichen alle Verbindungen, so findet man darunter nur 8 verschiedene Werthe. Von diesen 8 Werthen für x sind aber bloss 4 als Wurzeln der gegebenen Gleichung brauchbar; man findet diese, wenn man berücksichtiget, dass vermöge der Gleichung (5) das Product aus u, y, z, d. i. aus $\sqrt{v_1}$, $\sqrt{v_2}$, $\sqrt{v_3}$, das entgegengesetzte Zeichen von q erhalten muss.

§. **189.** Man hat also, wenn q positiv ist, nämlich für die Gleichung (a) $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ die Wurzeln:

$$x_1 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}, \quad x_2 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3},$$
$$x_3 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}, \quad x_4 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3},$$

und wenn q negativ ist, oder für die Gleichung (b) $x^4 + px^2 - qx + r = 0$, die Wurzeln:

$$x_1 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}, \quad x_2 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}.$$
$$x_3 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}, \quad x_4 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}.$$

Für die Gleichung $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ ist die reducirte oder cubische Gleichung: $v^3 - \frac{25}{2}v^2 + \frac{769}{16}v - \frac{225}{4} = 0$, und da man für diese die Wurzeln $v_1 = \frac{9}{4}$, $v_2 = 4$, $v_3 = \frac{25}{4}$ findet; so erhält man aus den der Gleichung (a) zukommenden Wurzeln: $x_1 = -6$, $x_2 = +3$, $x_3 = +2$, $x_4 = +1$ als Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Eben so findet man für die Gleichung $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$, welche (§ 173) vom 2. Gliede befreit in jene

$$y^4 - \frac{11}{8}y^2 - \frac{3}{8}y + \frac{45}{256} = 0,$$

so wie diese, wenn (§. 175) die Brüche weggeschafft werden, in jene $y'^4 - 22y'^2 - 24y' + 45 = 0$ übergeht, als reducirte Gleichung: $v^3 - 11v^2 + 19v - 9 = 0$, dafür die Wurzeln $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 9$, und damit aus den obigen Wurzeln der Gleichung (b):

$$y'_1 = 5, \quad y'_2 = -3, \quad y'_3 = -3, \quad y'_4 = 1;$$

da ferner $y = \frac{1}{4}y'$ und $x = y + \frac{7}{4}$ ist, so erhält man endlich für die Wurzeln der gegebenen Gleichung: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Die reciproken Gleichungen.

§. **190**. Erklärung. Sind in einer Gleichung $X = 0$, welche die Wurzeln α, β, . . . besitzt, auch die reciproken Werthe $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, . . . Wurzeln derselben; so wird die Gleichung eine reciproke genannt und unmittelbar daran erkannt, dass ohne Rücksicht auf die Zeichen, je zwei von den beiden äussern Gliedern des Polynoms gleich weit abstehende Glieder einerlei Coefficienten besitzen.

§. **191**. Es ist also

$$(1) \quad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0$$

die allgemeine Form der reciproken Gleichungen.

Denn ist α eine Wurzel derselben, so hat man

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \ldots \pm A_2 \alpha^2 \pm A_1 \alpha \pm 1 = 0,$$

oder, wenn man durchaus mit $\pm\alpha^n$ dividirt und die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$\frac{1}{\alpha^n} + A_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + A_2 \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \ldots \pm A_2 \frac{1}{\alpha^2} \pm A_1 \frac{1}{\alpha} \pm 1 = 0,$$

woraus sofort folgt, dass in (1) auch $x = \frac{1}{\alpha}$ (§. 148) eine Wurzel ist. Dasselbe gilt auch für eine jede andere Wurzel β, γ u. s. w. der Gleichung (1).

§. **192.** Für eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung hat man, nur die obern Zeichen beibehaltend:

$$(2) \quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_n x^n + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0,$$

oder, wenn man durch x^n dividirt und die Glieder paarweise, nämlich das 1. und letzte, 2. und vorletzte u. s. w. zusammennimmt:

$$(3) \quad \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1 \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + A_2 \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots + A_n = 0.$$

Setzt man nun (4) $x + \frac{1}{x} = y$, so erhält man aus der Entwickelung (α), §. 127, für $a = x$ und $b = \frac{1}{x}$:

$$(5) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = y^n - n y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-6} \text{ etc.},$$

und daraus auch, indem man statt n nach und nach $n-1$, $n-2$ u. s. w. setzt, die Binome $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ u. s. w. durch y ausgedrückt, so, dass wenn man dann die Werthe aller dieser Binome in die Gleichung (3) substituirt, eine Gleichung in y entsteht, welche nur vom n., also halb so hohem Grade als die gegebene Gleichung (2) ist. Lässt sich diese letztere auflösen, so hat man zur Bestimmung der ursprünglichen Wurzeln x aus (4) die Relation:

$$(6) \quad x = \tfrac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 - 4}),$$

so, dass also jede der n Wurzeln y, 2 Wurzeln in x, die zugleich zu einander reciprok sind, liefert, und sonach die $2n$ Wurzeln der Gleichung (2) gefunden sind.

So hat man z. B. für die Gleichung $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$ zuerst

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0,$$

und für $x + \frac{1}{x} = y$, nach der Entwickelung (5) (oder auch davon unabhängig, wenn man die 3. und 2. Potenz macht):

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

(vergl. wegen des Abbrechens dieser Reihe §. 127), also wenn man substituirt und reducirt: $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$. Da diese Gleichung die Wurzeln $y = 1,\ 2,\ 3$ besitzt; so erhält man nach der Relation (6) für $y = 1$:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{-3}};$$

für $y = 2$:

$$x_3 = \frac{2 + 0}{2} = 1, \quad x_4 = \frac{2 - 0}{2} = \frac{1}{1};$$

und für $y = 3$:

$$x_5 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_6 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

als Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. **193.** Zusatz. Haben die gleichen numerischen Coefficienten verschiedene Zeichen, wie z. B. in $x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$ (wo also der mittlere Coefficient, da ihm gleichzeitig beide Zeichen zukommen, Null sein muss); so folgt zuerst aus der genannten Vereinigung der Glieder oder der Darstellung:

$$(x^6 - 1) + A_1 x(x^4 - 1) + A_2 x^2 (x^2 - 1) = 0,$$

dass diese Gleichung durch $x^2 - 1$ theilbar ist, ihr also die beiden Wurzeln $x = \pm 1$ zukommen. Führt man aber die Division aus, so kommt man wieder auf eine reciproke Gleichung, und zwar von der im vorigen §. behandelten Eigenschaft. Dieser Quotient ist für die vorige Gleichung:

$$x^4 + A_1 x^3 + (1 + A_2) x^2 + A_1 x + 1 = 0.$$

§. **194.** Ist die reciproke Gleichung von ungerader Ordnung, so hat diese, wie leicht zu sehen, je nachdem

die gleichen numerischen Coefficienten gleiche oder verschiedene Zeichen haben, zuerst die Wurzel -1 oder $+1$, und man erhält, wenn das Polynom beziehungsweise (§. 159) durch $x \pm 1$ getheilt wird, wie man ganz einfach findet, als Quotienten das Polynom einer reciproken Gleichung von gerader Ordnung, die man sofort nach den beiden vorigen §§. weiter behandeln wird.

So ist für die Gleichung $3x^5 - x^4 - 18x^3 - 18x^2 - x + 3 = 0$ zuerst $x_1 = -1$ eine Wurzel, und man erhält daraus durch die Division mit $x + 1$ die reciproke Gleichung gerader Ordnung: $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$, welche nach §. 192 behandelt, noch die Wurzeln $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{-1}$, $x_4 = 3$ und $x_5 = \frac{1}{3}$ liefert.

Eben so erhält man für die Gleichung

$$x^5 - \tfrac{7}{3}x^4 - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{10}{3}x^2 + \tfrac{7}{3}x - 1 = 0$$

zuerst die Wurzel $x_1 = 1$, und dann aus der durch Division mit $x - 1$ entstehenden reciproken Gleichung

$$x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{14}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + 1 = 0$$

nach §. 192 noch die Wurzeln -1, $\frac{1}{-1}$, 3 und $\frac{1}{3}$.

Anmerk. Da wir von den zunächst hieher gehörigen binomischen Gleichungen $x^n \pm A = 0$, welche sich mit Hilfe der reciproken Gleichungen allgemein bis zum 10. Grad auflösen lassen [I., 124], weiter unten (im zehnten Capitel) die ganz allgemeine Auflösung geben werden; so können wir diese hier vorläufig übergehen.

Auflösung der numerischen Gleichungen.

§. 195. Erklärung. Sind die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ einer höhern Gleichung in Zahlen gegeben, so nennt man die Gleichung eine numerische Gleichung, zu deren vollständigen oder näherungsweisen Auflösung (da die allgemeine Auflösung der Gleichungen bis jetzt noch nicht über die Gleichung des 4. Grades hinausreicht) die Analysten sofort verschiedene, mehr oder weniger scharfsinnige, Methoden erfunden haben.

Grenzen der reellen Wurzeln.

§. 196. Erklärung. Liegen die positiven Wurzeln einer Gleichung zwischen den beiden (positiven) Zahlen g und G, so heissen diese Zahlen Grenzen der positiven

Wurzeln; man setzt aber dabei immer voraus, dass g und G die Wurzeln, wenigstens in ganzen Zahlen, so eng wie möglich einschliessen, g also (in der Voraussetzung von $g < G$) so gross, und G so klein als möglich sei. (So wären in diesem Sinne $g = 4$ und $G = 10$ die Grenzen der positiven Wurzeln einer Gleichung, welche die positiven Wurzeln 4·2, 6 und 9·6 besitzt.)

Bezeichnet man eben so die Grenzen der negativen Wurzeln durch g' und G', wo, vom Zeichen abstrahirt, $g' < G'$ ist; so heissen auch G und G' die obern oder äussern, und g und g' die untern oder innern Grenzen. Gewöhnlich, besonders wenn G und G' nicht weit von einander abstehen, lässt man die Nulle für die gemeinschaftliche innere Grenze gelten.

§. **197**. Unter allen Methoden, die obere Grenze der positiven Wurzeln einer Gleichung $X = 0$ im obigen Sinne zu finden, ist folgende (von Newton herrührende) die sicherste:

Man verwandle die Gleichung $X = 0$ durch Substitution von $x = y + a$ (§. 172) in jene $Y = 0$, und suche die kleinste ganze Zahl für a, für welche die sämmtlichen Coefficienten T_1, T_2, ... T_n dieser transformirten Gleichung

$$Y = y^n + T_1 y^{n-1} + T_2 y^{n-2} + \ldots + T_n = 0$$

positiv ausfallen; so werden die sämmtlichen durch $y = x - a$ dargestellten Wurzeln dieser letztern Gleichung (§. 168, Anmerkung 1.) negativ, folglich ist $a > x$, d. i. bei diesem kleinsten Werth dennoch grösser, als jede positive Wurzel der Gleichung $X = 0$.

§. **198**. Zur Bestimmung der untern Grenze g der positiven Wurzeln der Gleichung $X = 0$ verwandle man diese durch Substitution von $x = \frac{1}{y'}$ in jene $Y' = 0$, und suche für diese Gleichung wieder (nach dem vorigen §.) die obere Grenze $'G$ der positiven Wurzeln y'; so ist $g = \frac{1}{'G}$ eine Zahl, kleiner als die kleinste Wurzel x der Gleichung $X = 0$, und zwar wieder im obigen Sinne (§. 196).

§. **199.** Um endlich die beiden Grenzen G', g' der negativen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ zu bestimmen, verwandle man diese (§. 168) in jene $\underline{X} = 0$ mit entgegengesetzten Wurzeln, und suche für diese nach den beiden vorigen §§. wieder die beiden Grenzen L, l der positiven Wurzeln; so hat man sofort $G' = L$ und $g' = l$.

So findet man z. B. für die Gleichung $x^4 - 2x^3 - 54x^2 - 30x + 189 = 0$ die Grenzen $G = 9$, $G' = 6$, $g = 1$, $g' = 2$; und in der That, die Wurzeln dieser Gleichung sind: 1·6055, 8·4774, — 5 6060, — 2·4770.

Das Aufsuchen der *rationalen* Wurzeln.

§. **200.** Lehrsatz. Die rationalen Wurzeln einer geordneten Gleichung, deren Coefficienten durchaus ganze Zahlen sind, können nur ganze Zahlen und keine Brüche sein.

Denn es sei $\frac{\alpha}{\beta}$ ein zur kleinsten Benennung gebrachter Bruch, und wenn es möglich ist, $x = \frac{\alpha}{\beta}$ eine Wurzel der nach §. 146 geordneten Gleichung $X = 0$ von durchaus ganzen Coefficienten; so hat man, wenn dieser Werth in X substituirt und dann durchaus mit β^{n-1} multiplicirt wird:

$$\frac{\alpha^n}{\beta} + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} \beta + \ldots + A_n \beta^{n-1} = 0;$$

eine Gleichung, welche unmöglich bestehen kann, weil sich sonst die Summe von ganzen Zahlen und einem Bruche auf Null reduciren könnte.

§. **201.** Hat man daher die gegebene numerische Gleichung nach §. 146 geordnet, und die etwa vorhandenen Brüche nach §. 175 weggeschafft; so müssen die rationalen Wurzeln dieser Gleichung ganze Zahlen und überdiess (§. 166) Factoren des letzten Gliedes A_n sein. Zerlegt man demnach das letzte Glied des Polynoms in seine einfachen und zusammengesetzten Factoren und setzt diese nach und nach für x, und zwar, wenn das Polynom X Zeichenwechsel und Zeichenfolgen besitzt (§. 170), sowohl positiv als auch negativ genommen; so sind jene Factoren, welche dabei X auf Null bringen, Wurzeln der gegebenen Gleichung $X = 0$. Um

indess dieses Verfahren, welches, wenn A_n aus sehr vielen Factoren besteht, ziemlich ermüdend werden kann, zu vereinfachen, dienet folgende Betrachtung.

§. **202.** Es sei, um nur die Ideen festzusetzen, die Gleichung gegeben: $x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$, und α eine Wurzel derselben; so folgt: $A_3 = - A_2\alpha - A_1\alpha^2 - \alpha^3$. Da nun der 2. oder der Theil rechts dieser Gleichung durch α theilbar ist, so muss es auch der 1. sein, d. h. es muss $A_3 : \alpha = B$ eine ganze Zahl sein; es folgt also weiters, wenn man wirklich dividirt: $B + A_2 = - A_1 \alpha - \alpha^2$. Da auch hier wieder der Theil rechts durch α theilbar ist, so muss gleichfalls $(B + A_2) : \alpha = C$ eine ganze Zahl sein, und man erhält nach der Division: $C + A_1 = - \alpha$. Aus gleichem Grunde muss auch $(C + A_1) : \alpha = D$ eine ganze Zahl sein, und man erhält, nachdem wirklich durch α getheilt worden: $D + 1 = 0$. Man wird also, da sich diese Schlüsse auf eine jede Gleichung anwenden lassen, nachdem die Zahlen ± 1 auf gewöhnliche Art probirt worden, von den Factoren des letzten Gliedes sogleich jene als unbrauchbar oder Nichtwurzeln weglassen, welche bei diesem Vorgange die von der Zahl α so eben angeführten Bedingungen nicht erfüllen.

So findet man nach diesem Verfahren, dass in der Gleichung $x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 63x + 90 = 0$ von den Factoren des letzten Gliedes 90, d. i. 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 nur jene: $+1$, -3, $+5$, -6 Wurzeln derselben sind. Denn man hat z. B.

$$\frac{+90}{-3} = -30, \quad -30 - 63 = -93, \quad \frac{-93}{-3} = 31, \quad 31 - 31 = 0,$$

$$\frac{0}{-3} = 0, \quad 0 + 3 = 3, \quad \frac{3}{-3} = -1 \text{ und } -1 + 1 = 0;$$ also -3 eine Wurzel. Dagegen $\frac{+90}{6} = 15$, $15 - 63 = -48$, $\frac{-48}{6} = -8$, $-8 - 31 = -39$, aber -39 durch 6 nicht theilbar; also ist 6 keine Wurzel u. s. w.

§. **203.** Hat man auf diesem Wege nicht alle Wurzeln einer Gleichung finden können, so ist es möglich, dass sie gleiche Wurzeln besitzt. Diese können nach §. 179 oder noch einfacher dadurch erhalten werden, dass man die Gleichung durch die aus den bereits gefundenen Wurzeln

α, β, ... gebildeten Factoren $x-\alpha$, $x-\beta$, ... (§. 159) dividirt, und die als Quotient entstehende Gleichung neuerdings nach dem vorigen §. behandelt; dieses Verfahren aber überhaupt so oft als nöthig wiederholt.

So findet man z. B. nach der Verfahrungsweise des vorigen §. für die Gleichung $x^5-4x^4+x^3+10x^2-4x-8=0$ zuerst nur die beiden Wurzeln $x=-1$ und $x=2$. Dividirt man aber die Gleichung durch $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$, so erhält man als Quotient die Gleichung $x^3-3x^2+4=0$, und für diese neuerdings die Wurzeln $x=-1$ und $x=2$. Theilt man daher diese letztere Gleichung abermals durch x^2-x-2, so entsteht die Gleichung $x-2=0$, aus welcher man die letzte Wurzel $x=2$ findet. Es sind demnach die Wurzeln der gegebenen Gleichung: -1, -1, 2, 2, 2.

§. **204.** Hat man von einer gegebenen Gleichung alle Wurzeln bis auf 2 gefunden, so erhält man diese letztern immer dadurch, dass man die als Quotienten entstehende quadratische Gleichung, wenn man die gegebene durch das Product der aus den bereits gefundenen Wurzeln gebildeten einfachen Factoren dividirt, nach der Regel auflöst.

So findet man für die Gleichung $x^3-30x-56=0$ nach §. 202 nur die einzige Wurzel $x=-4$. Dividirt man aber diese Gleichung durch $x+4$, so erhält man als Quotient die quadratische Gleichung $x^2-4x-14=0$, welche, nach der Regel aufgelöst, noch die beiden Wurzeln $x=2+\sqrt{18}$ und $x=2-\sqrt{18}$ liefert, so, dass also die 3 Wurzeln der gegebenen Gleichung sind: -4, $2+3\sqrt{2}$, $2-3\sqrt{2}$ *).

*) Zur Auffindung der rationalen Wurzeln einer numerischen Gleichung kann man sich auch des nachstehenden praktischen Verfahrens bedienen, welches eben so einfach als sinnreich ist. Dasselbe ergibt sich ganz kurz aus folgenden Betrachtungen:

Sind α_1, α_2, ... α_n die Wurzeln der Gleichung $X=0$, also $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, ... $-\alpha_n$ jene der Gleichung $\underline{X}=0$ (§. 168), ist also $X=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=0$ und $\underline{X}=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n)=0$, so setze man die aus der Substitution von $x=1$ entstehenden Polynome:

$X=1+A_1+\ldots+A_n=(-1)^n(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)\ldots(\alpha_n-1)=S_1$ u.
$\underline{X}=1-A_1+\ldots+(-1)^n A_n=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)=S_2$.

Soll nun z. B. α_m eine rationale Wurzel der Gleichung $X=0$ sein, so muss nicht nur α_m ein Factor des letzten Gliedes A_n, sondern, wenn α_m positiv ist, α_m-1 ein Factor in S_1, und α_m+1

Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.

§. **205**. Hat man alle rationalen Wurzeln einer Gleichung nach dem Vorhergehenden gefunden, diese durch das Product der daraus entspringenden einfachen Factoren dividirt und als Quotienten die Gleichung $X = 0$ erhalten; so kann diese Gleichung, soferne dieselben nicht imaginär sind, nur mehr irrationale Wurzeln enthalten. Um diese zu finden, sucht man, besonders wenn das letzte Glied A_n aus vielen Factoren besteht (§§. 197, 199), die äussern Grenzen

ein Factor in S_2, dagegen wenn α_m negativ ist, $\alpha_m + 1$ ein Factor in S_1, und $\alpha_m - 1$ ein Factor in S_2 sein, so, dass also in diesen beiden Fällen die 3 Zahlen $\alpha_m - 1$, α_m, $\alpha_m + 1$ beziehungsweise eine steigende oder fallende Reihe bilden.

Man wird sonach zur Aufsuchung der rationalen Wurzeln der Gleichung $X = 0$, aus dieser und jener $\underline{X} = 0$ die Summen S_1 und S_2 bilden (wäre S_1 oder $S_2 = 0$, so wäre beziehungsweise α_m oder $-\alpha_m = 1$ eine Wurzel), diese, so wie auch A_n in die einfachen und zusammengesetzten Factoren auflösen und nachsehen, ob nicht irgend einem Factor α_m von A_n zwei unmittelbar anliegende, nur um eine Einheit verschiedene Factoren von S_1 und S_2 entsprechen, indem nur ein so beschaffener Factor α_m eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ sein kann und sofort zu versuchen ist, alle übrigen aber ausgeschlossen sind; und zwar versucht man diesen Factor α_m mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem diese 3 erwähnten Zahlen, als Factoren von S_1, A_n, S_2 in dieser Ordnung eine steigende oder fallende Reihe bilden.

So ist z. B. für die Gleichung $x^5 - 2x^4 - 57x^3 + 194x^2 + 56x - 192 = 0 \ldots (1)$ sofort $S_1 = 0$, also $x = 1$ eine Wurzel. Wird durch $x - 1$ dividirt (was am einfachsten geschieht, wenn man bemerkt, dass die algebraische Summe der ersten m Coefficienten dieser Gleichung den m^{ten} Coefficienten der neuen Gleichung gibt), so erhält man jene $x^4 - x^3 - 58x^2 + 136x + 192 = 0 \ldots (2)$.

Ferner ist in der gegebenen Gleichung $S_2 = 0$, also auch $x = -1$ eine Wurzel derselben [so wie natürlich auch dieser Gleichung (2)], oder $x = 1$ eine Wurzel der Gleichung $x^4 + x^3 - 58x^2 - 136x + 192 = 0$, woraus man wieder durch Division mit $x - 1$ jene $x^3 + 2x^2 - 56x - 192 = 0$ oder die Gleichung $x^3 - 2x^2 - 56x + 192 = 0 \ldots (3)$ erhält, welche entsteht, wenn man die Gleichung (2) mit $x + 1$ oder die ursprüngliche (1) durch $(x - 1)(x + 1)$ dividirt.

Für diese letztere Gleichung ist aber weiters:
$S_1 = 135 = 1.3.3.3.5$, $A_n = 192 = 1.2.2.2.2.2.2.3$, $S_2 = 245 = 1.5.7.7$.

G, G' der positiven und (wenn, §. 170, solche vorhanden sein können) der negativen Wurzeln, substituirt in X für x nach und nach die Werthe 0, 1, 2, ... G und 0, -1, -2, ... $-G'$, und beobachtet die dadurch in X entstehenden Zeichenwechsel; ändert nämlich X für $x=a$ und $x=a+1$ sein Zeichen, so liegt (§. 152) zwischen diesen beiden Zahlen a und $a+1$ wenigstens eine reelle Wurzel. Bei diesen Substitutionen hat nun entweder das Polynom X sein Zeichen *A.* so oftmal geändert, als der Ordnungs-Exponent n der Gleichung Einheiten hat, d. i. es haben sich die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $X=0$ verrathen, oder es findet dieses *B.* nicht Statt; beide diese Fälle sollen besonders behandelt werden.

A. Wenn sich eben so viele Wurzeln zu erkennen geben, als n Einheiten besitzt.

§. **206.** In diesem Falle liegt zwischen zwei solchen auf einander folgenden Substitutionen $x=a$ und $x=a+1$, die in X einen Zeichenwechsel bewirken, nur immer eine Wurzel, und man kann diese durch einige Zwischensubstitutionen sehr leicht zwischen zwei, höchstens um $\frac{1}{10}$ von einander abstehende Grenzen einschliessen. Liegt also die

Nimmt man nun in derselben Ordnung aus jeder dieser 3 Grössen einen Factor, so sieht man leicht, dass sich nur die 4 Gruppen

3, 2, 1, 3, 4, 5, 9, 8, 7, 5, 6, 7

von der oben erwähnten Eigenschaft bilden lassen, so, dass also bloss die Zahlen -2, $+4$, -8 und $+6$ Wurzeln der betreffenden Gleichung (3) sein können und zu versuchen sind. Man findet in der That dafür die Wurzeln $+4$, -8 und $+6$.

Für die Gleichung $x^4-3x^3-6x^2+28x-24=0$ erhält man

$$S_1=4=1.2.2,\quad A_n=24=1.2.2.2.3,\quad S_2=54=1.2.3.3.3,$$

so dass man hier nur die Zahlen $+2$, $+2$, $+2$, -3 zu versuchen braucht, welche auch in der That sämmtlich Wurzeln dieser Gleichung sind, so, dass diese Methode zugleich auch eben so einfach die wiederholten Wurzeln gibt.

Für die Gleichung endlich $x^4-113x^3+11x^2-120x+360=0$ folgt

$$S_1=139,\quad A_n=360,\quad S_2=605,$$

woraus man ohne Mühe ersehen kann, dass diese Gleichung keine rationale Wurzel besitzt.

betreffende Wurzel bereits zwischen a und $a+\frac{1}{10}$, so setzt man nach der von Newton angegebenen Näherungsmethode $x=a+y$, wobei nun $y<\frac{1}{10}$ ist; man erhält durch diese Substitution in $X=0$ (§. 149):

$$X+X_1 y+X_2 y^2+\ldots+X_{n-1}y^{n-1}+y^n=0,$$

dabei die Polynome X, X_1, ... so verstanden, dass überall a statt x gesetzt wird. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man, da es sich nur um einen Näherungswerth handelt, die höhern Potenzen von y vernachlässiget: $X+X_1 y=0$ oder

(α) $y=-\frac{X}{X_1}$.

Diesen Werth für y in $x=a+y$ substituirt, erhält man (im Allgemeinen) für x schon einen etwas genaueren Werth, welchen man für a gelten lässt und damit aus derselben Formel (α) ein noch genaueres y berechnet, wodurch auch das neue $x=a+y$ dem wahren Werthe wieder näher gebracht wird, u. s. w.

So findet man z. B. für die Gleichung $x^3-5x-3=0$ sofort: $G=3$, $G'=2$, und für $x=-2, -1, 0, +1, +2, +3$ beziehungsweise $X=-1, +1, -3, -7, -5, +9$, so, dass also eine Wurzel zwischen $+2$ und $+3$, eine zweite zwischen -2 und -1, und endlich die dritte zwischen -1 und 0 liegt. Setzt man, um hier nur die Rechnung für die positive Wurzel durchzuführen, $x=2{\cdot}5$; so findet man dafür $X=+{\cdot}125$, folglich liegt diese Wurzel zwischen 2 und 2·5. Für $x=2{\cdot}4$ dagegen erhält man $X=-1{\cdot}176$, also liegt diese Wurzel zwischen 2·4 und 2·5 und kann sonach von keinem dieser beiden Werthe um $\frac{1}{10}$ mehr verschieden sein. Nimmt man daher in der obigen Formel (α) $x=2{\cdot}4$, so erhält man daraus $y=\frac{1{\cdot}176}{12{\cdot}28}={\cdot}0958$ und damit $x=2{\cdot}4+{\cdot}0958=2{\cdot}4958$. Setzt man weiters in der nämlichen Formel $a=2{\cdot}496$, so folgt $y=-{\cdot}005122$ und damit $x=2{\cdot}496-{\cdot}005122=2{\cdot}490878$. Für $a=2{\cdot}49087$ wird wieder $y=-{\cdot}0^5 6038$ *) und $x=2{\cdot}49086396$, ein Werth, welcher schon bis einschliessig zur 6. Decimalziffer richtig ist.

Anmerk. 1. Da man sich bei Anwendung dieser Newton'schen Näherungsmethode, und einer gewissen Beschaffenheit der Gleichung $X=0$, im Verlaufe der Rechnung vom wahren Werthe wieder entfernen kann **), so muss man sich dabei von Zeit zu Zeit von dem

*) Der Kürze wegen schreiben wir ${\cdot}0^5 6$ statt ·000006, ${\cdot}0^2 8$ statt ·0008 etc.

**) Worauf Lagrange zuerst (1798) aufmerksam machte. M. s. auch Fourier: Analyse des équations déterminées. Paris 1831.

Grade der Annäherung überzeugen. Dazu dienet die Bemerkung, dass, wenn die m. Decimalziffer noch richtig ist, das Polynom X sofort sein Zeichen ändern muss, wenn man diese Ziffer um eine Einheit vergrössert.

Anmerk. 2. In manchen Fällen kann die Trennung der Wurzeln noch durch folgende Betrachtungen vereinfacht werden.

Besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln, wovon p positiv (die negativen Wurzeln können, da sie auf den Zeichenwechsel keinen Einfluss haben, dabei unberücksichtigt bleiben) sein, und wie sie in ihrer Grösse auf einander folgen, durch w_1, w_2, w_3, ... bezeichnet werden sollen. Verwandelt man diese Gleichung nach §. 172 in jene $f(x+a) = 0$... (1) und dann auch in $f(x+b) = 0$ (2), deren Wurzeln beziehungsweise um a und b kleiner sind, als jene der ursprünglichen Gleichung, und ist dabei $b > a$, wobei wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen wollen, dass a zwischen w_1 und w_2, und b zwischen w_3 und w_4 liegen soll, so dass man die steigende Reihe $w_1\ a w_2\ w_3\ b w_4$... hat; so folgt, dass die Gleichung (1), da die Wurzel $w_1 - a$ negativ wird, um einen, und die Gleichung (2), da die Wurzeln $w_1 - b$, $w_2 - b$ und $w_3 - b$ negativ ausfallen, um 3 Zeichenwechsel weniger als die ursprüngliche Gleichung $f(x) = 0$ hat; diese beiden Gleichungen besitzen also beziehungsweise $p - 1$ und $p - 3$ Zeichenwechsel, deren Differenz $(p-1) - (p-3) = 2$ sofort die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln angibt.

Hätte die Gleichung $f(x) = 0$ gleiche oder wiederholte Wurzeln, so würde dies nichts ändern; denn besitzt diese Gleichung z. B. die Wurzeln $w_1, w_2, w_2, w_2, w_3, w_3, w_4, \ldots$ — und liegt a zwischen w_1 und w_2, und b zwischen w_3 und w_4, so dass man hat $w_1\ a\ w_2\ w_2\ w_2\ w_3\ w_3\ b\ w_4 \ldots$; so wird die Gleichung (1) um 1, und jene (2) um 6 Zeichenwechsel weniger, als die ursprüngliche Gleichung, d. h. diese werden beziehungsweise $p - 1$ und $p - 6$ Wechsel besitzen, deren Differenz $(p-1) - (p-6) = 5$ wieder, wie zuvor die Anzahl der zwischen a und b liegenden Wurzeln anzeigt.

Hat also die Gleichung (1) n, und jene (2) m Zeichenwechsel, so besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ $(n - m)$ zwischen a und b liegende Wurzeln.

Da eine Gleichung, in welcher auch imaginäre Wurzeln vorkommen, weniger positive Wurzeln besitzen kann, als in dem Polynom $f(x)$ Zeichenwechsel erscheinen, so kann man in einem solchen Falle nur sagen, dass, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ n zwischen a b liegende reelle Wurzeln besitzt, sofort die Gleichung (1) wenigstens um n Zeichenwechsel mehr, als jene (2) haben müsse.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dass, wenn man bei dem allmäligen Fortschreiten zuletzt $b > w_n$ gemacht hat, wo w_n die grösste in der Gleichung $f(x) = 0$ vorkommende positive Wurzel

sein soll, und wenn diese Gleichung nur reelle Wurzeln besitzt, sofort kein Zeichenwechsel mehr in $f(x+b)$ vorkommt, also auch keine positive Wurzel über b hinaus liegen kann.

§. **207.** In allen Fällen bestimmt zum Ziele führend, jedoch auch beschwerlicher, ist folgende von Lagrange herrührende Näherungsmethode:

Liegt die zu berechnende Wurzel zwischen a und $a+1$, so setze man in der Gleichung $X=0$ sofort $x=a+\frac{1}{y}$, wobei also $y>1$ und positiv sein muss. Die durch diese Substitution entstehende Gleichung (§. 149, wenn man zur Wegschaffung der Brüche sogleich mit y^n multiplicirt), nämlich

$$Xy^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + 1 = 0$$

(die Polyn. X, X_1, ... wieder so genommen, dass man statt x, a setzt) oder $Y=0$ besitzt, da zufolge der Annahme zwischen a und $a+1$ nur eine Wurzel liegt, nur eine positive reelle Wurzel grösser als 1. Liegt diese zwischen b und $b+1$, so setze man $y=b+\frac{1}{y'}$, wo also wieder $y'>1$ und positiv ist; dadurch erhält man auf ähnliche Art die transformirte Gleichung $Y'=0$, welche wieder nur eine einzige Wurzel von der bemerkten Beschaffenheit, d. i. positiv und >1, haben kann. Liegt diese zwischen c und $c+1$, so setze man in der letzten Gleichung $y'=c+\frac{1}{y''}$, so wird abermals y'' positiv und >1 sein u. s. w. Man erhält auf diese Weise:

$$y''=d+,\quad y'=c+\cfrac{1}{d+},\quad y=b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+}},$$

und endlich

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+}}},$$

wobei man nach den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche ganz sicher den Werth von x um so genauer erhält, je weiter man diese Kette, also das vorige Verfahren, fortsetzt. Wäre die Wurzel x rational, so würde der Kettenbruch abbrechen, während er sonst ein unendlicher ist.

Wendet man diese Methode auf das vorige Beispiel $x^3 - 5x - 3 = 0$, und zwar wieder auf die Berechnung der zwischen 2 und 3 liegenden Wurzel an; so hat man $x = 2 + \frac{1}{y}$ gesetzt: $Y = 5y^3 - 7y^2 - 6y - 1 = 0$, und auch hier liegt die einzige (wie auch nach §. 170 erhellt) positive Wurzel, wie man (§. 152) leicht findet, zwischen 2 und 3. Setzt man daher in dieser Gleichung $y = 2 + \frac{1}{y'}$, so geht diese über in $Y' = y'^3 - 26y'^2 - 23y' - 5 = 0$; da man ferner findet, dass die positive Wurzel dieser neuen Gleichung zwischen 26 und 27 liegt, so setze man darin $y' = 26 + \frac{1}{y''}$, wodurch man die Gleichung $Y'' = 603y''^3 - 653y''^2 - 52y'' - 1 = 0$ erhält, deren positive Wurzel zwischen 1 und 2 liegt. Setzt man daher in dieser $y'' = 1 + \frac{1}{y'''}$, so entsteht die Gleichung

$$Y''' = 103y'''^3 - 451y'''^2 - 115y''' - 603 = 0,$$

deren positive Wurzel zwischen 6 und 7 liegt u. s. w. Man hat daher

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + .}}}}}$$

Dieser Kettenbruch liefert der Reihe nach die Näherungsbrüche: $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383}, \frac{2999}{1204}$, von denen der letzte, gegen den wahren Werth etwas zu gross, in einen Decimalbruch verwandelt, sofort $x = 2{\cdot}49086378$, also einen Näherungswerth gibt, welcher nach der Theorie der Kettenbrüche vom wahren Werthe um weniger als $\frac{1}{(1204)^2} = {\cdot}0^6 7$ abweicht, also wenigstens noch in den 6 ersten Decimalstellen richtig sein muss. (Vergl. Beisp. in §. 206.)

Für die beiden übrigen Wurzeln dieser Gleichung findet man nach der einen oder andern Methode

$$x = -1{\cdot}8342431 \quad \text{und} \quad x = -{\cdot}6566204 \text{ *)}.$$

§. **208.** Den ersten Rang, die reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung näherungsweise zu finden, nimmt jedoch die von Horner **) angegebene Methode ein, weil

*) Zur Berechnung der negativen Wurzeln kann man die gegebene Gleichung in jene $\underline{X} = 0$ mit entgegengesetzten Wurzeln verwandeln, und in dieser letztern wieder, wie oben, die positiven Wurzeln aufsuchen.

**) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vom Jahre 1819.

sie, nach einer bestimmten systematischen Ordnung fortschreitend, nicht nur eben so verlässlich und bestimmt, wie die Lagrange'sche Methode dem Ziele mit jedem Schritte näher kommt, sondern dabei weit einfacher und für die praktische Berechnung bequemer ist.

Dieser Horner'schen Näherungsmethode liegt die Idee zum Grunde, dass wenn die zur Auflösung gegebene Gleichung $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$ (1), in jene $f(x+a) = 0$ verwandelt wird, deren Wurzeln also sämmtlich (§. 172) um a kleiner sind, und man dabei a so wählt, dass in der transformirten Gleichung

$$f(x+a) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \ldots (2)$$

das letzte Glied $a_n = 0$, oder da dies bei irrationalen Wurzeln nicht absolut möglich ist, so klein wird, dass man es als Null ansehen kann, sofort $x = 0$ eine Wurzel der Gleichung (2) und daher, weil die Wurzeln der Gleichung (1) sämmtlich um a grösser, als jene der Gleichung (2) sind, $x = a$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung (1) ist.

Vermindert man daher, was am einfachsten nach dem in der Anmerkung des §. 172 angegebenen Verfahren geschieht, die Wurzeln der Gleichung (1) allmälig um die Grössen $a, a', a'' \ldots$ auf solche Weise, dass sich dadurch das letzte Glied a_n der transformirten Gleichung (2) immer mehr und mehr der Nulle nähert, so sind diese Grössen $a, a', a'' \ldots$ Näherungswerthe einer Wurzel der Gleichung (1), wovon jeder folgende immer genauer, als der nächst vorhergehende ist.

Das erwähnte systematische Verfahren, diese Näherungswerthe $a, a', a'' \ldots$ zu finden, soll durch einige Beispiele erläutert werden.

Ist z. B. die Gleichung $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 148{\cdot}6 = 0 \ldots$ (1) zur Auflösung gegeben, so findet man, wenn man $x = 0, 1, 2, \ldots$ setzt, und die Resultate dieser Substitutionen nach §. 160, Anmerk. 2, sucht, dass eine Wurzel zwischen 2 und 3, und zwar näher an 3, als an 2 liegt.

Anstatt nun, wenn die nächste Decimalziffer $= \alpha$ ist, in dieser Gleichung (1) die Zahl $2{\cdot}\alpha$ zu versuchen, ist es bequemer, diese Gleichung

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln sämmtlich um 2 kleiner sind, und dann diese transformirte Gleichung weiter aufzulösen. Nun hat man aber nach dem im §. 172 in der Anmerkung angegebenen Verfahren für diese Transformation:

1,	3,	2,	6,	— 148·6
	5,	12,	30,	[— 88·6]
	7,	26,	[82]	
	9,	[44]		
	[11]			

also für die gesuchte Gleichung $x^4 + 11x^3 + 44x^2 + 82x - 88{\cdot}6 = 0$ (2), so, dass wenn man das letzte Glied derselben für Null könnte gelten lassen, sofort auch, da die Wurzeln der Gleichung (1) um 2 grösser, als jene dieser Gleichung (2) sind, $x = 2$ eine (approximative) Wurzel der Gleichung (1) wäre.

Um nun die zweite Ziffer, d. i. die erste Decimalstelle α der gesuchten Wurzel $x = 2{\cdot}\alpha\beta$. . oder die erste Ziffer $\cdot\alpha$ der Wurzel dieser transformirten Gleichung (2) zu finden, so thut man am besten, diese noch auf gewöhnliche Weise, durch das Substitutionsverfahren (§. 160, Anm. 2) zu bestimmen, und das eigentliche Horner'sche Verfahren erst mit der zweiten Decimalstelle β zu beginnen.

Nun erhält man aber nach dem erwähnten Verfahren:

	1,	11,	44,	82,	— 88·6
$x = {\cdot}6$	1,	11·6,	50·96,	112·576,	[— 21·0544]
$x = {\cdot}7$	1,	11·7,	52·19,	118·533,	[— 5·6269]
$x = {\cdot}8$	1,	11·8,	53·44,	124·752,	[+ 11·2016]

so, dass also die Wurzel zwischen ·7 und ·8 liegt, oder $\alpha = 7$ und $x = 2{\cdot}7$ ist.

Um die folgende Decimalziffer β zu finden, verwandle man zuerst die Gleichung (2) in eine andere, deren Wurzeln um ·7 kleiner, als die Wurzeln dieser Gleichung (2) sind, so hat man (§. 172, Anmerk.)

	1,	11,	44,	82,	— 88·6
·7	1,	11·7,	52·19,	118·533,	[— 5·6269]
		12·4,	60·87,	[161·142]	
		13·1,	[70·04]		
		[13·8]			

also für die transformirte Gleichung sofort:

$$x^4 + 13{\cdot}8x^3 + 70{\cdot}04x^2 + 161{\cdot}142x - 5{\cdot}6269 = 0 \,.\,.\; (3);$$

und es wäre, wenn man hier stehen bleiben und das letzte Glied als Null gelten lassen wollte, die gesuchte Wurzel $x = 2{\cdot}7$, weil diese Gleichung (3) die Wurzel $x = 0$ hätte und die Wurzeln der Gleichung (1) sämmtlich um 2·7 grösser, als die der Gleichung (3) sind.

Um nun diese zweite Decimalstelle β, welches sofort die erste Ziffer dieser Gleichung (3) ist, zu finden, bemerke man, dass weil β in der Stelle der Hundertel steht, die höhern Potenzen von β weggelassen

werden können, und daher diese letzte Gleichung (3) für $x = \frac{\beta}{100}$ den genäherten Werth $161{\cdot}142 \frac{\beta}{100} - 5{\cdot}6269 = 0$ erhält, woraus man

$$\frac{\beta}{100} = \frac{5{\cdot}6269}{161{\cdot}142} = {\cdot}03$$

(also $\beta = 3$) findet, indem es sich hier nur um die genaue Bestimmung der zweiten Decimalstelle, d. i. der Ziffer 3 handelt, die durch Nichts mehr afficirt werden kann.

Mit diesem Werthe von $x = {\cdot}03$ (anstatt dass vorhin $x = 0$ gedacht wurde) ist jetzt der genauere Werth der Wurzel der Gleichung (1) $x = 2{\cdot}73\ldots$

So wie man aber diese zweite Decimalziffer 3 gefunden hat, genau auf dieselbe Weise erhält man auch durch das fortgesetzte Verfahren die dritte, vierte und überhaupt alle folgenden Decimalstellen, welche man noch suchen will. Wir wollen die weiteren Operationen von jetzt an ganz kurz schematisch darstellen.

Die Gleichung (3) in eine andere transformirt, deren Wurzeln um ·03 kleiner sind, gibt:

	1,	13·83,	70·04,	161·142,	— 5·6269
·03		13·83,	70·4549,	163·255647,	[— ·7292306]
		13·86,	70·8707,	[165·381768]	
		13·89,	[71·2874]		
		[13·92].			

Die Coefficienten der gesuchten Gleichung (4) sind also:

1, 13·92 71·2874, 165·381768, — ·7292306

und die nächste Ziffer $\frac{\gamma}{1000} = {\cdot}729 : 165 = {\cdot}004$, also $\gamma = 4$ und $x = 2{\cdot}734\ldots$

Die Wurzeln der Gleichung (4), um ·004 vermindert, gibt

	1.	13·92,	71·2874,	165·381768,	— ·7292306
·004.		13·924,	71·343096,	165·6671404,	[— ·06656204].
		13·928,	71·398808,	[165·9527356]	
		13·932,	[71·454536]		$·000\delta = ·06656 : 165·95 = ·0004$
		[13·936]			also $\delta = 4$ und $x = 2{\cdot}7344$.

Ferner: 1,	13·936,	71·454536,	165·9527356,	— ·06656204
	13·9364,	71·4601106,	165·9813196,	[— ·000169512]
	13·9368,	71·4656853,	[166·00990587]	
·0004	13·9372,	[71·4712602]		
	[13·9376]			

·000169 : 166 = ·000001, also $x = 2{\cdot}734401$.

Ferner: 1,	13·9376,	71·4712602,	166·00990587,	— ·000169512
	13·937601,	71·4712741,	166·00997734,	[— ·000003502]
·000001	13·937602,	71·4712880,	[166·010048]	
				·000003502 : 166 = ·00000002,

also ist bis auf die achte Decimalstelle genau

$$x = 2{\cdot}73440102.$$

Beispiel 2. Auf gleiche Weise erhält man für die Gleichung

$$x^3 - 7x - 7 = 0 \;..\; (1)$$

Da eine Wurzel derselben zwischen 3 und 4, und zwar, wie man sogleich sieht, sehr nahe an 3 liegt:

	1,	0,	— 7,	— 7
	1,	3,	2,	[— 1]
3	1,	6,	[20]	
	1,	[9]		

$$x^3 + 9x^2 + 20x - 1 = 0 \;..\; (2)$$

und da die Wurzel dieser transformirten Gleichung (2) zwischen 0 und ·05 liegt, daher $x = 3{\cdot}04 \,..$ ist:

	1,	9,	20	— 1
		9·04,	20·3616,	[— ·185536]
·04		9·08,	[20·7248]	
		[9·12]		

·185 : 20·7 = ·008

also $x = 3{\cdot}048 \,..$

	1,	9·12,	20·7248,	— ·185536
		9·128,	20·79782,	[— ·0191535]
·008		9·136,	[20·870908]	
		[9·144]		

·01915 : 21 = ·0009

also $x = 3\,0489 \,..$

	1,	9·144,	20 870908,	— ·0191535
		9·1449,	20·879138,	[— ·0003623]
·0009		9·1458,	[20·887369]	
		[9·1467]		·000362 : 21 = ·00001

$x = 3{\cdot}04891$

	1,	9·1467,	20·887369,	— ·0003623
		9·14671,	20·887460,	[— ·00015343]
·00001		9·14672,	[20·887551]	
		[9 14673]		·000153 : 21 = ·000007

$x = 3{\cdot}048917$

	1,	9·14673,	20·887551,	— ·00015343
		9·146737,	20·887615,	[— ·0000068]
		9·146744,	[20·887679]	
				

·0000068 : 21 = ·0000003

also, wenn man hier stehen bleiben will, ist bis auf 7 Decimalstellen genau

$$x = 3{\cdot}0489173.$$

Anmerk. Man bemerkt von selbst, dass bei diesen Substitutionen das letzte Glied der transformirten Gleichungen immer negativ ausfällt,

wäre dies nicht der Fall, so würde es beweisen, dass die Ziffer, um welche man die Wurzeln verkleinert hat, zu gross ist. Dasselbe wäre auch der Fall, wenn überhaupt in diesen transformirten, auf einander folgenden Gleichungen bei irgend einer derselben ein Zeichenwechsel verloren ginge.

Um dieses Verfahren auf die negativen Wurzeln der Gleichung (1) anzuwenden, wird man diese nach §. 168 zuerst in die Gleichung mit entgegengesetzten Wurzeln verwandeln, und nach der eben erläuterten Weise die positiven Wurzeln dieser transformirten Gleichung suchen *).

§. **209.** Ein in der Anwendung ebenfalls sehr geschätztes Verfahren, die Wurzeln nicht bloss algebraischer, sondern selbst transcendenter Gleichungen mit jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen, bietet die sogenannte *Regula falsi* dar; sie besteht in Folgendem:

Sei $x = \omega$ die eben zu berechnende Wurzel der ganz allgemeinen Gleichung (1) $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots = 0$, und es gehe für $x = s_1$ und s_2, y in F_1 und F_2 über; so werden s_1 und s_2 dem wahren Werthe ω um so näher kommen, je weniger F_1 und F_2 von Null verschieden sind, daher $s_1 - \omega = d_1$ und $s_2 - \omega = d_2$ die Fehler der Substitutionen, und $F_1 - 0 = F_1$ und F_2 die Fehler der Resultate bezeichnen.

Weichen nun s_1 und s_2 wenig mehr, etwa um weniger als $\frac{1}{10}$, vom wahren Werthe ω ab, indem sie das Polynom y in (1) schon nahe auf Null bringen; so werden d_1 und d_2 so kleine Grössen sein, dass man bei einer blossen Näherungsrechnung die zweiten und höhern Potenzen davon vernachlässigen kann. Dies vorausgesetzt, hat man aus (1):

$$F_1 = As_1^\alpha + Bs_1^\beta + \ldots \text{ und } F_2 = As_2^\alpha + Bs_2^\beta + \ldots,$$

also auch, wenn man von jeder dieser beiden Gleichungen

*) Weitere und ausführlichere Details mit vielen Beispielen hierüber findet man in Dr. und Prof. L. C. Schulz von Strassnicki's „Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen; Wien, 1842;" so wie in zwei Abhandlungen von S. Spitzer, welcher diese Horner'sche Methode mit dem besten Erfolge auch auf die Berechnung der imaginären Wurzeln, so wie auf die Auflösung höherer numerischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten anwendet (Wien, 1849).

jene $0 = A\omega^\alpha + B\omega^\beta + \ldots\ldots$ abzieht: $F_1 = A(s_1^\alpha - \omega^\alpha) + B(s_1^\beta - \omega^\beta) + \ldots$ und $F_2 = A(s_2^\alpha - \omega^\alpha) + B(s_2^\beta - \omega^\beta) + \ldots$, oder wegen $s_1 = \omega + d_1$, also (mit Rücksicht auf das Gesagte) $s_1^\alpha = (\omega + d_1)^\alpha = \omega^\alpha + \alpha\omega^{\alpha-1} d_1$, $s_1^\beta = \omega^\beta + \beta\omega^{\beta-1} d_1$ u. s. w., und eben so $s_2^\alpha = \omega^\alpha + \alpha\omega^{\alpha-1} d_2$, $s_2^\beta = \omega^\beta + \beta\omega^{\beta-1} d_2$ u. s. f., auch: $F_1 = d_1 (A\alpha\omega^{\alpha-1} + B\beta\omega^{\beta-1} + \ldots.)$ und $F_2 = d_2 (A\alpha\omega^{\alpha-1} + B\beta\omega^{\beta-1} + \ldots)$, daher endlich:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Setzt man in dieser, das Princip der *Regula falsi* darstellenden Relation, statt d_1 und d_2 die gleichgeltenden Werthe $s_1 - \omega$ und $s_2 - \omega$, und bestimmt dann daraus ω; so erhält man, als einen gegen s_1 und s_2 genauern Werth:

$$(2)\ \omega = \frac{s_1 F_2 - s_2 F_1}{F_2 - F_1} = s_1 - \frac{F_1 (s_2 - s_1)}{F_2 - F_1} = s_2 - \frac{F_2 (s_1 - s_2)}{F_1 - F_2}.$$

Ist nun s_2 genauer als s_1, so nimmt man s_2 als erste, und den nach dieser Formel für ω gefundenen Werth als zweite Substitution (s_2), bemerkt wieder die entsprechenden Fehler F_1 (das vorige F_2), F_2, und berechnet mit diesen Elementen nach der nämlichen Formel neuerdings ω, welches Resultat dem wahren Werthe wieder näher kommen wird, als das vorige; und so fährt man fort, bis man ω mit der gewünschten Genauigkeit gefunden hat.

Setzt man im vorigen Beispiel zur Berechnung der zwischen 2·4 und 2·5 liegenden Wurzel der Gleichung $x^3 - 5x - 3 = 0$, $x = s_1 = 2{\cdot}4$ und $s_2 = 2{\cdot}5$; so erhält man $F_1 = -1{\cdot}176$ und $F_2 = {\cdot}125$, mithin nach der obigen Formel (2) näherungsweise $\omega = 2{\cdot}490$. Nimmt man als neue Substitution $s_1 = 2{\cdot}5$ und $s_2 = 2{\cdot}49$, so erhält man $F_1 = {\cdot}125$, $F_2 = -{\cdot}01175$ und damit aus (2) $\omega = 2{\cdot}490859$. Für $s_1 = 2{\cdot}49$ und $s_2 = 2{\cdot}490859$ erhält man weiters $F_1 = -{\cdot}01175$, $F_2 = -{\cdot}00006287$ und damit wieder $\omega = 2{\cdot}4908634$, ein bereits bis auf die sechste Decimalstelle genauer Werth *).

*) Ein zweites nach dieser Methode berechnetes Beispiel einer transcendenten Gleichung, nämlich jener $x^x = 5$, wo man $x = 4{\cdot}3799099$ findet, s. m. B. I. S. 147.

B. Wenn man durch diese Substitutionen *weniger* als *n* Wurzeln entdeckt.

§. **210.** In diesem Falle ist es möglich, dass zwischen zwei auf einander folgenden Substitutionen a und $a+1$, für welche X sein Zeichen ändert (§. 153), mehr als eine, auch, dass zwischen zwei solchen Zahlen, für welche X das Zeichen nicht ändert (§. 154), eine gerade Anzahl von Wurzeln liegt. Besitzt z. B. eine Gleichung die Wurzeln $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$ und $\sqrt{3} = 1{\cdot}733$, so liegen diese zwischen 1 und 2, und werden sich bei den auf einander folgenden Substitutionen von $x = 1, 2, 3, \ldots$ durch keinen Zeichenwechsel von X verrathen. Substituirt man dagegen für x nach und nach eine Reihe von Zahlen, die um weniger als die Differenz $\sqrt{3} - \sqrt{2} = {\cdot}319$, etwa nur um ·3 zunehmen, setzt nämlich nach und nach $x = 1, 1{\cdot}3, 1{\cdot}6, 1{\cdot}9, \ldots$; so ändert X sein Zeichen von 1·3 zu 1·6 und von 1·6 zu 1·9, und man entdeckt nunmehr wirklich die beiden vorhin übergangenen Wurzeln.

Hieraus wird ersichtlich, dass sich überhaupt alle reellen Wurzeln einer Gleichung verrathen müssen, wenn man die für x nach und nach zu substituirenden Zahlen um eine Differenz zunehmen lässt, welche kleiner als die kleinste Differenz der Wurzeln der Gleichung ist. Da man aber die Wurzeln, also auch diese kleinste Differenz, nicht im Voraus kennt; so wird man zur gegebenen Gleichung $X = 0$ (§. 177) die quadrirte Differenzen-Gleichung $Z = 0$, und in dieser (da ihre Wurzeln als Quadrate der Differenzen der reellen Wurzeln von $X = 0$ nur positiv sein können) [§. 198], die untere Grenze g der positiven Wurzeln suchen; dann ist $\delta = \sqrt{g}$ offenbar eine Zahl, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $X = 0$ ist. Man wird daher, wenn g, G, g', G' die Grenzen der positiven und negativen Wurzeln der aufzulösenden Gleichung $X = 0$ sind, und für x nach und nach die Zahlen: $g, g + \delta, g + 2\delta, \ldots G$ und $-g', -(g' + \delta), -(g' + 2\delta), \ldots -G'$ substituirt werden, nothwendig die sämmtlichen reellen Wurzeln dieser Gleichung entdecken.

So findet man z. B. für die Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ die äussern Grenzen: $G = 4$, $G' = 2$, und man wird sonach die Null als gemeinschaftliche innere Grenze gelten lassen. Substituirt man also für x nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 und 0, -1, -2; so erhält das Polynom X der Reihe nach die Zeichen: $- - - - +$ und $- - -$, so, dass man also blos eine Wurzel zwischen $+3$ und $+4$ entdeckt. Um nun zu sehen, ob die beiden übrigen Wurzeln auf diese Weise übergangen worden, oder ob diese imaginär sind, hat man für die quadrirte Differenzengleichung der gegebenen Gleichung (§ 177): $z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$ und in dieser $g = \frac{1}{10}$ als innere Grenze, folglich $\delta = \sqrt{\cdot 10} = \cdot 3$ für die Zahl, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung ist. Setzt man demnach für x nach und nach die Zahlenreihe: 0, $\cdot 3$, $\cdot 6$ etc. und 0, $-\cdot 3$, $-\cdot 6$ etc., so findet man, dass X sein Zeichen für $x = 3$ und $3\cdot 3$ (von $-$ in $+$), für $x = -1\cdot 2$ und $-1\cdot 5$ (von $-$ in $+$) und endlich für $x = -1\cdot 5$ und $-1\cdot 8$ (von $+$ in $-$) ändert, folglich dass eine Wurzel zwischen 3 und $3\cdot 3$, eine zweite zwischen $-1\cdot 2$ und $-1\cdot 5$, und endlich die dritte reelle Wurzel zwischen $-1\cdot 5$ und $-1\cdot 8$ liegt; und in der That, die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind: $x_1 = 3\cdot 048917$, $x_2 = -1\cdot 692017$, $x_3 = -1\cdot 356895$ *).

Anmerk. Transformirt man die aufzulösende Gleichung in eine andere, deren Wurzeln m Mal so gross sind (§. 174); so wird in der transformirten Gleichung $m\delta$ jene Zahl sein, welche die besagte Eigenschaft besitzt, und sofort kleiner als die kleinste Differenz der Wurzeln dieser Gleichung ist. Man kann daher, anstatt die mühvolle quadrirte Differenzengleichung zu suchen, die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung auf Gerathewohl vergrössern, in der transformirten Gleichung für x abermals die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2,... substituiren und sehen, ob man nicht vielleicht darin die sämmtlichen Wurzeln entdeckt. Ist diess der Fall, so kann man diese letztere Gleichung auflösen und jede Wurzel durch m dividiren, um die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu erhal-

*) Nach der Methode von Lagrange, d. i. durch Kettenbrüche ausgedrückt, findet man:

$$x_1 = 3 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 +,}}}}}}$$

$$-x_2 = 2 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 +,}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 +,}}}}$$

$$-x_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 +.}}}}}}$$

ten, oder es ist, wenn man gleich die ursprüngliche Gleichung auflösen will, sofort $\delta = \frac{1}{m}$ zu nehmen.

So war im vorigen Beispiele $\delta = \cdot 3$, also ist $4\delta = 1\cdot 2$, und man kann daher in der Gleichung $y^3 - 112y - 448 = 0$, deren Wurzeln 4 Mal so gross als die der erwähnten Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ sind, bei der Substitution von $y = 0, 1, 2, \ldots$ durchaus keine Wurzeln übergehen. Man findet in der That, dass eine Wurzel zwischen 12 und 13, eine zweite zwischen -5 und -6, und endlich die 3. Wurzel zwischen -6 und -7 liegt, und zwar sind diese Wurzeln: $12\cdot 19566$, $-5\cdot 42759$ und $-6\cdot 76807$.

§. **211**. Das von Sturm angegebene, ganz allgemeine Verfahren, um die Anzahl der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung, so wie die Grenzen zu finden, zwischen welchen jede derselben eingeschlossen ist, besteht in Folgendem:

1. Da sich die vielfachen oder gleichen Wurzeln einer Gleichung immer nach §. 179 bestimmen, und durch eine vorläufige Division ausscheiden lassen, so soll hier vorausgesetzt werden, dass die Gleichung $X = 0$, deren reelle Wurzeln nach diesem Sturm'schen Verfahren bestimmt werden sollen, nur ungleiche Wurzeln besitzt.
2. Leitet man aus dem Polynome $X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ nach §. 149 jenes $X_1 = nx^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$ ab und sucht zu diesen beiden Functionen X und X_1 nach dem bekannten Verfahren den grössten gemeinschaftlichen Divisor mit der einzigen Aenderung, dass man in jedem Reste, bevor man ihn als Divisor nimmt, die Zeichen ändert; so erhält man, wenn diese so geänderten Reste der Reihe nach durch $X_2, X_3, \ldots X_n$ bezeichnet werden, die Reihe von Functionen
$$X, X_1, X_2, \ldots X_r, \ldots X_n, \ldots (A),$$
welche nach x beziehungsweise vom n^{ten}, $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$, $\ldots (n-r)^{\text{ten}} \ldots 0^{\text{ten}}$ Grade sind.
3. Setzt man nun in dieser Reihe (A) nach und nach $x = -\infty$, 0 und $+\infty$, und bemerkt die Vorzeichen, welche diese Functionen oder Glieder dabei annehmen, so erhält man auf diese Weise 3 Zeichenreihen, von

denen die erste (für $x = -\infty$) n, die zweite (für $x = 0$) m und die dritte (für $x = +\infty$) s Zeichenwechsel haben mag. Diess vorausgesetzt, besitzt die gegebene Gleichung $X = 0$ in Allem $n - s$ reelle Wurzeln, von denen $m - s$ positiv und $n - m$ negativ sind.

4. Substituirt man ferner in dieser Reihe (A) für x irgend zwei reelle Werthe a und b, von denen $b > a$ sein soll, und bemerkt abermals die Zeichen, welche die einzelnen Glieder erhalten; so bezeichnet der Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel, die in diesen beiden Reihen vorkommen (wobei, so lange $b > a$ ist, die Anzahl der Wechsel für $x = b$ niemals grösser als für $x = a$ sein kann), sofort die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln, so dass, wenn dieser Unterschied Null ist, auch keine solche Wurzel zwischen a und b liegen kann.

Es kann noch bemerkt werden, dass wenn für eine dieser Substitutionen irgend ein Glied der genannten Reihe Null wird, es ganz gleichgiltig ist, ob man dieses Glied mit $+$ oder $-$ ansetzt.

§. **212**. Die Richtigkeit dieses Verfahrens lässt sich in Kürze auf folgende Art beweisen.

1. Sind $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ der Reihe nach die Quotienten, welche bei dem Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Divisors zwischen X und X_1 entstehen, so hat man nach der (2. vorigen §.) angegebenen Bedeutung von $X_2, X_3, \ldots$ offenbar:

$$X = Q_1 X_1 - X_2 \ldots (a),\quad X_1 = Q_2 X_2 - X_3 \ldots (b),$$
$$X_2 = Q_3 X_3 - X_4 \ldots (c),$$
$$\ldots X_{r-1} = Q_r X_r - X_{r+1} \ldots (i) \ldots X_{n-2} = Q_{n-1} X_{n-1} - X_n.$$

2. Wird nun für eine Substitution, z. B. für $x = \alpha$, irgend eine dieser Functionen, z. B. X_r gleich Null, so wird [Relat. (i)] $X_{r-1} = -X_{r+1}$, woraus hervorgeht, dass die beiden anliegenden Werthe von X_r für dieselbe Substitution entgegengesetzte Zeichen erhalten, weil mit $X_r = 0$ nicht auch zugleich X_{r-1} oder X_{r+1}

Null sein kann. Denn könnten überhaupt für $x = \alpha$ irgend zwei auf einander folgende Glieder der obigen Reihe (A) z. B. X_3 und X_4 zugleich Null sein, so müsste wegen der vorigen Relation (c) auch X_2 und damit wegen (b) auch X_1, und endlich wegen Relation (a) auch X verschwinden, so dass die Polynome X und X_1 den gemeinschaftlichen Factor $x - \alpha$ hätten, was nach §. 179 für die Gleichung $X = 0$ die vielfache Wurzel $x = \alpha$ bedingen würde, was gegen die gemachte Voraussetzung ist.

Es ist übrigens klar, dass alles hier Gesagte auch noch gilt, wenn die ursprünglichen Functionen X, X_1, . . ., wie diess bekanntlich zur Erzielung ganzer Coefficienten oder auch zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel geschieht, mit einer constanten, positiven Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

3. Substituirt man in einer dieser Functionen, z. B. in jener X_r für x allmählig zunehmende Werthe, von denen jedoch, selbst wenn diese Zunahmen unendlich klein sind, keiner diese Function X_r zu Null macht; so behalten die durch diese Substitutionen aus X_r entstehenden Werthe fortwährend dieselben Vorzeichen, indem dabei für X_r nur ein Zeichenwechsel eintreten könnte, wenn X_r durch Null ginge. Wird dagegen X_r für eine dieser Substitutionen, z. B. für $x = \alpha$ Null, so erhält, wenn h eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, die Function X_r für $x = \alpha - h$ und $x = \alpha + h$, wie leicht zu sehen, verschiedene, d. i. entgegengesetzte Vorzeichen.

Da nun dasselbe auch von allen übrigen Functionen X, X_1, . . X_{n-1} gilt, so behalten diese bei den genannten allmählig oder stetig wachsenden Werthen von x, so lange keine dieser Functionen dabei durch Null geht, dieselben Vorzeichen und die aus diesen Zeichen gebildeten Reihen behalten daher auch dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln.

4. Wird aber für $x=\alpha$ die Function $X=0$, so kann erstens (weil keine gleichen Wurzeln angenommen werden) nicht auch $X_1=0$ sein, und dann ist, wenn man $X=f(\alpha)$ und $x=\alpha\pm h$ setzt, wegen (wie leicht zu finden) $f(x\pm h)=X\pm X_1 h+Nh^2+\ldots$ sofort $f(\alpha\pm h)=\pm \underset{\alpha}{X_1} h+\underset{\alpha}{N}h^2+\ldots$ oder wenn h als unendlich klein angesehen wird, auch $f(\alpha\pm h)=\pm \underset{\alpha}{X_1} h$, woraus sofort folgt, dass $f(\alpha+h)$ und $\underset{\alpha}{X_1}$ immer dasselbe Vorzeichen, dagegen das entgegengesetzte von $f(\alpha-h)$ haben. Endlich ist auch leicht zu sehen, dass X_1 für alle 3 Werthe von $x=\alpha-h$, $x=\alpha$ und $x=\alpha+h$ ein und dasselbe Zeichen beibehält.

Diess berücksichtigend, können also die Vorzeichen nur folgende sein:

		X	X_1	oder	X	X_1
für $x=\alpha-h$	hat man	+	—	„	—	+
„ $x=\alpha$	„ „	0	—	„	0	+
„ $x=\alpha+h$	„ „	—	—	„	+	+

woraus also hervorgeht, dass die untere Zeichenreihe (für die Substitution von $x=\alpha+h$) um einen Zeichenwechsel weniger als die obere Zeichenreihe (für $x=\alpha-h$) besitzt oder einen solchen Wechsel verliert.

5. Wird endlich für den Werth $x=\alpha$ irgend eine der folgenden Functionen $X_1, X_2, \ldots$, z. B. jene X_r Null, so sind dafür, wie in 2. bemerkt, X_{r-1} und X_{r+1} von Null verschieden und erhalten entgegengesetzte Zeichen. Auch behält (wie diess in 4. von X_1 bemerkt wurde) X_{r-1} wieder für alle 3 Werthe $x=\alpha-h$, $x=\alpha$ und $x=\alpha+h$ das nämliche Vorzeichen, was natürlich auch von der Function X_{r+1} gilt.

Nach dieser Bemerkung können die Vorzeichen der Functionen X_{r-1}, X_r und X_{r+1} beziehungsweise nur folgende sein:

für $x=\alpha-h$	entweder	+	+	—	oder	+	—	—
„ $x=\alpha$	„	+	0	—	„	+	0	—
„ $x=\alpha+h$	„	+	—	—	„	+	+	—

oder aber

für $x = \alpha - h$	entweder	$- + +$	oder	$- - +$
„ $x = \alpha$	„	$- 0 +$	„	$- 0 +$
„ $x = \alpha + h$	„	$- - +$	„	$- + +$

Aber in allen diesen denkbaren 4 Fällen besitzen die untern und obern Zeichenreihen (d. i. für $x = \alpha + h$ und $x = \alpha - h$) dieselbe Anzahl von Zeichenwechsel. Es liegt daher zwischen $x = \alpha - h$ und $x = \alpha + h$, obgleich dafür, wie angenommen worden, $X_r = 0$ wird, keine reelle Wurzel der Gleichung $X = 0$.

6. Es behalten also die Functionen $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ für alle stetig zunehmenden Werthe von x, welche X nicht Null machen, fortwährend dieselbe Anzahl von Zeichen-Wechsel und Folgen. So wie aber für irgend einen Werth von $x = \alpha$ die Function X Null wird, d. h. so wie α ein reeller Wurzelwerth der Gleichung $X = 0$ ist, so enthält die Zeichenreihe für $x = \alpha + h = b$ immer einen Wechsel weniger als jene für $x = \alpha - h = a$.

7. Es sei ferner β die auf α folgende nächst grössere reelle Wurzel unserer Gleichung $X = 0$, so erhält man (da zwischen α und β sonach keine Wurzel liegt) in der obigen Reihe (A) für $x = \beta - h$ dieselbe Anzahl, dagegen für $x = \beta + h = c$ um einen Zeichenwechsel weniger als für $x = \alpha + h = b$, so, dass also die Substitution $x = c$ sofort zwei Zeichenwechsel weniger als jene $x = a$ gibt. Hieraus folgt also, dass wenn zwischen a und c zwei reelle Wurzeln der Gleichung liegen, sofort auch die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der Reihe (A) durch die Substitutionen von $x = a$ und $x = c$ entstehen, um 2 verschieden sein müssen.

8. Fährt man in derselben Weise fort, so findet man eben so, wenn $d > c$, $e > d$ u. s. w. ist, dass, wenn zwischen a und d 3, zwischen a und e 4 u. s. w. Wurzeln der Gleichung liegen, sofort die Zeichenreihen, welche in (A) durch die Substitution von $x = a$ und $x = d$ für $x = a$ und $x = e$ u. s. w. entstehen, in der Anzahl ihrer Zeichenwechsel beziehungsweise um 3, 4, ... differiren müssen.

Da man übrigens statt $a, b, c, \ldots$ eben so gut auch

$x = \infty$ setzen kann, so folgt zugleich auch die Richtigkeit des in 3. von §. 211 Gesagten.

Anmerk. 1. Obschon hier der Beweis zunächst nur unter der Voraussetzung, dass h unendlich klein ist, geführt wurde, so gilt er doch offenbar auch noch, wenn unter h was immer für ein endlicher Werth verstanden wird, wenn dieser nur so klein ist, dass weder zwischen $\alpha - h$ und α, noch zwischen α und $\alpha + h$ eine zweite Wurzel von $X = 0$ liegt, indem sich so lange fort die Zeichen der Reihe $X, X_1, \ldots X_n$ nicht ändern.

Anmerk. 2. Wenn auch bei diesem Verfahren vorausgesetzt wurde, dass die Gleichung $X = 0$ keine gleichen oder vielfachen Wurzeln besitze, so ist es gleichwohl nicht nothwendig, diese im vorkommenden Falle schon im Voraus auszuscheiden, sondern man wendet dieses Verfahren ohne Weiteres (da man ja die gleichen Wurzeln ohnehin nicht im Voraus kennt) auf die gegebene Gleichung $X = 0$ an. Besitzt diese Gleichung gleiche Wurzeln, so wird bei diesem Verfahren der letzte Rest X_n Null und es ist dann der letzte Divisor der grösste gemeinschaftliche Divisor oder Theiler zwischen X und X_1. Dividirt man damit das Polynom X, so erhält man den Quotienten X' und damit die bloss ungleiche Wurzeln besitzende Gleichung $X' = 0$, auf welche man dann das hier entwickelte Verfahren weiter anwendet, um die Anzahl und Grenzen der reellen Wurzeln derselben zu finden, während man die gleichen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ aus dem letzten Divisor (nach §. 179) erhält.

Beispiel 1. Um die Anwendung dieser Methode an einigen Beispielen zu erläutern, sei die Gleichung (aus §. 206) $x^3 - 5x - 3 = 0$ gegeben, so hat man dafür $X = x^3 - 5x - 3$, $X_1 = 3x^2 - 5$, $X_2 = 10x + 9 = x + {}^{\cdot}9$ (wenn man nämlich mit 10 dividirt) und $X_3 = 257$ oder auch, da es sich bloss um das Zeichen handelt, wenn man mit 257 dividirt, $X_3 = 1$.

Aus diesen Werthen erhält man folgendes Schema:

	X	X_1	X_2	X_3	Wechsel.	
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3	Die Gleichung besitzt also $3 - 0 = 3$ reelle W., dar-
„ $x = 0$:	$-$	$-$	$+$	$+$	1	unter sind $3 - 1 = 2$ negativ und $1 - 0 = 1$ positiv.
„ $x = +\infty$:	$+$	$+$	$+$	$+$	0	
Für $x = 4$:	$+$	$+$	$+$	$+$	0	
„ $x = 3$:	$+$	$+$	$+$	$+$	0	zwischen 3 und 4 liegt keine W.
„ $x = 2$:	$-$	$+$	$+$	$+$	1	„ 2 „ 3 „ 1 W.
„ $x = 1$:	$-$	$-$	$+$	$+$	1	„ 1 „ 2 „ keine W.
„ $x = 0$:	$-$	$-$	$+$	$+$	1	„ 0 „ 1 „ keine W.
„ $x = -1$:	$+$	$-$	$-$	$+$	2	„ -1 „ 0 „ 1 W.
„ $x = -2$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3	„ -2 „ -1 „ 1 W.
„ $x = -3$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3	„ -3 „ -2 „ keine W.

Alles in Uebereinstimmung mit dem im §. 206 Gesagten.

Beispiel 2. Sei ferner die Gleichung $x^3-6x-7=0$ zu untersuchen, so ist dafür $X=x^3-6x-7$, $X_1=3x^2-6$, $X_2=4x+7=x+$[illegible] und $X_3=-17$ oder einfacher $=-1$, und damit

	X	X_1	X_2	X_3	Wechsel.	
für $x=-\infty$:	$-$	$+$	$-$	$-$	2	Es besitzt also diese Gleichung nur $2-1=1$ reelle Wurzel.
„ $x=0$:	$-$	$-$	$+$	$-$	2	
„ $x=+\infty$:	$+$	$+$	$+$	$-$	1	
für $x=1$:	$-$	$-$	$+$	$-$	2	
„ $x=2$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2	Diese liegt also zwischen 2 und 3.
„ $x=3$:	$+$	$+$	$+$	$-$	1	
für $x=2·5$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2	oder zwischen 2·5 und 3
„ $x=2·8$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2	„ „ 2·8 „ 3
„ $x=2·9$:	$-$	$+$	$+$	$-$	2	„ „ 2·9 „ 3

u. s. w.

Diese Gleichung besitzt also zugleich auch 2 imaginäre Wurzeln, und in der That sind die Wurzeln:

$$2·9005718 \text{ und } -1·4502859 \pm ·5567652\sqrt{-1}.$$

§. **213.** Um schliesslich noch etwas über die Kennzeichen der imaginären Wurzeln einer Gleichung $X=0$ beizufügen, so sind die vorzüglichsten in Kürze folgende:

1. Behält eine Gleichung, in welcher Glieder fehlen, nicht die nämliche Anzahl von Zeichenwechsel und Folgen, wenn man sich die fehlenden Glieder ein Mal mit $+$ und dann auch mit dem Zeichen $-$ eingeschaltet denkt; so hat die Gleichung imaginäre Wurzeln. Dieser Satz lässt sich übrigens nicht umkehren, d. h. man darf aus dem Umstande, dass in beiden genannten Fällen diese Anzahl von Wechsel und Folgen dieselbe ist, noch nicht auf die Abwesenheit aller imaginären Wurzeln schliessen.
2. Ist die Gesammtzahl der Zeichenwechsel in der gegebenen Gleichung $X=0$, in welcher Glieder fehlen, und in jener $\underline{X}=0$ mit entgegengesetzten Wurzeln kleiner als der Grad der Gleichung n; so besitzt diese Gleichung $X=0$ ebenfalls imaginäre Wurzeln. Auch dieser Schluss darf nicht umgekehrt werden.
3. Fehlen in einer Gleichung 2 oder mehrere auf einander folgende Glieder, so besitzt die Gleichung ebenfalls

imaginäre Wurzeln. Von diesen Sätzen wird man die Beweise leicht selbst finden können.

4. Das vorzüglichste und bestimmteste Kennzeichen jedoch für das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von imaginären Wurzeln der Gleichung $X=0$ folgt aus der entsprechenden quadrirten Differenzengleichung $Z=0$, indem diese wenigstens eben so viele Zeichenfolgen darbieten muss, als die Gleichung $X=0$ Paare von imaginären Wurzeln besitzt; und umgekehrt, kann diese Gleichung nur reelle Wurzeln haben, wenn im Polynome Z lauter Zeichenwechsel vorkommen. Denn da (§. 164) die imaginären Wurzeln immer paarweise und conjugirt vorkommen, so sei $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ ein solches Paar; ihre Differenz ist $2q\sqrt{-1}$ und davon das Quadrat $=-4q^2$ sofort negativ, welche als Wurzel der Gleichung $Z=0$ erscheint, folglich (§. 171) in dem Polynome Z wenigstens eine Zeichenfolge erzeugt. Kommt demnach in Z keine solche Zeichenfolge vor, so kann die Gleichung $X=0$ durchaus keine imaginären Wurzeln besitzen *).

So hat die quadrirte Differenzengleichung $z^3-42z^2+441z-49=0$ der obigen Gleichung (§. 210) $x^3-7x-7=0$ keine Zeichenfolge, zum Beweis, dass hier, wie wir in der That auch gefunden haben, die Gleichung lauter reelle Wurzeln besitzt.

Dagegen erhält man für die Gleichung $x^3-6x-7=0$ die quadrirte Differenzengleichung: $z^3-36z^2+324z+459=0$, und da hier eine Zeichenfolge vorkommt; so besitzt die erste Gleichung nothwendig ein Paar imaginäre Wurzeln, wie wir diess auch bereits im vorigen §. nach dem Sturm'schen Verfahren gefunden haben.

*) Die Berechnung der imaginären Wurzeln betreffend, so wie über mehreres andere Hiehergehörige s. Bd. I. S. 153—167.

II.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. **214.** Erklärung. Die allgemeine Form einer Gleichung des n. Grades mit 2 Unbekannten x und y ist:

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0,$$

wobei P_0, P_1, ... P_n algebraische Functionen von y, jedoch beziehungsweise höchstens vom 0^{ten}, 1^{ten}, ... n^{ten} Grad, bezeichnen, also die Form haben: $P_0 = a$, $P_1 = b + cy$, $P_2 = d + ey + fy^2$ u. s. w.

§. **215.** Es seien nun die beiden Gleichungen

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0 \; [A = 0],$$
$$P'_0 x^m + P'_1 x^{m-1} + \ldots + P'_{m-1} x + P'_m = 0 \; [A' = 0]$$

beziehungsweise des n. und m. Grades, die wir Kürze halber durch $A = 0$ und $A' = 0$ bezeichnen wollen, zur Auflösung gegeben. Um die sämmtlichen Auflösungen, d. i. alle Paare zusammengehöriger Werthe von x und y zu finden, welche gleichzeitig die Polynome A und A' auf Null bringen; so sei $x = \alpha$, $y = \beta$ eine solche Auflösung. Stellt man sich vor, dass in P_0, P_1, ... P'_0, P'_1 ... für y bereits dieser Werth β gesetzt worden; so müssen die Polynome A und A' (§. 159) den gemeinschaftlichen Factor $x - \alpha$ besitzen, welchen man auch in der That nach der bekannten Verfahrungsweise unter dieser Voraussetzung finden würde. Eben so würde man, wenn $x = \alpha'$, $y = \beta'$ eine 2. Auflösung unserer Gleichungen bildete, und in P_0, P_1, ... P'_0, P'_1, ... $y = \beta'$ gesetzt worden wäre, durch dieses Verfahren in A und A' den gemeinschaftlichen Divisor $x - \alpha'$ finden u. s. w.

§. **216.** Da man aber die Werthe von $y = \beta$, β', ... nicht im Voraus weiss, so wird man, ohne eine vorausgegangene Substitution in P_0, P_1 u. s. w., zu A und A' den grössten gemeinschaftlichen Divisor aufsuchen, und, da dabei die Reste in Beziehung auf x nach und nach immer von niedrigerer Ordnung werden, den letzten Rest, welcher

kein x mehr enthält, gleich Null setzen, um die End- oder Finalgleichung in y zu erhalten, aus welcher man dann für y die sämmtlichen Werthe β, β', ... bestimmen kann (indem für jeden dieser Werthe der letzte Rest verschwinden muss). Setzt man ferner den vorletzten Rest (den gemeinschaftlichen Divisor), welcher von der Form $a + bx$ sein wird, und wobei a und b Functionen von y sind, ebenfalls Null; so erhält man aus dieser Gleichung, indem man darin für y nach und nach die Werthe β, β', ... substituirt, die correspondirenden Werthe von $x = \alpha$, α', ... (ist nämlich $y = \beta$ gesetzt worden, so ist diese letztgenannte Gleichung sofort $x - \alpha = 0$, woraus $x = \alpha$ folgt; für $y = \beta'$ wird diese Gleichung: $x - \alpha' = 0$, woraus $x = \alpha'$ folgt u. s. w.).

Um z. B. die Gleichung $A = x^2 - (y + 1)x - 2(y^2 + 2y + 1) = 0$ und $A' = x^2 + (1 - 3y)x + 2y^2 - 2y = 0$, welche bereits nach x geordnet sind, aufzulösen, hat man zuerst, das Polynom A' als Divisor genommen, den Quotienten 1 und, wenn man gleich den gemeinschaftlichen Factor 2 auslässt, den Rest: $(y - 1)x - (2y^2 + y + 1)$. Multiplicirt man weiter, zur Erzielung ganzer Quotienten, das Polynom A', welches jetzt Dividend wird, mit $(y - 1)^2$; so erhält man nach einer zweimaligen Division den Quotienten $(y - 1)x + 5y - y^2$ und den Rest (ohne x) $3y^3 + 10y^2 + 3y$, also die Finalgleichung in $y: 3y^3 + 10y^2 + 3y = 0$, aus welcher man sofort $y = 0$, -3 und $-\frac{1}{3}$ findet. Setzt man daher den vorletzten Rest (in Bezug auf x vom 1. Grad) gleich Null, so erhält man die Gleichung $(y - 1)x - (2y^2 + y + 1) = 0$, und daraus $x = \dfrac{2y^2 + y + 1}{y - 1}$, also für $y = 0$: $x = \dfrac{1}{-1} = -1$, für $y = -3$: $x = -4$, und für $y = -\frac{1}{3}$ sofort $x = -\frac{2}{3}$. Man hat also für die gegebenen Gleichungen die 3 Auflösungen: $x = -1$, $y = 0$; $x = -4$, $y = -3$ und $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Auf gleiche Art findet man für die beiden Gleichungen $x^2 - 7x + 6 = 0$ und $3x^2 + 3yx + y^2 - 7 = 0$, die Endgleichung in y: $y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0$ (vergl. §. 176, Beispiel) und die Auflösungen: $x = -3$, $y = 4$; $x = 1$, $y = -4$; $x = -3$, $y = 5$; $x = 2$, $y = -5$; $x = 1$, $y = 1$ und $x = 2$, $y = -1$.

§. **217.** Hat man im Verlaufe der Rechnung, zur Erzielung ganzer Quotienten, Factoren, die im Allgemeinen Functionen von y sein werden, eingeführt; so kann es geschehen, dass diese, wenigstens zum Theil, in der Final-

gleichung enthalten sind und sonach fremdartige Auflösungen liefern. Wird nämlich einer der Dividende mit F (als Function von y) multiplicirt, und ist R der correspondirende Divisor (als Function von x und y); so sind die aus dem Systeme $F=0$, $R=0$ folgenden Werthe von y und x, als den gegebenen Gleichungen $A=0$, $A'=0$ fremdartige Auflösungen, wegzulassen.

Nimmt man z. B. von den beiden Gleichungen $A = yx^2 - 3yx - (y^2-2) = 0$ und $A' = (y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - (3y-1) = 0$ das Polynom A zum Dividend und multiplicirt dieses sonach mit $y^2 - 3y + 2$; so erhält man nach der ersten Division den Rest: $-y(3y^2 - 8y + 5)x - (y^4 - 3y^3 - 3y^2 + 7y - 4)$, welcher jetzt Divisor wird. Wegen $y(3y^2 - 8y + 5) = y(y-1)(3y-5)$ und $y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$ muss man, um bei der folgenden Division ganze Quotienten und Reste zu erhalten, A' noch (mit Rücksicht darauf, dass der Quotient zweigliederig wird) mit $y^2(y-1)(3y-5)^2$ multipliciren. Man erhält hierauf nach der 2. Division den von x unabhängigen Rest:

$$y^9 - 8y^8 + 12y^7 + 16y^6 + y^5 - 170y^4 + 322y^3 - 294y^2 + 148y - 32,$$

welcher sofort gleich Null gesetzt, die Endgleichung gibt.

Da man aber bei der ersten Division den Factor $y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$ eingeführt hat, so kann die Endgleichung die fremden Factoren $y-1$ und $y-2$ enthalten. Indess findet man, wenn man $(y-1)(y-2) = 0$ und auch den betreffenden Divisor $A' = 0$ setzt, für $y = 1$ aus $A' = 0$ keinen Werth für x, indem alle Glieder mit x verschwinden; dagegen erhält man daraus für $y = 2$ sofort $x = 5$: es wird also in der Endgleichung der Factor $y-1$ nicht, dagegen aber jener $y-2$ enthalten sein, durch welchen man diese, um die wahre Finalgleichung zu erhalten, dividiren muss. Dadurch erhält man (wie auch unmittelbar, wenn man gleich Anfangs A' zum Dividend und A zum Divisor nimmt) die wahre Endgleichung:

$$y^8 - 6y^7 + 16y^5 + 33y^4 - 104y^3 + 114y^2 - 66y + 16 = 0.$$

Der im 2. Dividend A' eingeführte Factor jedoch hat auf die Finalgleichung keinen Einfluss. So wie dieses überhaupt durchgehends von jenem Dividend gilt, dessen entsprechender Divisor in Bezug auf x vom 1. Grad ist.

§. 218. Hat man zur Vereinfachung der Rechnung, wie es bei diesem Verfahren erlaubt ist, irgend einen Divisor vor der Division in seinem entsprechenden Dividend D durch den Factor F abgekürzt, und ist dieser eine Function von y; so muss man zu den am Ende erhaltenen Auf-

lösungen noch jene aus dem Systeme $D=0$, $F=0$ resultirenden, hinzufügen. Auch müsste man, um die vollständige Finalgleichung in y zu erhalten, die so gefundene noch mit dem Factor F, diesen auf die Potenz erhoben, die dem Ordnungsexponenten von D in Bezug auf x gleich kommt, multipliciren.

Nimmt man, um die Gleichungen $A = x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 2y^3 = 0$ und $A' = x^3 - 4x^2 + (6-y)x - 2y^2 = 0$ aufzulösen, das Polynom A' zum Divisor; so erhält man nach der 1. Division den Rest (als 2. Divisor) $-4(y-1)x^2 + (5y^2+y-6)x - 2y^2(y-1)$, welcher den Factor $y-1$ besitzt. Kürzt man durch diesen ab, so ist der vereinfachte 2. Divisor: $-4x^2 + (5y+6)x - 2y^2$, und das Polynom A' der zugehörige Dividend D. — Nach vollendeter ganz einfacher Rechnung findet man, wenn durch den gemeinschaftlichen Factor -64 gleich abgekürzt wird, die Endgleichung: (1) $2y^6 - 27y^5 + 108y^4 - 108y^3 = 0$. Da nun ferner der vorletzte Rest oder letzte Divisor gleich Null gesetzt, die Gleichung liefert: $(17y^2 - 36y + 36)x - (10y^3 + 12y^2) = 0$; so erhält man aus diesen beiden Gleichungen die Auflösungen: $y=0$ 3 Mal, 6, 6, $\frac{3}{2}$ und $x=0$ 3 Mal, 6, 6, 3. Zu diesen nun kommen noch jene, welche aus dem Systeme $y-1=0$ und $x^3 - 4x^2 + (6-y)x - 2y^2 = 0$ hervorgehen, also jene: $y=1$, $x=1, 1, 2$. — Will man endlich die vollständige Finalgleichung in y haben, so muss man die unvollständige (1) noch mit $(y-1)^3$ multipliciren.

§. **219**. Wird die aus dem vorletzten Reste gebildete Gleichung $a + bx = 0$ (§. 216) für irgend einen aus der Endgleichung gefundenen Werth $y=\gamma$ identisch Null, d. h. wird $x = -\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$; so ist diess ein Zeichen, dass diesem Werthe von $y=\gamma$ mehrere Werthe von x zukommen. In diesem Falle setze man den vor vorletzten Rest, d. i. jenen, welcher in Bezug auf x vom 2. Grade ist, gleich Null, und bestimme aus dieser Gleichung die beiden den $y=\gamma$ zukommenden Werthe von x. Sollte auch diese Gleichung für $y=\gamma$ identisch Null werden, so würden diesem Werthe von y mehr als zwei Werthe von x entsprechen, und man müsste diese, wenn es deren 3 sind, aus dem nächst vorhergehenden Reste oder Divisor, welcher also nach x vom 3. Grade ist, bestimmen u. s. w.

Für die Auflösungen der Gleichungen $A = x^2 + (y+2)x - 6y2 - 4y = 0$ und $A' = x^2 + 3x - y^2 - 5y - 4 = 0$ erhält man, das Polynom A' als Divisor genommen, als 1. Rest:

$$(y-1)x - 5y^2 + y + 4.$$

Wird hierauf (da wir diesen Rest als neuen Divisor absichtlich nicht durch $y - 1$ abkürzen wollen) das Polynom A, als nunmehrigen Dividend (wegen der zweimaligen Division), mit $(y-1)^2$ multiplicirt, so erhält man nach einer zweimaligen Division den von x unabhängigen Rest: $24y^4 + 2y^3 - 52y^2 + 2y + 24$, welcher Null gesetzt, die Endgleichung und diese die Wurzeln $y = -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, 1, 1$ liefert. Der obige Rest in x gleich Null gesetzt, gibt $x = \frac{5y^2 - y - 4}{y - 1}$, und daraus folgt für $y = -\frac{3}{4}$ und $-\frac{4}{3}$ beziehungsweise $x = \frac{1}{4}$ und $-\frac{8}{3}$; dagegen wird für $y = 1$, $x = \frac{0}{0}$. Setzt man also den nächst vorhergehenden Rest oder Divisor, hier nämlich das Polynom A' gleich Null, und in dieser Gleichung $y = 1$; so erhält man $x^2 + 3x - 10 = 0$, und daraus für die diesem Werthe von y entsprechenden beiden Werthe von x sofort 2 und -5.

Anmerk. Würde man oben vor der 2. Division den betreffenden Divisor, mit Rücksicht auf das in §. 218 Gesagte, durch den gemeinschaftlichen Factor $y - 1$ abgekürzt haben; so würde sich in der (unvollständigen) Endgleichung die Wurzel $y = 1$, wofür man eben $x = \frac{0}{0}$ erhalten hat, gar nicht vorgefunden haben.

§. 220. Es kann endlich vorkommen, dass der letzte Rest entweder an und für sich schon Null (also gar kein Rest bleibt) oder eine bestimmte algebraische oder numerische Grösse ohne y ist. Im 1. Falle enthalten die beiden Polynome A und A' an und für sich schon, ohne dass y erst bestimmte Werthe zu erhalten braucht, einen gemeinschaftlichen Factor in x, und die gegebenen Gleichungen $A = 0$, $A' = 0$ sind sonach unbestimmt. Im 2. Falle, in welchem also eine bestimmte unveränderliche Grösse gleich Null gesetzt werden müsste, stehen die beiden gegebenen Gleichungen mit einander im Widerspruche.

1) So erhält man z. B. für die beiden Gleichungen $A = x^2 - (3y-1)x + 2y^2 - y = 0$ und $A' = x^2 - (4y-2)x + 3y^2 - 2y = 0$ als 1. Rest oder 2. Divisor: $(y-1)x - y(y-1)$, welcher durch $y - 1$ abgekürzt, sofort in seinem Dividend A' ohne Rest enthalten, also $x - y$ der gemeinschaftliche Factor der beiden Polynome A und A' ist. Und in der That, die gegebenen Gleichungen sind auch:

$$(x-y)(x-2y+1) = 0 \text{ und } (x-y)(x-3y+2) = 0,$$

und diese werden offenbar für alle aus $x - y = 0$ folgenden unzähligen Werthe von x und y befriedigt.

2) Für die Gleichungen $x^2 - (2y - 3)x + y^2 - 3y + 2 = 0$ und $x^2 - (2y + 3)x + y^2 + 3y + 2 = 0$ erhält man (immer das 2. Polynom zum Divisor genommen) als 1. Rest: $6x - 6y$, und als 2. von x unabhängigen Rest: $+ 2$; da dieser nun nicht Null werden kann, so sind die gegebenen Gleichungen mit einander im Widerspruche und haben keine Auflösung *).

Anmerk. Was den Grad der aus den beiden Gleichungen $A = 0$ und $A' = 0$ (§. 215) resultirenden Finalgleichung in y betrifft, so lässt sich zeigen, dass dieser höchstens $= mn$, in jedem Falle aber, in welchem die Functionen $P_0, P_1, \ldots P_n$ und $P'_0, P'_1, \ldots P'_n$ ganz vollständig sind, also z. B. $P_n = y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n$ und keiner der Coefficienten a Null ist, genau gleich mn sein muss.

Fünftes Capitel.

Von den Reihen.

Erklärungen.

§. 221. Eine nach irgend einem Gesetze gebildete Folge von Grössen wird Reihe, die Grössen selbst aber werden Glieder derselben genannt.

§. 222. Wir bezeichnen die Glieder einer Reihe einfach durch $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, so, dass also dieses letztere das n. Glied darstellt. Laufen die Glieder ohne Ende fort, so heisst die Reihe eine unendliche.

§. 223. Ein allgemeiner Ausdruck, welcher jedes beliebige Glied einer Reihe, wie z. B. a_n, entweder durch mehrere vorausgehende Glieder, oder unmittelbar als Function von n darstellt, heisst das allgemeine Glied der Reihe; im ersten Falle wird dieses durch Recursion, im letztern unabhängig (independent) erhalten.

*) Noch mehreres Hiehergehörige, so wie auch die Anwendung der *Regula falsi* auf Gleichungen mit zwei Unbekannten, Bd. I. S. 168—186.

§. **224.** Dagegen wird ein Ausdruck S_n, welcher, je nachdem man $n = 1, 2, \ldots m$ setzt, die Summe des 1., 1. und 2., 1., 2., . . . und m. Gliedes der Reihe liefert, das summatorische Glied oder die Summenformel der Reihe genannt. Manchmal bezeichnet man auch das Summenglied einer Reihe, deren allgemeines Glied $= a_n$ ist, durch $\Sigma(a_n)$.

§. **225.** Kann man sich bei Berechnung der Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n +$ einer unendlichen Reihe dem wahren Werthe um so mehr nähern, je grösser man n nimmt, d. i. je mehr Glieder man beibehält, und kann dadurch überhaupt jede beliebige Annäherung an den wahren Werth herbeigeführt werden; so sagt man die Reihe convergire oder sei summirbar; im entgegengesetzten Falle heisst sie divergent, in manchen Fällen auch unbestimmt. Oder mit anderen Worten: gibt es eine bestimmte endliche Grenze G (§. 132), welcher sich S_n, bei dem unendlichen Wachsen von n, ohne Ende nähert; so ist die Reihe convergent, im Gegentheile aber divergent.

§. **226.** Lässt sich jedes Glied einer Reihe durch mehrere der vorhergehenden Glieder nach einem und demselben Gesetze herleiten; so wird die Reihe eine wiederholende oder recurrirende genannt.

§. **227.** Aufgabe. Aus dem summatorischen Gliede einer Reihe das allgemeine Glied und die Reihe selbst zu finden.

Aufl. Da man offenbar das n. Glied einer Reihe erhält, indem man von der Summe der ersten n, jene der ersten $n-1$ Glieder abzieht; so hat man $a_n = S_n - S_{n-1}$. Aus diesem allgemeinen Glied erhält man ferner die Reihe selbst, indem man nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt.

Ist z. B. $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das gegebene Summenglied so ist

$S_{n-1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und daher

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

das allgemeine Glied, folglich (indem man $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt) die Reihe: 1, 3, 6, 10, 15, . . .

§. **228.** Zusatz. Aus dieser Ableitung des allgemeinen Gliedes aus dem summatorischen folgt unmittelbar, dass, wenn das summatorische Glied einer Reihe die Form $S_n = An + Bn^2 + \ldots + Pn_{m+1}$ hat, sofort das allgemeine Glied von der Form ist: $a_n = a + bn + \ldots + pn^m$.

Arithmetische Reihen.

a) Differenzen-Reihen.

Erklärungen.

§. **229.** Zieht man in der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ jedes Glied von seinem nächstfolgenden ab; so heisst jeder solche Unterschied die Differenz des abgezogenen Gliedes, und wird dadurch bezeichnet, dass man diesem Gliede das Differenzzeichen Δ, welchem man noch der folgenden Differenzen wegen den Ordnungsexponenten 1 beifügt und dann erste Differenz nennt, vorsetzt. Es ist nämlich $a_2 - a_1 = \Delta^1 a_1$, $a_3 - a_2 = \Delta^1 a_2, \ldots a_{n+1} - a_n = \Delta^1 a_n$.

§. **230.** Verfährt man in der auf diese Weise entstehenden ersten Differenzreihe $\Delta^1 a_1, \Delta^1 a_2, \ldots \Delta^1 a_n, \Delta^1 a_{n+1}, \ldots$ wie in der vorigen; so erhält man die Differenzen der ersten, also die zweiten Differenzen der ursprünglichen Reihe. Es ist nämlich: $\Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1 = \Delta^1(\Delta^1 a_1) = \Delta^2 a_1$ u. s. w. $\Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = \Delta^2 a_n$.

Auf diese Weise erhält man die zweite Differenzreihe $\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \ldots \Delta^2 a_n, \ldots$ aus welcher nach derselben Verfahrungsart die dritten Differenzen abgeleitet werden u. s. w.

§. **231**. Sind die ersten Differenzen einer Reihe, d. i. $\Delta^1 a_1$, $\Delta^1 a_2$, . . . einander gleich; so heisst die Reihe eine arithmetische, und zwar der ersten Ordnung. Eben so wird die Reihe eine arithmetische der 2., 3., . . . m. Ordnung genannt, wenn beziehungsweise erst die 2, 3., . . . m. Differenzen derselben einander gleich sind.

§. **232**. Aufgabe. Eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes der gegebenen Reihe a_1, a_2, . . . d. i. $\Delta^m a_n$, zu bestimmen.

Auflösung. Zufolge des §. 229 ist

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = (-1)^1 (a_n - a_{n+1}).$$

Nach §. 230: $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = (-1)^2 (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})$.

Weiters: $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+2} - \Delta^1 a_{n+1} - (\Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n) = [\Delta^1 a_{n+2} - 2\Delta^1 a_{n+1} + \Delta^1 a_n]$

$$= a_{n+3} - a_{n+2} - 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_{n+1} - a_n$$
$$= (-1)^3 (a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3}) \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nach diesem Gesetze

$$\Delta^m a_n = (-1)^m \left[a_n - \binom{m}{1} a_{n+1} + \binom{m}{2} a_{n+2} - + \ldots \pm a_{n+m}\right] \text{ (I)},$$

so findet man leicht durch höhere Induction [I., 194] die allgemeine Giltigkeit dieses Gesetzes für jede ganze positive Zahl m. Zugleich lassen sich auch aus dem Gange dieser Entwickelung die nach dem nämlichen Gesetze gebildeten Ausdrücke für $\Delta^m a_n$, durch die $m-1$. oder $m-2$. Differenzen u. s. w. ausgedrückt, ersehen.

§. **233**. Aufgabe. Das allgemeine Glied a_n einer Reihe a_1, a_2, a_3, . . . durch das 1. Glied a_1 und durch die Differenzen von a_1 auszudrücken.

Auflösung. Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphes folgt unmittelbar:

$$a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 \text{ [wegen } \Delta^1 a_1 = a_2 - a_1\text{]},$$
$$a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1$$
$$\text{[wegen } \Delta^2 a_1 = \Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1\text{]}$$
$$= a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1,$$

$a_4 = a_3 + \Delta^1 a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$

$= a_2 + 2\Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$

$= a_1 + \Delta^1 a_1 + 2(\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1) + \Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$

[wegen $\Delta^3 a_1 = \Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1$]

$= a_1 + 3\Delta^1 a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$ u. s. w.

Man hat also allgemein nach diesem Gesetze:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \quad \text{(II)},$$

wobei ebenfalls wieder die allgemeine Giltigkeit für jeden ganzen positiven Werth von n leicht nachgewiesen werden kann [I., 196]. Aus dem befolgten Gange der Entwickelung ist zugleich zu ersehen, nach welchem Gesetze stufenweise a_n durch a_{n-1}, dann a_{n-2} u. s. w. ausgedrückt werden könne.

§. **234**. Aufgabe. Das summatorische Glied S_n der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu finden.

Auflösung. Nach §. 224 folgt

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + \Delta^1 a_1 = 2a_1 + \Delta^1 a_1$ [vorig. §.],

$S_3 = S_2 + a_3 = (2a_1 + \Delta^1 a_1) + (a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1)$

[vorig. §.]

$= 3a_1 + 3\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1$, u. s. w.

Setzt man allgemein nach diesem Gesetze:

$$S_n = \binom{n}{1}a^1 + \binom{n}{2}\Delta^1 a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \quad \text{(III)},$$

so findet man wieder [I., 197] ganz leicht durch höhere Induction, dass diese Formel für jeden ganzen positiven Werth von n giltig sei.

§. **235**. Zusatz 1. Die Formeln (II) und (III) erstrecken sich offenbar nur dann bis zum angegebenen letzten Gliede $\Delta^{n-1} a_1$, wenn die Reihe $a_1, a_2, \ldots$ eine arithmetische, wenigstens der $n-1$. Ordnung ist. Ist sie dagegen bloss von der m. Ordnung, so brechen diese Formeln von selbst bei dem Gliede mit $\Delta^m a_1$ ab. Daraus folgt auch, dass für eine solche Reihe die $m+1$ ersten Glieder gegeben sein müssen.

§. 236. Zusatz 2. Aus den Formeln (II) und (III) folgt unmittelbar, dass für eine arithmetische Reihe der m. Ordnung das allgemeine und summatorische Glied beziehungsweise die Form haben: $a_n = a + bn + cn^2 + \ldots + pn^m$ und $S_n = An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots + Pn^{m+1}$ (vergl. §. 228). Zugleich ergeben sich auch noch nachstehende Sätze:

1. Die m. Potenzen der natürlichen Zahlen, d. i. 1^m, 2^m, 3^m, ... bilden eine arithmetische Reihe der m. Ordnung.
2. Eine Reihe derselben Ordnung bilden auch die m. Potenzen der Glieder der R. a, $a + d$, $a + 2d$, ...
3. Ueberhaupt bilden die m. Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der r. Ordnung eine arithmetische Reihe der mr. Ordnung.
4. Werden die gleichnamigen Glieder mehrerer arithmetischen Reihen durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnungsexponent dem höchsten der verbundenen Reihen gleich kommt.
5. Werden dagegen die correspondirenden Glieder dieser Reihen mit einander multiplicirt, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnungsexponent gleich ist der Summe aus jenen der einzelnen Reihen.

Beispiel 1. Um für die Reihe 2, 4, 9, 17, 28, ... welche, da die erste Differenzreihe: 2, 5, 8, 11, ... und die zweite: 3, 3, 3, ... ist, sofort eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bildet, das allgemeine und summatorische Glied zu finden, hat man, wegen $a_1 = 2$, $\Delta^1 a_1 = 2$, $\Delta^2 a_1 = 3$, $\Delta^3 a_1 = \Delta^4 a_1 = \ldots = 0$, nach Form II. §. 233:

$$a_n = 2 + (n-1)2 + \tfrac{3}{2}(n-1)(n-2) = \frac{3n^2 - 5n + 6}{2},$$

und nach Form III, §. 234:

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{1.2}\,2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.\quad 3}\,3 = \frac{n(n^2 - n + 4)}{2}.$$

Benützt man die in §. 236 für a_n und S_n angegebene Form, so lassen sich diese beiden Formeln auch auf folgende Weise finden. Da die vorliegende Reihe eine arithmetische der zweiten Ordnung ist, so setze man $a_n = a + bn + cn^2$, wo a, b, c zu bestimmen sind. Setzt man daher, um die hiezu nöthigen drei Gleichungen zu erhalten, nach und nach $n = 1, 2, 3$, wodurch a_n beziehungsweise $= 2, 4, 9$ sein muss; so erhält man:

$$2 = a + b + c,\ 4 = a + 2b + 4c,\ 9 = a + 3b + 9c,$$

und aus diesen drei Gleichungen: $a = 3$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, so wie endlich damit aus der vorigen Gleichung für a_n, wie zuvor:

$$a_n = \frac{6 - 5n + 3n^2}{2}.$$

Ferner erhält man aus der hier anzunehmenden Gleichung $S_n = An + Bn^2 + Cn^3$, wieder für $n = 1, 2, 3$, wofür S_n beziehungsweise die Werthe 2, $2 + 4 = 6$, $6 + 9 = 15$ erhält, die drei Gleichungen: $2 = A + B + C$, $6 = 2A + 4B + 8C$, $15 = 3A + 9B + 27C$, und daraus $A = 2$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, also, wenn man diese Werthe substituirt, wie vorhin:

$$S_n = \frac{4n - n^2 + n^3}{2}.$$

Beispiel 2. Um die Summenformel für die Reihe $1^3, 2^3, 3^3, \ldots n^3$ zu finden, hat man $a_1 = 1$, $\Delta^1 a_1 = 7$, $\Delta^2 a_1 = 12$, $\Delta^3 a_1 = 6$ (alle folgenden Differenzen sind Null), und daher, nach Form (III), §. 234, und nach einer einfachen Reduction:

$$S_n = \frac{n^2 (n + 1)^2}{2}.$$

b) Summen-Reihen.

Erklärungen.

§. **237.** Bildet man aus der Grundreihe 1, *d*, *d*, *d*, . . . wo *d* was immer für eine ganze positive Zahl bedeuten kann, die Glieder einer Reihe dadurch, dass man nach und nach 1, 2, 3, . . . Glieder derselben addirt; verfährt man hierauf in der entstehenden Reihe auf die nämliche Art, dann in der dadurch gebildeten Reihe wieder so u. s. f.; so erhält man beziehungsweise arithmetische Reihen der 1., 2., 3., . . . Ordnung, welche Summenreihen heissen, und sich von den Differenzenreihen nur durch die Art der Entstehung unterscheiden. Man erhält nämlich dadurch:

$1, d, d, d, \ldots$ Grundreihe.

(α) $1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d, \ldots$
arithmetische Reihe der ersten Ordnung,

(β) $1,\ 2 + d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d, \ldots$
arithmetische Reihe der zweiten Ordnung,

(γ) $1,\ 3 + d,\ 6 + 4d,\ 10 + 10d, \ldots$
arithmetische Reihe der dritten Ordnung

u. s. w.

§. **238**. Von diesen so gebildeten Reihen heisst jene (β), welche der zweiten Ordnung ist, die Reihe der Polygonal- oder Vieleckzahlen. Setzt man in dieser Reihe $d = 1, 2, 3$, u. s. w., so werden die dadurch entstehenden Reihen: 1, 3, 6, 10, ..., 1, 4, 9, 16, ... 1, 5, 12, 22, ... u. s. w. beziehungsweise die Dreieck- oder Trigonal-, Quadrat- oder Tetragonal-, Fünfeck- oder Pentagonalzahlen u. s. w. genannt, weil sich z. B. eben so viele materielle Puncte, als die Glieder dieser Reihen Einheiten haben, beziehungsweise in regelmässige Dreiecke, Vierecke (keineswegs aber in Fünfecke u. s. w.) ordnen lassen.

§. **239**. Aus einem ähnlichen Grunde wird die Reihe (γ), welche sofort von der dritten Ordnung ist, Reihe der Pyramidalzahlen, und zwar beziehungsweise für $d = 1, 2, 3, \ldots$ der drei-, vier-, fünfseitigen Pyramidalzahlen u. s. w. genannt. (Auch hier gilt eine ähnliche Bemerkung.)

§. **240**. Ueberhaupt nennt man diese Summenreihen auch figurirte Zahlenreihen, und zwar beziehungsweise der 1., 2., 3., ... Ordnung.

Die Polygonalzahlen.

§. **241**. Die Reihe der Polygonalzahlen ist nach dem §. 238: $1,\ 2 + d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d, \ldots$; man erhält also dafür wegen $a_1 = 1$, $\Delta^1 a_1 = 1 + d$, $\Delta^2 a_1 = d$ (die übrigen Differenzen sind Null) nach §. 233: $a_n = \frac{1}{2}[dn^2 + (2 - d)n]$ und §. 234: $S_n = \frac{1}{6}[dn^3 + 3n^2 + (3 - d)n]$.

Für $d = m - 2$ erhält man (§. 238) die m Eckzahlen, also dafür nach den vorigen Ausdrücken:

$1,\ m,\ 3m - 3,\ 6m - 8, \ldots\ a_n = \frac{1}{2}[(m - 2)n^2 - (m - 4)n]$

und $S_n = \frac{1}{6}[(m - 2)n^3 + 3n^2 - (m - 5)n]$,

so wie endlich wieder daraus ganz einfach, für $m = 3, 4, 5, \ldots$ die Reihen, allgemeinen und summatorischen Glieder der 3, 4, 5, ... Eckzahlen.

Die Pyramidalzahlen.

§. **242**. Die Reihe der Pyramidalzahlen ist (§. 239): $1,\ 3 + d,\ 6 + 4d,\ 10 + 10d, \ldots$, und wegen $a_1 = 1$, $\Delta^1 a_1 =$

$2 + d$, $\Delta^2 a_1 = 1 + 2d$, $\Delta^3 a_1 = d$, dafür das allgemeine und summatorische Glied (§§. 233 und 234):

$$a_n = \tfrac{1}{6}(3 - d)\,n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}dn^3,$$

$$S_n = \tfrac{1}{12}(4 - d)\,n + \tfrac{1}{24}(12 - d)n^2 + \tfrac{1}{12}(2 + d)\,n^3 + \tfrac{1}{24}dn^4.$$

Für $d = m - 2$ erhält man die betreffenden Ausdrücke für die m seitigen Pyramidalzahlen, und zwar die Reihe: $1,\ m + 1,\ 4m - 2,\ 10m - 10, \ldots$ das allgemeine und summatorische Glied:

$$a_n = \tfrac{1}{6}(5 - m)\,n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}(m - 2)\,n^3,$$

$$S_n = \tfrac{1}{12}(6 - m)\,n + \tfrac{1}{24}(14 - m)\,n^2 + \tfrac{1}{12}mn^3 + \tfrac{1}{24}(m - 2)\,n^4,$$

woraus man wieder ganz einfach, indem man $m = 3$, 4, 5, . . . setzt, die Reihen, allgemeinen und summatorischen Glieder der 3, 4, 5, . . . seitigen Pyramidalzahlen erhält.

Die figurirten Zahlen überhaupt.

§. **243.** Aus den vorhergehenden Paragraphen erhält man für die auf einander folgenden Reihen der figurirten Zahlen (§. 240) ganz leicht:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1) = s,$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + s = \frac{1}{2.3}\,n\,(n + 1)(n + 2) = s',$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \ldots + s' = \frac{1}{2.3.4}\,n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3) = s'',$$

.

$$1 + m + \frac{m\,(m + 1)}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{n\,(n + 1)\ldots(n + m - 2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m - 1}$$

$$= \frac{n\,(n + 1)\ldots(n + m - 1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}\ ^{*)}.$$

Anmerk. Die im zweiten Capitel dieses Abschnittes bei der Multiplication der Functionsreihen angeführten Zahlen- oder Verificationsreihen sind also, wie man sieht, die hier aufgestellten figurirten Zahlenreihen.

*) Auf gleiche Weise kann man statt der Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots$ eine der folgenden: $1 + 2 + 2 + \ldots$, $1 + 3 + 3 + \ldots$ etc. $1 + d + d + \ldots$ zum Grunde legen und daraus mit den obigen ähnliche Reihen ableiten.

c) Potenz-Reihen.

§. **244.** Obschon sich die Summe der Reihe $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$, als (§. 236, 1) eine arithmetische Reihe der m. Ordnung, nach der allgemeinen Summenformel (III), §. 234, immer leicht bestimmen lässt, so führt doch die besondere Ableitung der hieher gehörigen Summenformel $\Sigma(n^m)$ (§. 224) zu einem bemerkenswerthen Ergebniss.

§. **245.** Setzt man nämlich (§. 236) $\Sigma(n^m)$, d. i.

(1) $1^m + 2^m + \ldots + n^m = t_1 n^{m+1} + t_2 n^m + t_3 n^{m-1} + \ldots + t_{m+1} n$,

und schreibt in dieser Gleichung $n+1$ statt n; so erhält man, wenn von der neu entstehenden Gleichung diese hier abgezogen wird:

$$(n+1)^m = t_1 [(n+1)^{m+1} - n^{m+1}] + t_2 [(n+1)^m - n^m] + \ldots + t_{m+1} [(n+1) - n],$$

oder, wenn man entwickelt und nach n ordnet:

$$n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \ldots + 1$$
$$= t_1 \binom{m+1}{1} n^m + \left[t_1 \binom{m+1}{2} + t_2 \binom{m}{1}\right] n^{m-1}$$
$$+ \left[t_1 \binom{m+1}{3} + t_2 \binom{m}{2} + t_3 \binom{m-1}{1}\right] n^{m-2} + \ldots$$
$$+ [t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{m+1}].$$

Da aber die Coefficienten $t_1, t_2, \ldots$ von n unabhängig sind; so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten: $(m+1) t_1 = 1$, $\frac{(m+1)m}{1\,.\,2} t_1 + m t_2 = m$, $\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} t_1 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} t_2 + (m-1) t_3 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ u. s. w., und daraus: $t_1 = \frac{1}{m+1}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{m}{12}$, $t_4 = 0$, $t_5 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{120\,.\,2\,.\,3}$, $t_6 = 0$ u. s. f.

Mit diesen Werthen erhält man endlich aus der obigen Gleichung (1):

$$(2)\quad \Sigma(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2} n^m + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2} \binom{m}{1} n^{m-1} - \tfrac{1}{30} \cdot \tfrac{1}{4} \binom{m}{3} n^{m-3}$$
$$+ \tfrac{1}{42} \cdot \tfrac{1}{6} \binom{m}{5} n^{m-5} - \text{etc.}$$

Anmerk. 1. Die in dieser Entwickelung vorkommenden Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$ etc., mittelst welcher man in dieselbe ein einfaches Gesetz hineinbringt, heissen Bernoullische Zahlen [I., 212].

Anmerk. 2. Mit Hilfe dieser Summenformel $\Sigma(n^m)$ lassen sich auch Reihen summiren, deren allgemeine Glieder die Form $A + Bn + Cn^2 + \ldots$ besitzen. Denn wäre z. B. $a_n = A + Bn + Cn^2$ das allgemeine Glied einer Reihe, so wären ihre Glieder: $a_1 = A + B + C$, $a_2 = A + 2B + 2^2C$, $a_3 = A + 3B + 3^2C$ u. s. w., also ihre Summe:

$$a_1 + a_3 + a_3 + \ldots + a_n = nA + B(1 + 2 + \ldots + n) + C(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

oder wegen $n = \Sigma(n^0)$ (weil nämlich $\Sigma(n^0) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ ist), $1 + 2 + \ldots + n = \Sigma(n^1)$ und $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \Sigma(n^2)$, auch: $\Sigma(a_n) = \Sigma(An^0 + Bn + Cn^2) = A\,\Sigma(n^0) + B\,\Sigma(n) + C\,\Sigma(n^2)$; woraus zugleich noch folgt, dass die Summe eines Ausdruckes von dieser Form, nämlich $\Sigma(An^0 + Bn + Cn^2)$, aus der Summe eines jeden einzelnen Gliedes besteht, und die constanten Factoren vor das Summenzeichen Σ zu setzen sind.

Beispiele. Setzt man in dieser Formel (2) nach und nach $m = 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man:

$$\Sigma(n) = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}, \quad \Sigma(n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \quad \Sigma(n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

u. s. w.

Besondere Anwendung der Differenzen-Reihen.

§. **246**. So wie (§. 236) aus x^m, oder, allgemeiner noch, aus Ax^m eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung entsteht, wenn man nach und nach $x = a$, $a + d$, $a + 2d$ u. s. w. setzt, d. i. x nach einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung wachsen lässt; eben so entstehen unter derselben Voraussetzung aus Bx^n, Cx^p ... arithmetische Reihen der n., p., u. s. w. Ordnung. Ist nun $y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots$, und x eine in arithmetischer Progression zunehmende Grösse; so wird dabei, wenn m der grösste Exponent von x ist, y nach einer arithmetischen Reihe der m. Ordnung zunehmen; es werden nämlich, da die von den Reihen Bx^n, Cx^p, ... niedrigerer Ordnung herrührenden Differenzen schon früher Null werden, die m^{ten} Differenzen constant und gerade so sein, als ob blos $y = Ax^m$ wäre.

§. **247**. Diese Eigenschaft, verbunden mit dem Umstande, dass die Differenzreihen sehr leicht zu bilden sind,

lässt sich in der Anwendung, und ganz vorzüglich bei Berechnung von Tafeln aller Art, mit dem grössten Vortheile benützen. — Wollte man z. B. eine Tafel der Kreisflächen für die um die beständige Differenz von $\frac{1}{4}$ Zoll zunehmenden Durchmesser, von $\frac{1}{4}$ Zoll angefangen bis 100 Zoll hinauf, berechnen; so müsste man auf gewöhnliche Art in der Formel $y = \frac{1}{4}\pi x^2$, wo x den Kreisdurchmesser bezeichnet, 400 Substitutionen vornehmen. Dagegen wird man, da die auf einander folgenden Werthe von y, nach dem im vorigen §. Bemerkten, eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bilden, nur die drei ersten Werthe von y nach dieser Formel, daraus durch Subtraction die zwei ersten Glieder der ersten Differenzreihe, und endlich daraus wieder das erste, aber constante Glied der zweiten Differenzreihe bestimmen; setzt man diese aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe nach Belieben fort, und sucht nun umgekehrt durch wiederholtes Summiren die weitern Glieder der ersten Differenzreihe, so wie damit jene der ursprünglichen Reihe; so hat man sofort die gesuchten auf einander folgenden Werthe von y gefunden.

Legt man, wenn die Kreisflächen bis auf vier Decimalstellen verlangt werden, um ganz sicher zu gehen, die Rechnung auf sechs Decimalstellen an; so hat man zuerst, nach der obigen Formel, für $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ beziehungsweise: $y =$ ·049087, ·196349 und ·441786. Hieraus folgen ·147262, ·245437 als die beiden ersten Glieder der ersten, und daraus ·098175 als das beständige Glied der zweiten Differenzreihe. Lässt man also den Decimalpunct weg, und schreibt nur die bedeutenden Ziffern an, mit dem Vorbehalte, dass man zuletzt wieder 6 Ziffern als Decimalstellen abschneidet, so stellt sich die Rechnung auf folgende Art:

98175, 98175, 98175, 98175, 98175, . . . erste Differenzreihe,

147262, 245437, 343612, 441787, 539962, 638137, . . . zweite Differenzreihe,

49087, 196349, 441786, 785398, 1227185, 1767147, 2405284, . . . gesuchte Reihe.

Schneidet man also, wie gesagt, überall 6 Ziffern als Decimalen ab, behält aber bloss (mit gehöriger Correctur) 4 davon bei; so erhält man als Anfang der verlangten Tabelle folgendes Bruchstück:

Durchm.	Kreisfl.	Durchm	Kreisfl.	Durchm.	Kreisfl.
$\frac{1}{4}$	·0491	$1\frac{1}{4}$	1·2272	$2\frac{1}{4}$	3·9761
$\frac{1}{2}$	·1963	$1\frac{1}{2}$	1·7671	$2\frac{1}{2}$	4·9087
$\frac{3}{4}$	·4418	$1\frac{3}{4}$	2·4053	$2\frac{3}{4}$	5·9396
1	·7854	2	3·1416	3	7·0686

Da übrigens ein Rechnungsfehler allen folgenden Werthen mitgetheilt würde, so muss man sich von der Richtigkeit der Rechnung dadurch überzeugen, dass man von Zeit zu Zeit eine dieser gefundenen Zahlen oder Flächen auch direct nach der obigen Formel berechnet und nachsieht, ob damit die correspondirende in der Reihe übereinstimme.

Auf dieselbe Weise würde man, um nach der Formel

$$\Delta t = \cdot 0^4 6617381\, t - \cdot 0^5 81653\, t^2 + \cdot 0^7 181\, t^3$$

eine Tafel für die Dichtigkeiten des Wassers bei den Temperatursgraden $t = 1, 2, 3, \ldots$ bis 80^0 zu berechnen, am einfachsten, da die auf einander folgenden Werthe von Δt dadurch eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, bloss die vier ersten Werthe nach der Formel berechnen, daraus durch successives Abziehen die drei ersten Glieder der ersten, die zwei ersten Glieder der zweiten, und das beständige Glied der dritten Differenzreihe suchen, und endlich damit wieder durch das umgekehrte Verfahren oder wiederholte Summiren die zweite, erste und ursprüngliche oder gesuchte Reihe beliebig fortsetzen. [I., 219.]

Interpolation der Reihen.

§. **248.** Erklärung. Eine Reihe interpoliren heisst, zwischen je zwei Gliedern derselben eine gegebene Anzahl von Gliedern dergestalt einschalten, dass dadurch wieder eine Reihe derselben Gattung und Ordnung entsteht.

§. **249.** Um diese Aufgabe für die arithmetischen Reihen zu lösen, bemerke man zuerst, dass, wenn von einer beliebigen Stelle angefangen, die Glieder der zu interpolirenden Reihe durch a_n, a_{n+1}, a_{n+2} u. s. w. bezeichnet werden, die auf einander folgenden, zwischen a_n und a_{n+1} einzuschaltenden $r - 1$ Glieder sodann durch $a_{n+\frac{1}{r}}, a_{n+\frac{2}{r}} \ldots a_{n+\frac{r-1}{r}}$ bezeichnet werden müssen; weil dadurch das nächstfolgende, wie es sein soll, die Bezeichnung $a_{n+\frac{r}{r}} = a_{n+1}$ erhält.

§. **250.** Nun hat man nach Form II., §. 233, wo man sich bloss a_n in $a_{1+(n-1)}$ aufgelöst denken darf:

$$a_{n+m} = a_n + \binom{m}{1} \Delta^1 a_n + \binom{m}{2} \Delta^2 a_n + \binom{m}{3} \Delta^3 a_n + \ldots,$$

und da dieser Ausdruck nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Werthe von m gilt [I., 221]; so setze man, wie es zufolge der angeführten Bezeichnung für die einzuschaltenden Glieder nöthig ist, $m = \frac{u}{v}$. Dadurch erhält man, wenn man einrichtet und noch bemerkt, dass beim Gebrauche immer $u < v$ bleiben kann, für die gesuchte Interpolationsformel:

$$a_{n+\frac{u}{v}} = a_n + \frac{u}{v} \Delta^1 a_n - \frac{u(v-u)}{1.2.v^2} \Delta^2 a_n$$
$$+ \frac{u(v-u)(2v-u)}{1.2.3.v^3} \Delta^3 a_n - \text{etc. (IV.)}$$

Diese Formel bricht wieder mit dem $m + 1$. Gliede ab, wenn die zu interpolirende arithmetische Reihe von der m. Ordnung ist.

Beispiel 1. Um zwischen je zwei Glieder der arithmetischen Reihe zweiter Ordnung: 1, 16, 49, 100, . . . zwei neue Glieder im obigen Sinne einzuschalten, hat man für die Interpolirung zwischen 1 und 16 sofort: $a_n = 1$, $a_{n+1} = 16$, $\Delta^1 a_n = 15$, $\Delta^2 a_n = 18$ (die übrigen Differenzen $= 0$), $v = 3$ und nach und nach $u = 1$ und $= 2$, mithin nach der vorigen Formel (IV):

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 4 \text{ und}$$
$$a_{n+\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 9.$$

Für die beiden folgenden einzuschaltenden Glieder wird $a_n = 16$, $a_{n+1} = 49$, $\Delta^1 a_n = 33$ und $\Delta^2 a_n = 18$; also wieder

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 16 + \tfrac{1}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 25 \text{ und}$$
$$a_{n+\frac{2}{3}} = 16 + \tfrac{2}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 36 \text{ u. s. w.}$$

Die interpolirte Reihe ist sonach: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . ., also in der That, wie die gegebene, eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung.

Beispiel 2. Da man sich bei physikalischen und naturwissenschaftlichen Untersuchungen überhaupt häufig mit dem grössten Nutzen der Interpolations-Methode auch bei solchen Folgen von durch mühsame Rechnung oder gewöhnlicher durch Beobachtung gefundener Grössen bedient, welche keine genauen arithmetischen Reihen, jedoch so beschaffen sind, dass man sie, ohne die gestattete Fehlergrenze zu überschreiten, als solche ansehen kann; so wollen wir setzen, es seien für die Elasticität des Wasserdampfes bei den Temperaturgraden 1, 3, 5, 7, . . . aus

Versuchen der Reihe nach die Zahlen: ·1422, ·1741, ·2122, ·2571, ·3101, ·3721 u. s. w. gefuuden worden, und man wolle die den Temperaturs-graden 2, 4, 6, . . . entsprechenden Zahlen durch Interpolation ableiten. Für diesen Fall findet man, wenn man die Differenzen sucht, ·0319, ·0381, ·0449, ·0530, ·0620, ·0724, . . . als erste, ·0062, ·0068, ·0081, ·0090, ·0104, . . . als zweite, ·0006, ·0013, ·0009, ·0014, . . . als dritte Differenzreihe u. s. w. Lässt man nun die nur wenig mehr von einander verschiedenen dritten Differenzen als einander gleich gelten, und nimmt dafür in dieser Gegend die Mittelzahl ·0012; so erhält man, nach der obigen Formel (IV), wegen $v = 2$:

$$\cdot 1422 + \tfrac{1}{2} \times \cdot 0319 - \tfrac{1}{8} \times \cdot 0062 + \tfrac{1}{16} \times \cdot 0012 = \cdot 1575 \text{ und}$$
$$\cdot 1741 + \tfrac{1}{2} \times \cdot 0381 - \tfrac{1}{8} \times \cdot 0068 + \tfrac{1}{16} \times \cdot 0012 = \cdot 1924.$$

Eben so findet man weiters: ·2337, ·2825 u. s. w., welche Zahlen auch in der That mit jenen durch wirkliche Beobachtung gefundenen ganz gut übereinstimmen. — Ist man in der Reihe weiter gekommen, so kann man die für die constante dritte Differenz genommene Mittelzahl so ändern, dass sie wieder mehr mit der in dieser Gegend wirklich herrschenden dritten Differenz übereinstimmt.

Beispiel 3. Es sei endlich mit Hilfe einer Tafel, welche die Briggischen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1200 auf 10 Decimalstellen enthält, *log* 114835 auf eben so viele Stellen zu berechnen.

Da in diesem Logarithmensysteme die Aufgabe gelöst ist, sobald man die Mantisse für *log* 1148·35 gefunden hat, welche sofort zwischen den Mantissen von *log* 1148 und *log* 1149 liegt; so ergibt sich dafür folgendes Verfahren:

Man findet in der erwähnten Tafel für die Logarithmen der Zahlen 1148, 1149, 1150 etc. der Reihe nach: ·0599418881, ·0603200287, ·0606978404, ·0610753236, ·0614524791 u. s. w., und daraus durch wiederholtes Abziehen, für die ersten Glieder der ersten, zweiten und dritten Differenzreihe, bei der man füglich (da sie $\cdot 0^{9}4$, $\cdot 0^{9}8$, $\cdot 0^{9}4$, . . . ist) stehen bleiben kann, beziehungsweise: $\cdot 0^{3}3781406$, $- \cdot 0^{6}3289$ und $\cdot{}^{9}4$. Denkt man sich nun in der ursprünglichen Reihe zwischen den beiden ersten Gliedern 99 Glieder eingeschaltet, wodurch in der obigen Formel $v = 100$ wird, und davon das 35ste genommen, wodurch $u = 35$ wird; so erhält man, $a_n = \cdot 0599 \ldots (= log\, 1148)$ gesetzt, sofort:

$$a_n + \cdot 35 = \cdot 0599 \ldots + \cdot 35 \times \cdot 0^{3}378 \ldots$$
$$+ \frac{35 \times 65}{20000} \times \cdot 0^{6}32 \ldots + \frac{35 \,.\, 65 \,.\, 165}{6000000} \times \cdot 0^{9}4 = \cdot 0600742747,$$

wobei also, nur bis auf 10 Decimalstellen gerechnet, die dritte Differenz keinen Einfluss mehr hat. Es ist sonach

$$log\, 114835 = 5 \cdot 0600742747 \;^{*}).$$

*) Ueber das allgemeine Interpolations-Problem, so wie über die Newton'sche und Lagrange'sche Interpolations-Formeln: I., 226—232.

Sechstes Capitel.

Von den vorzüglichsten Umwandlungen der Functionen *einer* Variablen.

§. **251.** Erklärung. Eine Function umwandeln, heisst dieselbe ohne Veränderung ihres Werthes auf eine andere Form bringen; dabei behält man entweder die nämliche veränderliche Grösse bei, oder substituirt dafür eine neue, die mit ihr in einer bekannten Beziehung steht.

Die wichtigsten Umwandlungen der erstern Art sind: I. Zerlegung rationaler ganzer Functionen in einfache oder quadratische Factoren. II. Zerlegung rationaler gebrochener Functionen in Partialbrüche, und III. Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen.

I. Zerlegung rationaler ganzer Functionen in Factoren.

§. **252.** Jede ganze rationale Function einer Variablen hat die Form $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots$; setzt man diese gleich Null und sucht nach Capitel IV die Wurzeln α, β, γ, ... der entstehenden Gleichung, so hat man (§. 162):

$$y = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots$$

Da die Wurzeln sowohl reell, wie auch imaginär, und im erstern Falle gebrochen sein können; so haben die reellen einfachen Factoren die Form $a - bx$, und die quadratischen, welche von ein paar conjugirten imaginären Wurzeln herrühren, jene: $a + bx + cx^2$.

Wäre z. B. $y = 36 - 42x - 20x^2 + 7x^3 - 6x^4$ in Factoren zu zerlegen, so würde man aus der Gleichung

$$-\tfrac{1}{6}y = x^4 - \tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{10}{3}x^2 + 7x - 6 = 0$$

die Wurzeln $x = \tfrac{2}{3}, -\tfrac{3}{2}, 1 \pm \sqrt{-5}$, mithin

$$-\tfrac{1}{6}y = (x - \tfrac{2}{3})(x + \tfrac{3}{2})(x - 1 - \sqrt{-5})(x - 1 + \sqrt{-5})$$

oder

$$y = (2 - 3x)(3 + 2x)(6 - 2x + x^2)$$

erhalten.

II. Zerlegung rationaler gebrochener Functionen in Partialbrüche.

§. 253. Da sich jede unecht gebrochene Function immer in eine ganze und eine echt gebrochene Function auflösen lässt, so können wir bei den folgenden Entwickelungen immer echt gebrochene Functionen voraussetzen.

So zerfällt z. B. die unecht gebrochene Function

$$y = \frac{1 + x - 5x^2 + 6x^3}{2 + 3x - 2x^2}$$

durch die Division, bei welcher man zuvor Zähler und Nenner nach fallenden Potenzen von x geordnet hat, in die 2 Theile:

$-(2+3x)$ als ganze, und $\frac{5+13x}{2+3x-2x^2}$ als echt gebrochene Function (erstere kann sich auch auf eine constante Grösse reduciren).

§. 254. Um die echt gebrochene rationale Function

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1}}{\beta_1 + \beta_2 x + \ldots + \beta_{n+1} x^n}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, wollen wir zuerst zeigen, dass im Falle der Nenner $f(x)$ dieses zur kleinsten Benennung gebrachten Bruches den Factor $x - a$, und zwar α Mal, also die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $x = a$ α Mal enthält, oder

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x) \ldots (g)$$

ist, wobei $f_1(x)$ den Factor $x - a$ nicht weiter mehr besitzt, sich der obige Bruch immer in zwei Theile von der Form

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

zerlegen lässt, wobei A eine constante Grösse und $F_1(x)$ eine ganze rationale Function von x bezeichnet. Denn es ist unter dieser Voraussetzung, und wenn man im Zähler die Grösse $A f_1(x)$ addirt und subtrahirt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A f_1(x) + F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

oder wenn man der noch unbestimmten Grösse A einen solchen Werth gibt, dass der Zähler des letzten Bruches $F(x) - A f_1(x)$ durch den Factor $x - a$ theilbar wird, welchen Werth man sofort aus der Gleichung $F(a) - A f_1(a) = 0$ erhält, woraus nämlich

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \ldots (h)$$

folgt, so, dass man $F(x) - Af_1(x) = (x - a) F_1(x)$ setzen kann, sofort auch (wenn man gleich mit $x - a$ abkürzt):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} \ldots (1),$$

wie behauptet wurde.

Anmerk. Aus der vorigen Gleichung (h) folgt zugleich, dass A eine constante endliche Grösse ist, die niemals Null sein kann, weil nach den obigen Voraussetzungen a weder eine Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$ noch von jener $f_1(x) = 0$ sein kann.

§. **255.** Wendet man diesen Satz (1) des vorigen §. auf den letzten Bruch dieser Formel (1) selbst wieder an, so kann man diesen eben so in 2 Theile zerlegen und setzen:

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

wobei $A_1 = \frac{F_1(a)}{f_1(a)} \ldots (h')$ wieder eine constante Grösse und $F_2(x)$ eine ganze Function von x ist.

A_1 unterscheidet sich übrigens von A in der Eigenschaft, dass A_1 auch Null sein kann, weil die Gleichung $F_1(x) = 0$ möglicher Weise die Wurzel $x = a$ besitzen kann.

Dieser Werth, in der obigen Relation (1) substituirt, gibt weiters:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}.$$

Zerlegt man auch diesen letzten Bruch wieder nach der Formel (1) in 2 Theile und fährt überhaupt in dieser Weise fort, so findet man:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} \ldots (2),$$

wobei $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$ bestimmte, endliche, constante Grössen sind, welche mit Ausnahme von A auch Null sein können, und $F_\alpha(x)$ eine ganze Function von x ist.

Es sei ferner $x - b$ eine zweite Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, also auch (Relat. (g), vorig. §.) der Gleichung $f_1(x) = 0$, und zwar β Mal vorhanden, so, dass man hat

$$f_1(x) = (x-b)^\beta f_2(x) \ldots (i);$$

so kann man den letzten Bruch der vorigen Relation (2) eben so nach dem in (2) ausgesprochenen Gesetze in Partialbrüche zerlegen und setzen:

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} = \frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_\beta(x)}{f_2(x)} \ldots (3),$$

wobei $B, B_1, \ldots B_{\beta-1}$ wieder constante Grössen (von denen B nicht Null sein kann) und $F_\beta(x)$ eine ganze Function von x ist.

Fährt man nun so fort und ist allgemein

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-m)^\mu \ldots (k),$$

so erhält man zuletzt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$+ \frac{M}{(x-m)^\mu} + \frac{M_1}{(x-m)^{\mu-1}} + \frac{M_{\mu-1}}{x-m} \ldots (I),$$

wobei $A, A_1, \ldots B, B_1, \ldots M, M_1, \ldots M_{\mu-1}$ endliche constante Grössen sind, welche mit Ausnahme von $A, B, \ldots M$ auch Null sein können.

Wäre gegen unsere Voraussetzung der Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ nicht echt gebrochen, so würde diese Reihe (I) noch ein Glied von der Form $\varphi(x)$ erhalten.

§. 256. Besitzt der Nenner $f(x)$ des in Rede stehenden Bruches lauter ungleiche Factoren, ist also $\alpha = \beta = \ldots = \mu = 1$, also (Relat. k des vorigen §.):

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-m),$$

so erhält man aus der vorigen Formel (I):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{M}{x-m} \ldots (II).$$

Anmerk. Obschon sich bei vorkommenden speciellen Fällen die Zähler A, A_1, B, B_1 etc. der Partialbrüche aus den obigen Relationen

(*h*), (*h'*) u. s. w. bestimmen liessen, so ist es doch weit bequemer und kürzer, für die Bestimmung dieser Zähler von der Methode der unbestimmten Coefficienten (§. 112), die man selbst dann noch mit Vortheil anwenden kann, wenn der Nenner des zu zerlegenden Bruches auch imaginäre Factoren besitzt, Gebrauch zu machen, wie durch die nachstehenden Beispiele erläutert werden soll.

§. 257. Beispiele. *A*) **Für den Fall, in welchem der Nenner $f(x)$ des Bruches lauter einfache, reelle ungleiche Factoren besitzt.**

1. Um den Bruch $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x^2}$ in Partialbrüche zu zerlegen, hat man zuerst $f(x) = (1-x^2) = (1+x)(1-x)$, daher nach §. 256:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x},$$

und wenn man die Brüche wegschafft:

$$1 = A(1-x) + B(1+x) \text{ oder } 1 = (A+B) + (B-A)x,$$

folglich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$A+B=1 \text{ und } B-A=0, \text{ folglich } A=\tfrac{1}{2} \text{ und } B=\tfrac{1}{2}.$$

Man hat daher, diese Werthe substituirt:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}.$$

2. Für die gebrochene Function $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3}$ hat man

$$f(x) = (1+x)(3+2x)(1-2x),$$

man setzt daher wieder:

$$\frac{2+4x-x^2}{(1+x)(3+2x)(1-2x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{3+2x} + \frac{C}{1-2x} \quad (m).$$

Durch das Wegschaffen der Brüche und Ordnen der Glieder entsteht die Gleichung:

$$2+4x-x^2 = (3A+B+3C) + (-4A-B+5C)x + (-4A-2B+2C)x^2,$$

und daraus folgt (§. 112): $3A+B+3C=2$, $-4A-B+5C=4$, $-4A-2B+2C=-1$, mithin aus diesen 3 Gleichungen:

$$A=-1,\ B=\tfrac{25}{8} \text{ und } C=\tfrac{5}{8},$$

so, dass man mit diesen Werthen endlich erhält:

$$\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3} = \frac{-1}{1+x} + \frac{25}{8(3+2x)} + \frac{5}{8(1-2x)}.$$

Anmerk. Da die Coefficienten A, B, ... von x unabhängig sind, folglich bei was immer für einen Werth von x bestimmt werden dürfen; so kann man noch einfacher und bequemer aus der obigen Gleichung (II), §. 256, nämlich aus

$$F(x) = A(x-b)(x-c)\ldots + B(x-a)(x-c)\ldots + \ldots,$$

in welcher im 2. Theil in jedem Glied immer einer der Binomialfactoren (nämlich überall der Nenner des in dem betreffenden Gliede vorkommenden Zählers) fehlt oder nicht vorkommt, ohne die Multiplication erst zu verrichten und die Glieder nach x zu ordnen, die Zähler A, B, . . dadurch bestimmen, dass man für x nach und nach jene Werthe setzt, für welche die entsprechenden Nenner $x-a$, $x-b$. . . . beziehungsweise Null werden.

Für das vorige Beispiel würde sonach der Gang der Rechnung folgender sein:

Aus der Gleichung (m) folgt:

$$2+4x-x^2=A(3+2x)(1-2x)+B(1+x)(1-2x)$$
$$+C(1+x)(3+2x);$$

setzt man nun zuerst den im 1. Glied des 2. Theils nicht vorkommenden Factor $1+x=0$, also $x=-1$, so erhält man unmittelbar $-3=3A_1$, nämlich $A_1=-1$.

Setzt man weiters den nächsten Factor $3+2x=0$, oder $x=-\frac{3}{2}$, so wird $-\frac{25}{4}=-2B$, also $B=\frac{25}{8}$.

Für $1-2x=0$ endlich oder $x=\frac{1}{2}$ folgt $\frac{15}{4}=6C$, also $C=\frac{5}{8}$, wie vorhin.

Sollte einer der Zähler, z. B. $N=0$ gefunden werden; so wäre diess ein Beweis, dass sich der zu zerlegende Bruch durch den entsprechenden Factor $x-n$ abkürzen lässt.

§. 258. *B*) Im Falle die einfachen Factoren von $f(x)$ zum Theil oder gänzlich **imaginär** sind.

In diesem Falle bilde man aus jedem Paar conjugirter imaginärer einfacher Factoren den reellen quadratischen, welcher sofort die Form $a+bx+cx^2$ hat, und nehme diesen zum Nenner einer der Partialbrüche, welchem man jedoch einen Zähler von der Form $A'+B'x$ gibt.

Um z. B. den Bruch $\frac{2-x^2}{-5+9x-5x^2+x^3}$ in Partialbrüche zu zerlegen, hat man den Nenner zerlegt:

$$f(x)=(x-1)(x-2+\sqrt{-1})(x-2-\sqrt{-1})=(x-1)(5-4x+x^2).$$

Man setze daher den Bruch

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B+Cx}{x^2-4x+5},$$

so folgt daraus $F(x)$ oder $2-x^2=A(x^2-4x+5)+(B+Cx)(x-1)$, und aus dieser Gleichung, wenn man anstatt die Multiplicationen zu verrichten und nach x zu ordnen, um den Satz der umbestimmten Coefficienten anzuwenden, wieder nach dem vorigen kürzeren Verfahren, zuerst den Factor $x-1=0$ oder $x=1$ setzt, sofort $1=2A$, oder $A=\frac{1}{2}$.

Dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt und diese reducirt, erhält man:

$$-\tfrac{1}{2} + 2x - \tfrac{3}{2}x^2 = (B + Cx)(x - 1)$$

oder da der erste Theil dieser Gleichung eben so gut durch $x - 1$ theilbar sein muss, wie es der zweite ist, weil B und C von x unabhängig sind, wenn man wirklich dividirt:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x = B + Cx.$$

Es ist also für das vorliegende Beispiel:

$$\frac{2 - x^2}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1 - 3x}{2(x^2 - 4x + 5)}.$$

§. 259. *C*) Für den Fall, in welchem der Nenner $f(x)$ des Bruches auch gleiche Factoren besitzt.

1. Um z. B. den Bruch $\frac{3 - 2x + 4x^2}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$ zu zerlegen, hat man zuerst den Nenner in Factoren zerlegt:

$$f(x) = x(x-1)(x+1)^2.$$

Man setze also nach (1) in §. 255:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1},$$

so folgt daraus, wenn man die Brüche wegschafft:

$$(\alpha) \quad 3 - 2x + 4x^2 = Ax(x-1) + A_1 x(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1)^2 + Cx(x+1)^2$$

oder

$$3 - 2x + 4x^2 = -B + (-A - A_1 - B + C)x + (A + B + 2C)x^2 + (A_1 + B + C)x^3$$

und daraus (§. 112): $B = -3$, $A + A_1 + B - C = 2$

$A + B + 2C = 4$ und $A_1 + B + C = 0$

oder endlich aus diesen Gleichungen: $A = \frac{9}{2}$, $A_1 = \frac{7}{4}$, $B = -3$, $C = \frac{5}{4}$ so, dass man für den gegebenen Bruch die Auflösung hat:

$$\frac{3 - 2x + 4x^2}{x^4 + x^3 - x^2 - x} = \frac{9}{2(x+1)^2} + \frac{7}{4(x+1)} - \frac{3}{x} + \frac{5}{4(x-1)}.$$

Anmerk. Man kann auch hier das in der Anmerk. von §. 257 erwähnte Verfahren anwenden, und aus der obigen Gleichung (α) unmittelbar die Werthe von A, B, C finden, wenn man beziehungsweise $x + 1 = 0$, $x = 0$ und $x - 1 = 0$, d. i. $x = -1$; $x = 0$ und $x = 1$ setzt. Nur muss man dann, um auch A_1 zu bestimmen, diese für A, B, C gefundenen Werthe in die Gleichung (α) setzen und diese reduciren, wodurch man

$$\tfrac{7}{4}x(x^2 - 1) = A_1 x(x^2 - 1)$$

und daraus wieder, wie vorhin, $A_1 = \frac{7}{4}$ erhält.

2. Auf dieselbe Weise findet man auch die Brüche, wenn der sich wiederholende oder gleiche Factor ein quadratischer ist, wie z. B. bei dem Bruche

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{4x - 7x^3 - 2x^5}{(1+x^2)^3(5-2x^4)};$$

denn setzt man

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A+Bx}{(1+x^2)^3} + \frac{A_1+B_1x}{(1+x^2)^2} + \frac{A_2+B_2x}{1+x^2} + \frac{F_1(x)}{5-2x^4},$$

so findet man $A = \frac{7}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $A_1 = -\frac{49}{9}$, $B_1 = \frac{4}{9}$, $A_2 = \frac{238}{27}$, $B_2 = -\frac{22}{27}$ und $F_1(x) = \frac{1}{27}(-770 + 68x + 476x^2 - 44x^3)$ [I. 242—247].

III. Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen.

§. **260.** Hier sollen bloss die algebraischen Functionen in Betracht kommen, weil wir die Auflösung der transcendenten Functionen in unendliche Reihen in spätern Capiteln besonders vortragen werden, und zwar haben wir es hier, da die aus irrationalen Functionen entstehenden Reihen in der Entwickelung von $(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{\frac{m}{n}}$ enthalten, und bereits in §. 120 abgehandelt sind, lediglich mit jenen Reihen zu thun, die aus rationalen gebrochenen Functionen entstehen.

Recurrirende oder wiederkehrende Reihen.

§. **261.** Da sich nach §. 113, *c*) jede rationale gebrochene Function in eine unendliche Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ auflösen lässt, so setze man für die erste und einfachste Form einer solchen Bruchfunction, die wir wieder (§. 253) als echt gebrochen voraussetzen:

$$\frac{A_1}{a_1 + a_2x} = A + \mathfrak{t}_1x + \mathfrak{t}_2x^2 + \ldots + \mathfrak{t}_nx^n + \mathfrak{t}_{n+1}x^{n+1} + \ldots;$$

so erhält man durch Multiplication mit dem Nenner:

$$A_1 = Aa_1 + (\mathfrak{t}_1a_1 + Aa_2)x + (\mathfrak{t}_2a_1 + \mathfrak{t}_1a_2)x^2 + \ldots + (\mathfrak{t}_{n+1}a_1 + \mathfrak{t}_na_2)x^{n+1} + \ldots,$$

mithin (§. 112):

$$Aa_1 = A_1,\ \mathfrak{t}_1a_1 + Aa_2 = 0,\ \mathfrak{t}_2a_1 + \mathfrak{t}_1a_2 = 0 \text{ etc.}, \quad \mathfrak{t}_{n+1}a_1 + \mathfrak{t}_na_2 = 0,$$

und aus diesen Gleichungen:

$$A = \frac{A_1}{a_1},\ \mathfrak{t}_1 = \frac{-Aa_2}{a_1},\ \mathfrak{t}_2 = -\frac{a_2}{a_1}\mathfrak{t}_1, \ldots \mathfrak{t}_{n+1} = -\frac{a_2}{a_1}\mathfrak{t}_n.$$

Wie man sieht, wird vom 2. angefangen, jeder folgende Coefficient gebildet, indem man den nächst vorhergehenden mit dem beständigen Quotienten $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplicirt; die entstehende Reihe ist daher (§. 226) eine wiederkehrende oder recurrirende (auch rücklaufende). Der Quotient $-\frac{a_2}{a_1}$ heisst dabei die Relationsscala, welche hier Eingliederig ist, und aus welchem Grunde auch die erzeugte Reihe eine recurrirende der ersten Ordnung genannt wird.

Anmerk. Man wird von selbst die Bemerkung machen, dass das Gesetz der Bildung der Coefficienten (welches hier, wo der Zähler der gegebenen Bruchfunction nur ein Glied hat, vom 2. angefangen gilt) schon in der einzigen Gleichung für t_{n+1} enthalten ist, also die vorausgehenden Relationen von t_1, t_2 u. s. w. ganz überflüssig sind. Da man ferner auch das 1. Glied der Reihe $\frac{A_1}{a_1}$ immer als bekannt, gleich hinschreiben kann; so wird das einfachste und kürzeste Verfahren, eine solche Bruchfunction in eine recurrirende Reihe aufzulösen, folgendes, durch nachstehendes Beispiel erläutertes, sein.

Für die Bruchfunction $\frac{2}{1-x}$ z. B. setze man

$$\frac{2}{1-x} = 2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots;$$

so erhält man durch Wegschaffung des Nenners:

$$2 = 2 + \ldots + (t_{n+1} - t_n) x^{n+1} + \ldots,$$

und daraus: $t_{n+1} - t_n = 0$ oder $t_{n+1} = t_n$, welche Relation das vom 2. Glied angefangen geltende Bildungsgesetz der Coefficienten (nämlich, dass jeder folgende Coefficient seinem nächst vorhergehenden gleich ist] enthält, so, dass man also hat:

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$$

§. **262.** Um die zunächst auf die vorige Form folgende Bruchfunction $\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$ auf die einfachste Art in eine recurrirende Reihe aufzulösen, setze man, in Gemässheit der vorigen Anmerkung, da der Zähler sich bis x erstreckt und der Nenner aus 3 Gliedern besteht:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} = \frac{A_1}{a_1} + t_1 x + \ldots$$
$$+ t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

so erhält man:

$$A_1 + A_2 x = A_1 + \left(t_1 a_1 + \frac{A_1}{a_1} a_2\right) x + \ldots$$
$$+ (t_{n+2} a_1 + t_{n+1} a_2 + t_n a_3) x^{n+2} + \ldots$$

und daraus:

$$t_1 a_1 + \frac{A_1}{a_1} a_2 = A_2, \ldots t_{n+2} a_1 + t_{n+1} a_2 + t_n a_3 = 0,$$

also für das im 3. Glied anfangende Gesetz der Bildung:

$$t_{n+2} = -\frac{a_2}{a_1} t_{n+1} - \frac{a_3}{a_1} t_n,$$

nach welchem, wenn aus der 1. Gleichung t_1 bestimmt ist, t_2, t_3, ... leicht gefunden werden. Da hier die Relationsscala $-\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}$ zweigliederig ist, so heisst die entstehende Reihe eine recurrirende der zweiten Ordnung.

So hat man für die Bruchfunction $\frac{1-2x}{-2+x+x^2}$, diese

$$= -\tfrac{1}{2} + t_1 x + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

gesetzt, wenn man mit dem Nenner multiplicirt:

$$1 - 2x = 1 + (-2t_1 - \tfrac{1}{2}) x + \ldots + (-2t_{n+2} + t_{n+1} + t_n) x^{n+2} + \ldots$$

und daraus

$$-2t_1 - \tfrac{1}{2} = -2, \text{ also } t_1 = \tfrac{3}{4};$$
$$-2t_{n+2} + t_{n+1} + t_n = 0, \text{ also } t_{n+2} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1} + t_n),$$

d. h. vom 3. angefangen, ist jeder folgende Coefficient gleich der halben Summe der beiden nächst vorhergehenden; mithin ist endlich die Reihe selbst:

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} x + \tfrac{1}{8} x^2 + \tfrac{7}{16} x^3 + \tfrac{9}{32} x^4 + \ldots$$

§. **263**. Auf die nämliche Art erhält man aus der Function $\frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$ eine recurrirende Reihe der dritten Ordnung; die Scala ist dreigliederig, und das Gesetz der Bildung der Coefficienten fängt, wenn nicht etwa $A_3 = 0$ ist, erst im 4. Gliede der Reihe an.

So findet man für die Bruchfunction $\frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3}$, diese

$$= 3 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + t_{n+3} x^{n+3} + \ldots$$

gesetzt, (weil sich nämlich der Zähler bis x^2 erstreckt, und der Nenner,

das fehlende mit gezählt, aus 4 Gliedern besteht) und den Nenner weggeschafft: $t_1 + 6 = -2$, $t_2 + 2t_1 = 1, \ldots$ $t_{n+3} + 2t_{n+2} - 2t_n = 0$, also $t_1 = -8$, $t_2 = 17$ und (als Gesetz der Bildung) $t_{n+3} = 2t_n - t_{n+2}$) (die dreigliedrige Relationsscala ist: $-2+0+2$), so, dass also vom 4. angefangen, jeder folgende Coefficient gleich ist der zweifachen Differenz aus dem dritt- und nächst vorhergehenden Coefficienten. Man hat daher endlich:

$$\frac{3-2x+x^2}{1+2x-2x^3} = 3 - 8x + 17x^2 - 28x^3 + 40x^4 - 46x^5 + \ldots$$

§. **264.** Ohne diese Entwickelungen noch weiter fortzusetzen, ist es ersichtlich, dass man auf dieselbe Weise aus der gebrochenen Function

$$(A_1 + A_2x + \ldots + A_n x^{n-1}) : (a_1 + a_2 x + \ldots a_{n+1} x^n)$$

die recurrirende Reihe der n. Ordnung entwickeln kann,

§. **265.** Um das allgemeine Glied einer recurrirenden Reihe zu finden, wird man die Bruchfunction in Partialbrüche zerlegen, jeden davon in eine Reihe auflösen und die allgemeinen Glieder dieser Reihen summiren.

So erhält man z. B. für die in §. 262 behandelte Bruchfunction, diese nach §. 256 in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2} = \frac{1-2x}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{5}{3(x+2)},$$

mithin, wenn man jeden dieser beiden Brüche nach der Binomialformel in eine Reihe auflöst:

$$-\frac{1}{3(x-1)} = \tfrac{1}{3}(1-x)^{-1} = \tfrac{1}{3}(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$$

$$-\frac{5}{3(x+2)} = -\frac{5}{2.3}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} = -\frac{5}{2.3}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \ldots \frac{(-1)^n}{2^n} x^n\right).$$

folglich, indem man beide Reihen addirt und reducirt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{5}{(-2)^{n+1}}\right)x^n,$$

welches sofort in der That die obige recurrirende Reihe mit dem allgemeinen Gliede ist.

§. **266.** Ist allgemein die echt gebrochene Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ nach den vorhergehenden §§. in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{A}{(x-a)^\alpha}$$

und wird jeder dieser Brüche nach dem Binomialtheorem in eine unendliche Reihe aufgelöst, so, dass man hat:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = A(x-a)^{-\alpha} = A(-a)^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}$$
$$= A(-a)^{-\alpha}\left[1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{x}{a}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{\alpha(a+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\frac{x^n}{a^n}\right],$$

so ist sofort das allgemeine Glied der aus der obigen Bruchfunction entstehenden recurrirenden Reihe:

$$N = \left[\Sigma(-1)^\alpha \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\,\frac{A}{a^{\alpha+n}}\right]x^n.$$

Anmerk. Enthält der Nenner $f(x)$ des gegebenen Bruches lauter ungleiche Factoren, besitzt also die Gleichung $f(x)=0$ keine gleichen Wurzeln; so ist $\alpha=1$ und (§. 254, Relat. h) $A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$, daher ist in diesem Falle:

$$N = -\left[\Sigma\,\frac{F(a)}{a^{n+1}f_1(a)}\right]x^n.$$

So ist im vorigen Beispiele für den 1. Partialbruch $a=1$ und $f_1(x)=\frac{f(x)}{x-1}=x+2$, folglich $\frac{F(a)}{f_1(a)}=\frac{-1}{3}$; für den 2. Bruch $a=-2$; $f_1(x)=\frac{f(x)}{x+2}=x-1$, daher $\frac{F(a)}{f_1(a)}=\frac{5}{-3}$. Es ist daher beziehungsweise für diese beiden Partialbrüche:

$$\frac{F(a)}{a^{n+1}f_1(a)} = -\frac{1}{3.1^{n+1}} \text{ und } \frac{-5}{3(-2)^{n+1}},$$

mithin $N = -\left[-\tfrac{1}{3}-\frac{5}{3(-2)^{n+1}}\right]x^n = \tfrac{1}{3}\left[1+\frac{5}{(-2)^{n+1}}\right]x^n$, wie im vorigen §

[Die Entwickelung des summatorischen Gliedes findet man in I. S. 264.]

§. **267.** Ist umgekehrt die recurrirende Reihe $t_1+t_2x+t_3x^2+\ldots$ nebst dem Gesetze ihrer Bildung, z. B.

$$t_{n+2}=\frac{B}{A}t_{n+1}-\frac{C}{A}t_n,$$

oder der Relationsscala $\frac{B}{A}-\frac{C}{A}$ gegeben; so lässt sich dazu die gebrochene oder erzeugende Function sehr leicht finden. Denn aus der gegebenen Relation folgt $A\,t_{n+2}-B\,t_{n+1}+C\,t_n=0$, und daraus unmittelbar (mit Rücksicht auf die das Bildungsgesetz darstellende Relation und den Nenner der Bruchfunction in §. 262) der Nenner der ge-

suchten Function: $A - Bx + Cx^2$. Setzt man daher, unter der steten Voraussetzung, dass die Function echt gebrochen ist, $\frac{A_1 + A_2 x}{A - Bx + Cx^2} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 x + \ldots$ gleich der gegebenen Reihe, so geben, nachdem der Nenner weggeschafft worden, die beiden ersten aus der Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten entstehenden Gleichungen die Werthe von A_1 und A_2.

Es sei z. B. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots$ die recurr. Reihe und $\mathfrak{t}_{n+2} = \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_{n+1} + \mathfrak{t}_n)$ ihr Gesetz der Bildung, so ist, wegen $2\mathfrak{t}_{n+2} - \mathfrak{t}_{n+1} - \mathfrak{t}_n = 0$, sofort $2 - x - x^2$ der Nenner der erzeugenden Function. Setzt man daher $\frac{A_1 + A_2 x}{2 - x - x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \ldots$ (indem man nur zwei Glieder bedarf), so erhält man $A_1 + A_2 x = -1 + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})x + \ldots$, und daraus $A_1 = -1$ und $A_2 = 2$; die gebrochene Function ist demnach:

$$\frac{-1 + 2x}{2 - x - x^2} = \frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$$

(vergl. §. 262, Beispiel).

§. **268**. Die gebrochene oder erzeugende Function lässt sich auch noch finden, wenn ausser der recurr. Reihe nur die Form der Bruchfunction oder (bei Voraussetzung von echt gebrochenen Functionen) die Anzahl der Glieder der Relationsscala gegeben ist; wie wir diess sogleich an einem Beispiele nachweisen wollen.

Weiss man z. B., dass die Scala der recurr. Reihe $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + \ldots$ zweigliederig ist, so kann man daraus schliessen, dass die erzeugende Function von der Form sei: $\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$. Setzt man daher diesen Bruch gleich der gegebenen Reihe, die man Kürze halber immer durch $\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 x + \mathfrak{t}_3 x^2 + \ldots$ bezeichnen kann, und bringt den Nenner weg; so erhält man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten: $A_1 = \mathfrak{t}_1 a_1$, $A_2 = \mathfrak{t}_2 a_1 + \mathfrak{t}_1 a_2$, $0 = \mathfrak{t}_3 a_1 + \mathfrak{t}_2 a_2 + \mathfrak{t}_1 a_3$, $0 = \mathfrak{t}_4 a_1$ $\mathfrak{t}_3 a_2 + \mathfrak{t}_2 a_3$ u. s. w. Drückt man alle übrigen Coefficienten der Bruchfunction durch a_1 aus (durch welchen Factor sich der Bruch am Ende abkürzen lässt), so bedarf man zur Bestimmung der Coefficienten a_2 und a_3 des Nenners, womit man am besten die Rechnung beginnt, bloss die beiden letztern Gleichungen, welche, wenn man für $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots$ substituirt, in $\frac{1}{8}a_1 + \frac{3}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_3 = 0$ und $\frac{7}{16}a_1 + \frac{1}{8}a_2 + \frac{3}{4}a_3 = 0$ übergehen, und sich nach den bekannten Multiplicationsgesetzen zweier Functionsreihen immer unmittelbar hinschreiben lassen. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man ganz einfach durch Elimination: $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$, $a_3 = -\frac{1}{2}a_1$,

und damit aus den beiden ersten der vorigen Gleichungen: $A_1 = -\frac{1}{2}a_1$ und $A_2 = \frac{3}{4}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = a_1$; folglich für die erzeugende Function: $\frac{-\frac{1}{2}a_1 + a_1 x}{a_1 - \frac{1}{2}a_1 x - \frac{1}{2}a_1 x^2}$, d. i. $\frac{1-2x}{-2+x+x^2}$, wie im vorigen Paragraphe. [I., 255.]

§. **269**. Bilden die Coefficienten einer recurr. Reihe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung, so lässt sich durch eine einfache Transformation die erzeugende Function auf folgende Art finden.

Es sei $S = A + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_n x^n$ eine solche Reihe; man setze $x = \frac{z}{1+z}$, so wird (§. 261)

$$x = z - z^2 + z^3 - z^4 + \ldots,$$

und nach §§. 118, 119 etc.:

$$x^2 = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + \ldots,$$
$$x^3 = z^3 - 3z^4 + 6z^5 - 10z^6 + \ldots,$$
$$x^4 = z^4 - 4z^5 + 10z^6 - 20z^7 + \text{u. s. w.}$$

Man erhält also mit diesen Werthen aus der gegebenen Reihe:

$$S = A + t_1 z + (t_2 - t_1)z^2 + (t_3 - 2t_2 + t_1)z^3 + (t_4 - 3t_3 + 3t_2 - t_1)z^4 + \ldots$$

oder (§. 232):

$$S = A + t_1 z + \Delta^1 t_1 z^2 + \Delta^2 t_1 z^3 + \Delta^3 t_1 z^4 + \ldots,$$

und da aus der oben angenommenen Relation $z = \frac{x}{1-x}$ folgt, endlich:

$$S = A + t_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + \Delta^1 t_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \Delta^2 t_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \ldots,$$

eine Reihe, die immer abbricht, wenn, wie vorausgesetzt wurde, $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Reihe bildet.

1. So ist z. B. für die recurr. Reihe $3 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n + \ldots$ sofort $A = 3$, $t_1 = 1$, $\Delta^1 t_1 = 1$, $\Delta^2 t_1 = 0$, $\Delta^3 t_1 = 0$ u. s. w. also $S = 3 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{3 - 5x + 3x^2}{1 - 2x + x^2}$.

2. Auf gleiche Weise findet man für die recurr. Reihe $1 + 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + \ldots$ wegen $A = 1$, $t_1 = 4$, $\Delta^1 t_1 = 11$, $\Delta^2 t_1 = 14$ $\Delta^3 t_1 = 6$ (alle folgenden Differenzen sind Null) sofort:

$$S = \frac{1 + 5x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}.$$

§. **270.** Um zu untersuchen, ob eine vorliegende Reihe eine recurrirende sei, und in diesem Falle, ohne ein sonstiges Bestimmungsstück, die erzeugende Function zu finden, dienen folgende Betrachtungen.

§. **271.** Ist die recurrirende Reihe S von der 1. Ordnung, so ist der Form nach

$$S = \frac{A_1}{a_1 + a_2 x}, \text{ daher } \frac{1}{S} = \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_1} x;$$

theilt man also die Einheit durch die recurrirende Reihe erster Ordnung, so entsteht ein Quotient von der Form $p + qx$.

§. **272.** Ist die recurrirende Reihe von der 2. Ordnung, also $S = \frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$, so folgt

$$\frac{1}{S} = \frac{a_1}{A_1} + \frac{A_1 a_2 - A_2 a_1}{A_1^2} x + \frac{A_1^2 a_3 - A_2 (A_1 a_2 - A_2 a_1)}{A_1^2 (A_1 + A_2 x)} x^2;$$

dabei rührt der letzte in x^2 multiplicirte Bruch, welcher, wie man sieht, eine recurrirende Reihe der ersten Ordnung erzeugt, von dem Reste S' her, welcher geblieben ist, nachdem man im Quotienten bereits zwei Glieder $p + qx$ gefunden hat. Da nun auf diese Weise $\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S} x^2$ und $\frac{S'}{S}$ eine recurrirende Reihe der ersten Ordnung ist; so muss nach dem vorigen §. $\frac{S}{S'}$ einen Quotienten von der Form $p' + q'x$ ohne Rest geben.

§. **273.** Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man nun zu folgender Regel: Um zu untersuchen, ob die Reihe $S = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \ldots$ eine recurrirende sei, theile man die Einheit durch diese Reihe, setze aber die Division nur so weit fort, bis man im Quotienten zwei Glieder, $p + qx$ und demnach einen Rest $S' x^2$, wo S' wieder die Form $t'_1 + t'_2 x + t'_3 x^2 + \ldots$ besitzt, erhalten hat. Hierauf theile man eben so S durch S', bis man im Quotienten zwei Glieder $p' + q'x$ und den Rest $S'' x^2$, wo $S'' = t''_1 + t''_2 x + \ldots$ ist, erhalten hat. Unter denselben Bedingungen theile man

ferner S' durch S'', S'' durch S''' u. s. w. Gelangt man durch dieses Verfahren endlich zu einem solchen zweigliederigen Quotienten ohne Rest, so ist S eine recurrirende Reihe, und zwar von der m^{ten} Ordnung, wenn die letzte Division der Reihe nach die m^{te} war. Gesetzt, es gehe die dritte Division auf, so, dass man hat:

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S}x^2,$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2 \text{ und } \frac{S'}{S''} = p'' + q''x;$$

so ist

$$\frac{S''}{S'} = \frac{1}{p'' + q''x}, \quad \frac{S}{S'} = \frac{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}{p'' + q''x},$$

$$\frac{1}{S} = \frac{(p + qx)(p' + q'x)(p'' + q''x) + (p + qx + p'' + q''x)x^2}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2},$$

und endlich der Form nach: $S = \dfrac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$ die erzeugende Function, welche sofort eine recurrirende Reihe der dritten Ordnung liefert.

So ist z. B. für $S = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \ldots$ sofort $\frac{1}{S} = -2 - 3x + \frac{S'}{S}x^2$, $S' = \frac{5}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{25}{16}x^3 + \ldots$ und $\frac{S}{S'} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x$, ohne Rest; es ist also die gegebene Reihe eine recurrirende, und zwar der zweiten Ordnung. Um dafür die erzeugende Function zu finden, hat man

$$\frac{S'}{S} = \frac{5}{-1 + 2x}, \quad \frac{1}{S} = -2 - 3x + \frac{5x^2}{-1 + 2x} = \frac{2 - x - x^2}{-1 + 2x}, \text{ also endlich}$$

$$S = \frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$$ (vergl. Beispiel im § 262).

Anmerk. In der Anwendung kann es öfter vortheilhaft sein, Reihen, welche keine recurrirenden sind, näherungsweise dennoch als solche anzusehen und dazu die erzeugende Function zu suchen. Diese werden (vorausgesetzt, dass sie convergiren) der Wahrheit um so näher kommen, von je höherer Ordnung man die recurr. R. annimmt.

Siebentes Capitel.

Ueber die Umkehrung der Reihen.

§. **274.** Erklärung. Eine Reihe

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots,$$

in welcher also y als Function von x erscheint, umkehren, heisst x als Function von y, und zwar wieder durch eine nach steigenden Potenzen von y fortschreitende Reihe darstellen.

§. **275.** Um nun die Reihe

$$(1)\ y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots,$$

wobei A, B, C, .. von x unabhängige Coefficienten sind, umzukehren, nehme man für x die unbestimmte Reihe $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$ an, bilde daraus die in (1) vorkommenden Potenzen von x, und substituire die dadurch für x, x^2, x^3, .. entstehenden Reihen in (1); so erhält man, Alles nach y geordnet, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die zur Bestimmung von t_1, t_2, t_3, .. nöthigen Gleichungen.

1. Um z. B. die Reihe $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ umzukehren, setze man $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$; so wird (§§. 118 etc.) $x^2 = t_1^2 y^2 + 2t_1 t_2 y^3 + (2t_1 t_3 + t_2^2) y^4 + \ldots$, $x^3 = t_1^3 y^3 + 3t_1^2 t_2 y^4 + \ldots$, $x^4 = t_1^4 y^4 + \ldots$ u. s. w., also, wenn man diese Werthe für x, x^2, ... in der gegebenen Reihe substituirt und nach y ordnet:

$$y = t_1 y + (t_2 + t_1^2) y^2 + (t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3) y^3 + (t_4 + 2t_1 t_3 + t_2^2 + 3t_1^2 t_2 + t_1^4) y^4 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung folgt aber: $t_1 = 1$; $t_2 + t_1^2 = 0$, also $t_2 = -1$, $t_3 + 2t_1 t_2 + t_1^3 = 0$, also $t_3 = 1$; $t_4 + 2t_1 t_3 + t_2^2 + 3t_1^2 t_2 + t_1^4 = 0$, also $t_4 = -1$ u. s. w. Die gesuchte oder umgekehrte Reihe ist sonach: $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$ (Und in der That, die für y gegebene Reihe ist eine recurrirende, wofür §. 267 $y = \frac{x}{1-x}$ die erzeugende Function ist; da nun daraus $x = \frac{y}{1+y}$ folgt, so ist, diesen letztern Bruch nach §. 261 in eine recurrirende Reihe aufgelöst, wieder:

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$$

2. Setzt man, um die Reihe $y = x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$ umzukehren, wieder $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$, entwickelt wie im vori-

gen Beispiele die Potenzen von x, und substituirt die entstehenden Werthe durch y ausgedrückt in die gegebene Reihe; so erhält man, wenn wieder nach y geordnet und der mehr erwähnte Satz der unbestimmten Coefficienten angewendet wird, die Relationen: $t_1 = 1$; $t_2 + \frac{1}{1 \cdot 2} t_1^2 = 0$, also $t_2 = -\frac{1}{2}$; $t_3 + t_1 t_2 + \frac{1}{2 \cdot 3} t_1^3 = 0$, daraus $t_3 = \frac{1}{3}$; $t_4 + t_1 t_3 + \frac{1}{2} t_2^2 + \frac{1}{2} t_1^2 t_2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_1^4 = 0$, daraus $t_4 = -\frac{1}{4}$ u. s. w., demnach für die umgekehrte Reihe:

$$x = y - \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 + \ldots$$

3. Laufen die Exponenten von x in der gegebenen Reihe nach den ungeraden Zahlen fort, so beobachten die Exponenten von y in der umgekehrten Reihe wieder dasselbe Gesetz. Um daher die Reihe

$$y = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots$$

umzukehren, setze man $x = t_1 y + t_2 y^3 + t_3 y^5 + \ldots$ (nimmt man auch die Glieder $p y^2$, $q y^4$, .. mit in die Reihe auf, so findet man zuletzt $p = 0$, $q = 0$, ..), entwickle damit x^3, x^5, .. und substituire die in y ausgedrückten Werthe dieser ungeraden Potenzen in der gegebenen R.; so erhält man, nachdem Alles nach y geordnet worden, aus den durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten entstehenden Gleichungen: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{6}$, $t_3 = \frac{3}{40}$, $t_4 = \frac{5}{112}$ u. s. w., mithin für die umgekehrte Reihe selbst:

$$x = y + \frac{1 \cdot y^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

4. Eben so erhält man durch Umkehrung der Reihe

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17 x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} + \frac{62 x^9}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3} + \ldots$$

folgende sehr einfache Reihe:

$$x = y - \tfrac{1}{3} y^3 + \tfrac{1}{5} y^5 - \tfrac{1}{7} y^7 + \ldots$$

Anmerkung. Sind allgemein m, $m + n$, $m + 2n$, $m + 3n$, .. die Exponenten von x in der gegebenen Reihe, so sind $\frac{1}{m}$, $\frac{1+n}{m}$, $\frac{1+2n}{m}$, $\frac{1+3n}{m}$ etc. die auf einander folgenden Exponenten der umgekehrten Reihe [I., 271]. Hieraus folgt erstens, dass wenn $m = 1$ ist, die Exponenten der umgekehrten Reihe nach demselben Gesetze, wie jene der ursprünglichen Reihe gebildet sind, und zweitens, dass m in jedem Falle von Null verschieden sein müsse.

Wäre daher die Reihe $y = A + Bx + \ldots$ umzukehren, so müsste man zuerst A transferiren, d. i. $y - A = z$ setzen und die Reihe $z = Bx + Cx^2 + \ldots$ umkehren.

Achtes Capitel.

Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. **276.** Erklärung. Bezeichnet S_n die Summe der ersten n Glieder einer unendlichen Reihe:

$$a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots a_{n+m}, \ldots$$

ist nämlich

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

und nähert sich bei der unendlichen Zunahme von n S_n ohne Ende der Grenze S, d. h. wird dabei lim. $S_n = S$; so wird (§. 225) die Reihe convergent oder divergent genannt, je nachdem S eine bestimmte angebbare endliche, oder im zweiten Falle, eine unbestimmte oder unendliche Grösse ist; zugleich ist im ersten Falle S die Summe der unendlichen Reihe, während im zweiten Falle die Reihe keine Summe besitzt.

Da man nun, um nicht auf Irrwege und falsche Resultate zu gerathen, nur mit convergirenden Reihen rechnen darf; so muss man, in so weit diess möglich, allgemeine Kennzeichen für die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen aufzufinden trachten.

Untersucht man z. B. als einfachsten Fall die geometrische Reihe

$$x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

wofür bekanntlich

$$S_n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

ist, so ergibt sich Folgendes:

Ist 1) $x > 1$, so wächst S_n mit n (wegen x^{n+1}) bis ins Unendliche, und es wird für $n = \infty$ auch $S_n = \infty$.

Ist 2) $x = 1$, so erscheint zwar S_n unter der Form $\frac{0}{0}$, ist jedoch ebenfalls unendlich (weil $1 + 1 + 1 + \ldots$ in inf. $= \infty$ ist).

Ist endlich 3) $x < 1$, so nimmt der subtractive Bruch bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich ab und verschwindet für $n = \infty$, so, dass dafür dann $S_n = S = \frac{x}{1 - x} \ldots (m)$ ist.

Hieraus folgt sonach, dass diese Reihe für $x < 1$ convergent, dagegen für $x \geqq 1$ divergent ist.

§. **277**. Betrachtet man nun die allgemeine unendliche Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots \quad (1),$$

deren Glieder wir vorläufig als positiv voraussetzen wollen, so hat man, wenn man $S - S_n = E_n$ setzt, nach der vorigen Erklärung:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ und } S = S_n + E_n,$$

wobei

$$E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \text{ in inf.}$$

der Rest oder die Ergänzung der Reihe für den Zeiger n genannt wird. Hiernach muss also, wenn diese Reihe (1) convergiren soll, bei dem unendlichen Zunehmen von n E_n unendlich abnehmen und für $n = \infty$ vollends verschwinden oder gegen die Grenze Null convergiren; man kann daher auch sagen, dass eine Reihe convergire oder divergire, je nachdem bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers n die Ergänzung E_n beziehungsweise unendlich abnimmt oder nicht.

So ist für die vorige geometrische Reihe die Ergänzung:

$$E_n = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots + x^{n+m} = \frac{x^{n+1}(1 - x^m)}{1 - x}$$

und diese verschwindet für $n = \infty$ nur für Werthe von $x < 1$.

§. **278**. Besitzt eine unendliche Reihe durchaus gleiche Glieder a, so ist ihre Summe na für $n = \infty$ ebenfalls unendlich, und da diess für Reihen mit fortwährend steigenden oder wachsenden Gliedern noch mehr der Fall ist; so fordert die Convergenz der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ vor Allem, dass die Reihe eine fallende sei, und die Glieder $a_1, a_2, \ldots$ fortwährend, und zwar unendlich abnehmen, wenn n unendlich zunimmt, d. h. für $n = \infty$ $\lim. a_n = 0$ werde.

Obschon aber nicht fallende Reihen immer divergent sind, so reicht das Abnehmen der Glieder bis an diese Grenze Null noch keineswegs zur Convergenz der Reihe hin, indem dabei immer noch die Summe derselben unendlich gross werden kann, wie diess z. B. bei der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

in der That der Fall ist. Denn die Summe dieser unendlichen Reihe ist offenbar grösser als jene der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=n\,.\,\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

und da selbst diese für $n=\infty$ unendlich wird, so gilt diess von der erstern Reihe nur noch um so mehr.

Dasselbe ist auch, wie wir weiter unten sehen werden, bei der unendlichen Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ der Fall.

§. **279**. Es seien von irgend einer Stelle angefangen $\frac{1}{u_n}$, $\frac{1}{u_{n+1}}$, $\frac{1}{u_{n+2}}$ drei auf einander folgende Glieder einer unendlichen, fallenden Reihe, also $u_n < u_{n+1} < u_{n+2}$, und dabei u_n um so grösser, je grösser n wird; so hat man $\frac{u_n}{u_{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ für zwei unmittelbar auf einander folgende Quotienten, welche entstehen, wenn man in der Reihe jedes folgende Glied durch sein nächst vorhergehendes dividirt, und $\frac{(u_{n+1})^2-u_n\,u_{n+2}}{u_{n+1}\,u_{n+2}}$ als Differenz dieser beiden Quotienten.

Man sieht nun leicht, dass diese Differenz bei der unendlichen Zunahme von n unendlich abnimmt, und für $n=\infty$ Null wird.

§. **280**. Lehrsatz. Ist von einer gewissen Stelle an der Quotient aus irgend einem Glied durch sein unmittelbar vorhergehendes der fallenden unendlichen Reihe

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots \quad (1)$$

bei der unendlichen Zunahme des Zeigers n numerisch genommen kleiner als der Quotient $\frac{n}{n+1}$, ist nämlich dafür fortwährend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n}{n+1};$$

so ist die Reihe convergent, im Gegentheile, d. i. für $\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{=}{>} \frac{n}{n+1}$ divergent.

Denn setzt man $\frac{a_{n+1}}{a_n}=x$, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=x+\alpha_n$, $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}=x+\alpha_{n+1}$ u. s. w., so sind nach dem vorigen §. α_n, α_{n+1}, .. Grössen,

welche bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich abnehmen. Hieraus folgt:

$$a_{n+1} = a_n x,\ a_{n+2} = a_{n+1}(x + \alpha_n) = a_n x (x + \alpha_n)$$
$$a_{n+3} = a_{n+2}(x + \alpha_{n+1}) = a_n x (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1})$$
u. s. w.

Es ist also, wenn man summirt und für $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$ sogleich (§. 277) E_n setzt:

$$E_n = a_n \left[x + x(x + \alpha_n) + x(x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1}) + \ldots\right].$$

Nimmt nun n unendlich zu, so nehmen, wie vorhin bemerkt, die Grössen α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, ... unendlich ab und verschwinden gegen x, so dass also dabei

$$E_n = a_n (x + x^2 + x^3 + \ldots),$$

oder wenn $s = x + x^2 + x^3 + \ldots$ die Summe dieser unendlichen geometrischen Reihe bezeichnet, der Grenzwerth von $E_n = a_n s$ ist.

Ist nun $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x < \frac{n}{n+1}$, bleibt also selbst für unendlich wachsende n immer noch $x < 1$, so ist (§. 276) $s = \frac{x}{1-x}$ eine endliche Grösse, und daher wegen (§. 278) $\lim. a_n = 0$, dabei der Grenzwerth von $E_n = a_n s$ ebenfalls Null, folglich (§. 277) die Reihe (1) convergent.

Ist dagegen $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, d. i. $x \overset{=}{>} \frac{n}{n+1}$, also für $n = \infty$, $x \overset{=}{>} 1$, so wird s unendlich gross, und da auch, wegen $a_n \overset{=}{>} a_{n-1}$, der zweite Factor a_n nicht bis Null abnehmen kann, so kann auch $E_n = a_n s$ dabei niemals Null werden, also ist die erwähnte Reihe (1) divergent.

Die Reihe (1) ist also convergent, wenn bei dem unendlichen Wachsen von n der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+1}$, dagegen divergent, wenn dabei der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{=}{>} \frac{n}{n+1}$ ist, oder es ist, was dasselbe, jedoch für die Untersuchung bequemer ist, die Reihe convergent, wenn bei der unendlichen Zunahme von n der Grenzwerth (numerisch betrachtet, weil oben x oder hier $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ das Zeichen $+$ oder $-$ haben kann)

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1,$$

dagegen divergent, wenn $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\overset{=}{<}1$ ist.

§. **281.** Um diesen Satz oder dieses Kennzeichen sogleich auf einige Beispiele anzuwenden, wollen wir die nachstehenden Reihen in Beziehung auf ihre Convergenz oder Divergenz untersuchen.

1. Für die Reihe $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots$ hat man

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{x}(n+1-x)>1,$$

und zwar, wie man sieht, für jeden endlichen Werth von x, indem dafür bei dem unendlichen Werth von n jeder der beiden Factoren >1 ist.

Die Reihe convergirt also für alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden, d. i. für alle reellen Werthe von x.

2. Für die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ist

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{n}=1,$$

also die Reihe divergent (vergleiche §. 278).

3. Um überhaupt die Bedingungen zu finden, unter welchen die Reihe $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\ldots$ convergirt, hat man

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{(n+1)^m-n^m}{n^m}\right]=m+\frac{\binom{m}{2}}{n}+\frac{\binom{m}{3}}{n^2}+\ldots$$

Diese Reihe ist also convergent für alle positiven Werthe von $m>1$, dagegen divergent für $m\overset{=}{<}1$.

4. Für die Reihe $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots\pm\frac{1}{n}x^n\mp\frac{1}{n+1}x^{n+1}\pm\ldots$ folgt

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=-n\left[\frac{n(1+x)+1}{n\,x}\right],$$

und da dieser Ausdruck nur für $x<1$ und $x=+1$ grösser als 1 wird, so convergirt diese Reihe bloss innerhalb der Grenzen von $x=-1$ und $x=+1$, diese letztere Grenze mit begriffen.

5. Für die Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1.3.5..(2n-3)}{2.4.6..(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}+\ldots\left(=\frac{\pi}{2}\right)$$ ist

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{6n-1}{(2n-1)^2}\right]=\frac{6-\frac{1}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2},$$

und dessen Grenzwerth für unendlich wachsende n gleich $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$, also die Reihe convergent.

6. Für die Reihe der Binomial-Coefficienten

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{n} + \binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1} + \ldots \quad (= 2^m)$$

hat man

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+1-m}{m-n}\right) = \frac{2n+1-m}{\frac{m}{n} - 1},$$

und da dieser Quotient bei der unendlichen Zunahme von n für jeden endlichen Werth von m grösser als die Einheit ist, so convergirt diese Reihe für alle endliche (positive) Werthe von m.

7. Eben so wird für die Reihe

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots \pm \binom{m}{n} \mp \binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1} \pm \ldots \quad (= 0)$$

sofort $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = -n\left(\frac{m+1}{m-n}\right) = \frac{m+1}{1 - \frac{m}{n}},$

folglich convergirt diese Reihe für jeden endlichen Werth von $m > 0$.

8. Um endlich noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Reihe

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1.2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} + \ldots$$

convergirt, hat man

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) = \frac{\alpha}{1 + \frac{1}{n}},$$

es convergirt demnach diese Reihe für alle Werthe von $\alpha > 1$, divergirt dagegen für $\alpha \overline{\leq} 1$.

§. 282. Findet bei einer fallenden Reihe von irgend einer Stelle an ein regelmässiger Zeichenwechsel Statt, so ist die Reihe immer convergent; denn es ist dann der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ immer negativ, und da es nicht auf das Zeichen, sondern nur auf den numerischen Werth dabei ankommt, immer

$$-n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1\right) > 1.$$

So ist z. B. für die Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1}$ sofort

$$n\left(\frac{a^n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(-\frac{n+1}{n} - 1\right) = -n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = -(2n+1),$$

also der numerische Werth von $2n+1 > 1$, daher die Reihe convergent.

§. **283.** Ist der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für unendlich wachsende n numerisch genommen < 1, so ist die Reihe convergent, dagegen divergent für $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Denn setzt man im ersten Falle, da der Annahme gemäss für unendlich zunehmende n der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ sein muss, $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n}{n+1}$, so wird $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \frac{-n}{n+1}$, also numerisch genommen > 1.

Im zweiten Falle dagegen ist, wenn man $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{n+1}$ setzt, eben so $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \frac{-n}{n+1}$, also numerisch < 1.

Für $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ bleibt $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \,.\, 0 = \infty \,.\, 0$ unbestimmt, es lässt sich daher in diesem Falle aus dem einfachen Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ für die Convergenz oder Divergenz nicht entscheiden.

1. So ist für die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

der Quotient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2 .\, x^2}{(2n+2)\,(2n+3)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 x^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}$$

und dessen Grenzwerth für $n = \infty$ sofort $= x^2$, diese Reihe daher für $x < 1$ convergent und für $x > 1$ divergent.

Dagegen ist für $x = 1$ dieser Quotient ebenfalls $= 1$, woraus nichts gefolgert werden kann. Allein es ist, wie wir bereits oben (§. 281, Beispiel 5) nach dem allgemeinen Kennzeichen gefunden haben, auch dafür die entsprechende Reihe convergent.

2. Für die obige Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$ (§. 281, Beisp. 1) ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1},$$

woraus wieder folgt, dass diese Reihe für jeden endlichen Werth von x convergirt.

3. Es sei ferner die Reihe gegeben:

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots+\binom{m}{n}x^n+\ldots \quad [=(1+x)^m],$$

so ist dafür

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m-n}{n+1}x=\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x,$$

und dessen Grenzwerth (für $n=\infty$) $=-x$. Die Reihe convergirt also für alle Werthe von $x<1$, sie ist dagegen für $x>1$ divergent. Dass diese Reihe auch noch für $x=\pm 1$ convergire, wenn beziehungsweise $m<\infty$ und $m<\infty$, aber >0 ist, wurde bereits oben (§. 281, Beisp. 6 und 7) nach dem allgemeinen Satze entschieden.

4. Ist endlich in der vorigen Reihe $x=1$ und m negativ, wodurch die Reihe entsteht:

$$1-m+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\left(=\frac{1}{2^m}\right),$$

so ist dafür

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m+n}{n+1}=\frac{1+\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

also der Grenzwerth $=1$, woraus nichts gefolgert werden kann. Dagegen ist nach dem allgemeinen Kennzeichen (§. 280):

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{n+1}{m+n}-1\right)=n\left(\frac{1-m}{m+n}\right)=\frac{1-m}{1+\frac{m}{n}},$$

woraus sofort folgt, dass die hier in Rede stehende Reihe für alle positiven Werthe von $m<1$ convergire.

§. **284.** Vergleicht man mit der unendlichen Reihe

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots \quad (1)$$

eine andere $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ (2), und bleibt von irgend einer Stelle angefangen der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der Reihe (2) kleiner als der entsprechende Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ der Reihe (1), ist also

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

so ist auch $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$;

ist daher die Reihe (1) convergent, folglich $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$,

so ist auch (oder um so mehr) $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1$, mithin die Reihe (2) ebenfalls convergent.

Eben so ist, wenn $\frac{u_n}{u_{n+1}} \overset{=}{<} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ Statt findet, auch

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \overset{=}{<} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right);$$

ist daher die Reihe (1) divergent, also $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \overset{=}{<} 1$, so ist auch $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \overset{=}{<} 1$, also auch die Reihe (2) divergent.

Man kann also den Satz aufstellen, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihe (1) auch beziehungsweise die Convergenz oder Divergenz der Reihe (2) bedingt oder zur Folge hat, wenn von irgend einer Stelle angefangen im ersten Falle $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, und im letztern $\frac{u_{n+1}}{u_n} \overset{=}{>} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ bleibt.

Um z. B. nach diesem Satze die Bedingung für die Convergenz der Reihe $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\ldots$ zu finden, wollen wir sie mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{\alpha^n}+\ldots$$

vergleichen, deren Convergenz für $\alpha>1$ und Divergenz für $\alpha \overset{=}{<} 1$ bereits bekannt ist.

Soll nun die erstere Reihe convergiren, so muss nach dem eben angeführten Satze

$$\frac{n^m}{(n+1)^m}<\frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1}}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{(n+1)^m}{n^m}>\alpha, \quad \text{und dabei} \quad \alpha>1$$

sein. Setzt man daher $\alpha=1+\frac{1}{n}$, so muss

$$1+\frac{m}{n}+\frac{\binom{m}{2}}{n^2}+\ldots>1+\frac{1}{n} \quad \text{oder} \quad m+\frac{\binom{m}{2}}{n}+\ldots>1,$$

folglich $m>1$ sein, wie diess bereits oben gefunden wurde.

Anmerk. Mit Hilfe des allgemeinen Satzes oder Kennzeichens (§. 280) lässt sich ferner eben so einfach zeigen, dass sowohl die Summe als auch das Product zweier convergenter Reihen wieder eine convergente Reihe gibt.

Neuntes Capitel.

Entwickelung der Exponentialgrössen und logarithmischen Reihen. Bemerkung über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. **285.** Erklärung. Jede Grösse (die Einheit ausgenommen) mit einem veränderlichen Exponenten wird Exponentialgrösse genannt; sie hat daher immer eine der beiden Formen a^x oder y^x.

Eine Exponentialgrösse entwickeln, heisst diese in eine (convergente) unendliche, nach steigenden Potenzen ihres Exponenten fortlaufende Reihe auflösen.

§. **286.** Um die Exponentialgrösse a^x zu entwickeln, setze man (1) $a = 1 + b$; so wird $a^x = (1 + b)^x$, oder wenn man nach dem Binomialtheorem (dessen ganz allgemeine Giltigkeit §. 130 erwiesen wurde) entwickelt:

$$a^x = 1 + \binom{x}{1} b + \binom{x}{2} b^2 + \binom{x}{3} b^3 + \ldots + \binom{x}{n} b^n + \ldots,$$

und wenn man die Multiplicationen von

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{1 \,.\, 2}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \quad \text{u. s. w.}$$

ausführt und Alles nach x ordnet:

$$a^x = 1 + \Big[1 \,.\, b - \tfrac{1}{2} b^2 + \frac{-1 \,.\, -2}{2 \,.\, 3} b^3 + \ldots$$

$$+ \frac{-1 \,.\, -2 \ldots -(n-1)}{1 \,.\; 2 \ldots (n-1)\, n} b^n\Big] x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

Dabei ist der Coefficient von x, nämlich $A_1 = b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \ldots \pm \frac{1}{n} b^n$, nach einem einfachen und bestimmten (von der Natur der Binomial-Coefficienten abhängigen) Gesetze gebildet, während alle übrigen Coefficienten B_2, B_3, .. ganz unregelmässige Reihen bilden. — Man hat also, wegen $b = a - 1$ [aus (1)]:

$$(\alpha) \quad a^x = 1 + A_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

und dabei

(2) $A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$

§. 287. Um ferner die noch als unbestimmt anzusehenden Coefficienten B_2, B_3, .. durch dieselbe einfache Reihe A_1 auszudrücken, setze man in (α) $2x$ statt x; so erhält man, da die Coefficienten von x unabhängig sind:

$$a^{2x} = 1 + 2A_1 x + 2^2 B_2 x^2 + 2^3 B_3 x^3 + ..$$

Nun ist aber auch $a^{2x} = (a^x)^2 = (1 + A_1 x + B_2 x^2 + ..)^2$; entwickelt man daher die zweite Potenz dieses Polynoms und setzt diese der vorigen Entwickelung von a^{2x} gleich, so erhält man die identische Gleichung:

$$1 + 2A_1 x + (2B_2 + A_1^2) x^2 + ..$$
$$+ (2B_n + 2A_1 B_{n-1} + 2B_2 B_{n-2} + ..) x^n + ..$$
$$= 1 + 2A_1 x + 4B_2 x^2 + .. + 2^n B_n x^n + ..,$$

und daraus (§. 112):

$$2B_2 + A_1^2 = 4B_2 \quad \text{oder} \quad B_2 = \frac{A_1^2}{2};$$
$$2B_3 + 2A_1 B_2 = 8B_3 \quad \text{oder} \quad B_3 = \frac{A_1^3}{2.3} \text{ u. s. w.};$$
$$2B_n + 2A_1 B_{n-1} + 2B_2 B_{n-2} + .. = 2^n B_n,$$

so wie daraus, wenn man das hier herrschende Gesetz für die vorausgehenden Coefficienten B_{n-1}, B_{n-2}, .. gelten lässt:

$$B_n = \frac{A_1^n}{2.3..n},$$

wovon die Richtigkeit auch noch leicht durch höhere Induction nachgewiesen werden kann (I., 289). Man hat also endlich aus (α):

$$(3) \quad a^x = 1 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_1^2}{1.2} x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3} x^3 + .. + \frac{A_1^n}{1.2...n} x^n + ..,$$

wobei A_1 die oben in (2) angegebene Reihe oder Function der **Basis** a ist, und (§. 281, 4) innerhalb der Grenzen von $a - 1 = -1$ und $+1$, so wie für $+1$ selbst, also zwischen $a = 0$ und $+2$ convergirt. Ist A_1 eine endliche Grösse, so convergirt diese Reihe (3) (§. 281, 1) für jeden endlichen Werth von x oder innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$.

Anmerk. Um kurz anzuzeigen, dass eine Reihe innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ convergire, schreiben wir neben oder unter die Reihe: $\{x = a,\ x = b\}$, und wenn die Grenze b noch mit begriffen ist: $\{x = a,\ x = \underline{b}\}$.

§. **288.** Setzt man in der vorigen Reihe (3) $A_1 = 1$, und bezeichnet den besondern Werth von a, welchen diese Grundzahl vermöge Relation (2) (§. 286) erhalten muss, durch e; so hat man:

$$(4)\ e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + .. \{x = +\infty,\ x = -\infty\}.$$

Um ferner den numerischen Werth von e zu finden, darf man nur die obige Reihe (2) umkehren, wodurch man (§. 275, 2.):

$$a - 1 = A_1 + ..\ \text{oder}\ a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + ..$$

erhält, und dann $A_1 = 1$ setzen.

Ohne jedoch erst die Umkehrung zu Hilfe zu nehmen, darf man nur in der vorigen Reihe (4) $x = 1$ setzen, und man erhält: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ..$, oder bis auf 9 Decimalen genau: (5) $e = 2{\cdot}718281828$.

Die logarithmischen Reihen.

§. **289.** Bezeichnet a die Basis oder Grundzahl irgend eines Logarithmen-Systems, so ist bekanntlich die Grundgleichung der Logarithmen: $a^x = y$, und daraus für dieses System (m) $x = log\, y$.

§. **290.** Um nun $log\, y$ in eine Reihe nach y zu entwickeln, so folgt aus der vorigen Gleichung, wenn man beide Theile zur Potenz z erhebt; $a^{xz} = y^z$, oder [§. 287 (3)]:

$$1 + A_1 xz + .. = 1 + \alpha_1 z + ..,$$

wobei $A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + ..$, also eben so

$$\alpha_1 = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}$$

ist. Aus dieser identischen Gleichung folgt ferner, da sowohl $A_1 x$, als auch α_1 von z nicht abhängen (§. 112):

$$A_1 x = \alpha_1\ \text{oder}\ x = \frac{1}{A_1}[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - ..].$$

Setzt man für x den Werth aus der obigen Gleichung (m) und Kürze halber (n) $\frac{1}{A_1} = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + ...} = M$, so erhält man:

$$(1)\ log\, y = M[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - ..],$$

und wenn man $y+1$ statt y schreibt:

(2) $log(1+y)=M(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\ldots)$

$$\{y=-1,\ y=+1\}.$$

§. **291**. Der von der Basis a abhängige Factor M heisst Modul des Logarithmen-Systems der Basis a. Nimmt man, was am einfachsten und natürlichsten ist, $M=1$, wodurch auch (Gleichung n) $A_1=1$, mithin (§. 288) $a=e$ wird; so heissen die dieser Basis e entsprechenden Logarithmen natürliche, oder auch, aus einem später (bei der Quadratur der Curven) einzusehenden Grunde, hyperbolische Logarithmen. Da wir diese durchgehends bloss mit l bezeichnen werden, so folgt (da der Logarithmus der Basis in jedem Systeme gleich Eins ist) $le=1$ und (3) $l(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\ldots$

§. **292**. Folgerung. Für $y=a-1$ hat man nach (3): $la=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\ldots$, folglich §. 286, (2): $A_1=la$, daher auch §. 287, (3):

$$a^x=1+la\,x+\frac{l^2a}{2}x^2+\frac{l^3a}{2.3}x^3+\ldots,$$

und §. 290, (n): $M=\frac{1}{la}$.

Um vom Logarithmen-Systeme Log auf ein anderes log von der Basis a überzugehen, hat man bekanntlich:

$$log\,y=\frac{Log\,y}{Log\,a}.$$

Lässt man daher die natürlichen für die bekannten Logarithmen gelten, so erhält man $log\,y=\frac{ly}{la}=\frac{1}{la}lx$, oder endlich (vermöge der vorigen Relation) $log\,y=Mly$; dabei bezeichnet M den Modul für das System log von der Basis a.

§. **293**. Um die obige Reihe (2) für Werthe von $y>1$ gut convergirend, also für die wirkliche Berechnung brauchbar zu machen, setze man in dieser Reihe $-y$ statt y, und ziehe von ihr die dadurch entstehende Reihe ab; so erhält man $log(1+y)-log(1-y)$ oder

(β) $log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2M(y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+\ldots)$,

und wenn man $\frac{1+y}{1-y} = \frac{x}{x-1}$ setzt, woraus $y = \frac{1}{2x-1}$ folgt:

$$(4)\ \log x = \log(x-1) + 2M\left[\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3(2x-1)^3} + \frac{1}{5(2x-1)^5} + \ldots\right].$$

§. **294**. Nach dieser schon sehr gut convergirenden Reihe erhält man die natürlichen Logarithmen der drei ersten Primzahlen (die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen werden durch blosse Addition aus jenen der Primzahlen erhalten) wegen $l1 = 0$ und $M = 1$:

$$l2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right) = 0{\cdot}69314718,$$

$$l3 = l2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \ldots\right) = 1{\cdot}09861229,$$

$$l5 = 2l2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \ldots\right) = 1{\cdot}60943791.$$

Daraus hat man z. B. für die zusammengesetzte Zahl 10:

$$l10 = l2 + l5 = 2{\cdot}30258509.$$

§. **295**. Um diese letztere Reihe (4) noch convergenter zu machen, setze man $x = z^2$; so erhält man, wegen $\log(x-1) = \log(z^2-1) = \log(z+1) + \log(z-1)$, sofort

$$(5)\ \log z = \tfrac{1}{2}\left[\log(z-1) + \log(z+1)\right] + M\left[\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3(2z^2-1)^3} + \ldots\right].$$

§. **296**. Setzt man, für den Fall, dass die Logarithmen auf 20 oder 30 Decimalstellen berechnet werden sollen, in der Reihe (β), §. 293: $y = \frac{2}{x^3-3x}$; so erhält man:

$$1 + y = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3-3x},\quad 1 - y = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3-3x},\ \text{folglich}$$

$$\log\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = 2M\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{2^3}{3(x^3-3x)^3} + \ldots\right],$$

und daraus, wenn man die eingeklammerte Reihe durch R bezeichnet, die von Borda gefundene Formel:

$$(6)\ \log(x+2) = 2\log(x+1) + \log(x-2) - 2\log(x-1) + 2MR.$$

§. **297**. Setzt man in der nämlichen Reihe (β) $y = \frac{p-q}{p+q}$, wodurch $\frac{1+y}{1-y} = \frac{p}{q}$ wird; so erhält man

$$(\gamma)\ log\frac{p}{q}=2M\left[\left(\frac{p-q}{p+q}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\ldots\right],$$

und daraus viele gut convergirende Reihen, wenn man den unbestimmten Grössen p und q solche Werthe beilegt, dass sich diese erstlich in einfache Factoren zerlegen lassen, und ferner $p-q$ bedeutend kleiner als $p+q$ ausfällt. Solche Werthe sind z. B. die folgenden:

$$p=x^4-25x^2=x^2(x+5)(x-5) \text{ und}$$
$$q=x^4-25x^2+144=(x+3)(x-3)(x+4)(x-4);$$

denn man erhält damit aus (γ), wenn man der Kürze wegen die Reihe

$$\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\ldots=R$$

setzt, die von Haros herrührende Reihe:

$$(7)\ log(x+5)=log(x+4)+log(x+3)$$
$$+log(x-4)+log(x-3)-2\,log\,x-log(x-5)-2MR.$$

Anmerk. So brauchbar auch diese bisher entwickelten Reihen sein mögen, so würde man doch noch, wenn es sich heut zu Tage um die Berechnung von ausgedehnten logarithmischen Tafeln handeln sollte, mit grossem Vortheile damit ein Verfahren in Verbindung bringen, welches die Differenzenreihen an die Hand geben [I., 302].

§. **298.** Ausser dem natürlichen Logarithmen-Systeme, welches ausschliessend in der Analysis angewendet wird, ist noch vorzüglich, und zwar durchgehends beim Rechnen, das Brigg'sche System, welches 10 zur Basis hat, im Gebrauche. Da aber für dieses System der Modul (§. 292):

$$M=\frac{1}{l10}=\frac{1}{2\cdot302\ldots}=\cdot43429448$$

ist, so wird man (§. 292) die natürlichen Logarithmen (l) in Brigg'sche (die wir immer durch log bezeichnen werden) umwandeln, wenn man die erstern mit diesem Decimalbruche ·434... multiplicirt, dagegen, umgekehrt, diese letztern auf natürliche Logarithmen bringen, wenn man sie durch diesen Bruch dividirt, oder, was bequemer ist, mit $l10=2\cdot30258509$ multiplicirt.

§. **299.** Da wir die Eigenthümlichkeiten und Vorzüge dieses Systems als bekannt voraussetzen dürfen, so wollen

wir hier nur noch kurz einen Satz ableiten, auf welchem der Gebrauch der Tafeln beruht, und in den Elementen nur aus den Tafeln selbst nachgewiesen werden kann.

§. 300. Setzt man in der Reihe (2), §. 290, in welcher jetzt M den Brigg'schen Modul bezeichnen soll, $y = \frac{1}{n}$; so erhält man $log\,(n+1) - log\,n = M\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots\right]$, eine Reihe für die Differenz der Logarithmen zweier um eine Einheit von einander verschiedener Zahlen.

Ist nun bereits $n > 10000$, also $\frac{1}{n} < \cdot 0001$ und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 < \cdot 0^8 5;$$

so hat, da auch überdies noch $M < 1$ ist, selbst schon das zweite Glied dieser Reihe auf 7stellige Mantissen keinen Einfluss mehr, und man kann daher für Tafeln, welche die Logarithmen auf höchstens 7 Decimalstellen enthalten, und für Zahlen n, welche schon nahe gleich 10000 sind oder diese Zahl übersteigen (für 6stellige Mantissen brauchen diese nur 1000 zu übersteigen) setzen:

$$log\,(n+1) - log\,n = \frac{M}{n}.$$

Unter den nämlichen Bedingungen ist aber auch

$$log\,(n+2) - log\,(n+1) = \frac{M}{n+1},$$

und da bei dieser Grösse von n und bis auf die angenommene Grenze von 7 Decimalstellen (wie man leicht findet) $\frac{M}{n+1} = \frac{M}{n}$ ist; so hat man:

$$log\,(n+1) - log\,n : log\,(n+2) - log\,(n+1)$$
$$= \frac{M}{n} : \frac{M}{n+1} = 1 : 1 = (n+1) - n : (n+2) - (n+1),$$

d. h. es verhalten sich unter diesen Bedingungen die Differenzen der Logarithmen, wie die Differenzen der zugehörigen Zahlen.

Bekanntlich beruht auf diesem Satze die Methode, um aus einer solchen 7stelligen Tafel, die gewöhnlich die Logarithmen aller 5zifferigen Zahlen unmittelbar enthält, auch die Logarithmen der 6-, 7- und

in manchen Fällen 8zifferigen Zahlen mit Hilfe der Proportionaltheile zu finden. [Noch Mehreres hierüber in I., 307, ff.]

§. **301**. Um eine Reihe für die entsprechende Zahl durch den Logarithmus ausgedrückt zu finden, setze man $e^z = x$; so wird, §. 288: $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$, oder wegen $z = lx = \frac{log\,x}{M}$ auch:

$$(8)\quad x = 1 + \left(\frac{log\,x}{M}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{log\,x}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{log\,x}{M}\right)^3 + \ldots$$

$$\left\{\frac{log\,x}{M} = -\infty,\ \frac{log\,x}{M} = +\infty\right\}.\ \text{[I., 309, ff.]}$$

§. **302**. Mit Hilfe der logarithmischen Reihe (2), §. 290, lässt sich nun auch eine Formel zur approximativen Berechnung von x aus der Gleichung $x^x = a$ entwickeln. Denn ist $x = \alpha$ ein vom wahren Werthe um keine ganze Einheit mehr abweichender erster Näherungswerth, welcher durch ein paar Versuche leicht gefunden wird; so setze man $(m)\ x = \alpha + y$, wobei also $y < 1$ ist. Dadurch erhält man, wegen $x\,log\,x = log\,a$:

$$log\,a = (\alpha + y)\,log\,(\alpha + y) = (\alpha + y)\left[log\,\alpha + log\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)\right],$$

oder wegen

$$log\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right) = M\left[\frac{y}{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{My}{\alpha},$$

wenn man nämlich, da es sich nur um einen einfachen Näherungswerth handelt, die höhern Potenzen von $\frac{y}{\alpha}$ auslässt:

$$log\,a = (\alpha + y)\left(log\,\alpha + \frac{My}{\alpha}\right) = \alpha\,log\,\alpha + My + y\,log\,\alpha$$

(wenn man nämlich $\frac{My^2}{\alpha}$ wieder auslässt) und daraus als Näherungswerth für y:

$$(9)\quad y = \frac{log\,a - \alpha\,log\,\alpha}{M + log\,\alpha}.$$

Um z. B aus der Gleichung $x^x = 645$ den Werth für x zu finden, hat man nach dieser Formel, da $4^4 = 256$ und $5^5 = 3125$ ist, also x zwischen 4 und 5 liegt, für $\alpha = 4{\cdot}5$, wegen $a = 645$ und (§. 298) $M = {\cdot}4342945$, sofort $y = -{\cdot}119$. Mit diesem Werthe ist $x = 4{\cdot}5 - {\cdot}119 = 4{\cdot}381$ genauer, als der vorige Werth α. Lässt man diesen letztern Werth für α gelten, und berechnet nach der nämlichen Formel (9) dafür y, so erhält man $y = -{\cdot}00109$, also ist noch genauer: $x = 4{\cdot}381$

— ·00109 = 4·37991. Setzt man aber neuerdings $\alpha = 4{\cdot}37991$, so findet man $y = -{\cdot}0^{6}1$, also $x = 4{\cdot}37991 - {\cdot}0^{6}1 = 4{\cdot}3799099$, welcher Werth bereits schon bis einschliessig der 7. Decimalstelle richtig ist und durch Fortsetzung dieses Verfahrens leicht noch genauer gefunden werden könnte.

Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. **303**. Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine unendliche Factorenfolge $F = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\, a_{n+1} \ldots$ convergirt, d. h. sich einer bestimmten endlichen Grenze um so mehr nähert, je mehr Factoren von vorne herein man beibehält; so bemerke man, dass wegen (§§. 289, 291) $a_n = e^{la_n}$, auch (1) $F = e^{la_1 + la_2 + \ldots + la_n + \ldots}$ ist. Ist nun die unendliche Reihe (2) $l\,a_1 + l\,a_2 + \ldots + l\,a_n + \ldots$ convergent, und s ihre Summe, so ist auch $F = e^s$ convergent und von Null verschieden. Ist dagegen diese Reihe (2) divergent, also ihre Summe $= \pm\infty$; so ist im ersten Falle $F = e^{+\infty} = \infty$ divergent, und im zweiten Falle $F = e^{-\infty} = 0$, also convergent und gleich Null.

§. **304**. Setzt man

$$a_1 = 1 + \alpha_1\,,\quad a_2 = 1 + \alpha_2\,,\quad \ldots\quad a_n = 1 + \alpha_n \text{ u. s. f.,}$$

so wird also das Product

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)\ \ldots\ (1 + \alpha_n)(1 + \alpha_{n+1})\ \ldots \quad (1)$$

bei der unendlichen Zunahme von n gegen eine endliche von Null verschiedene Grenze $p = e^s$ convergiren, wenn die nachstehende Reihe

$$l(1+\alpha_1) + l(1+\alpha_2) + \ldots + l(1+\alpha_n) + l(1+\alpha_{n+1}) + \ldots \quad (2)$$

convergirt und die Summe s besitzt; dagegen sich dem Werthe von $p = 0$ oder $p = \infty$ nähern, wenn die Summe dieser Reihe (2) beziehungsweise $-\infty$ oder $+\infty$ wird.

Nun ist (§. 291)

$$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$
$$= x - \tfrac{1}{2}x^2(1 + d),$$

wobei, wie leicht zu sehen,

$$d = -2(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 + \ldots) \text{ ist,}$$

mithin, wenn man die Ergänzung oder den Rest der Reihe (2) wieder durch E_n bezeichnet, d. i. (§. 277)

$$l(1+\alpha_{n+1})+l(1+\alpha_{n+2})+\ldots=E_n$$

setzt, wegen

$l(1+\alpha_{n+1})=\alpha_{n+1}-\frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2(1+d_n)$, wobei

$$d_n=-2(\tfrac{1}{3}\alpha_{n+1}-\tfrac{1}{4}\alpha_{n+1}^2+\ldots)$$

$l(1+\alpha_{n+2})=\alpha_{n+2}-\frac{1}{2}\alpha_{n+2}^2(1+d_{n+1})$, wobei

$$d_{n+1}=-2(\tfrac{1}{3}\alpha_{n+2}-\tfrac{1}{4}\alpha_{n+2}^2+\ldots)$$

u. s. w.

sofort, wenn d_s einen Mittelwerth zwischen $d_n, d_{n+1}, d_{n+2}, \ldots$ bezeichnet, auch, wenn man nach verticalen Columnen addirt,

$$E_n=(\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\alpha_{n+3}+\ldots)$$
$$-\tfrac{1}{2}(\alpha_{n+1}^2+\alpha_{n+2}^2+\ldots)(1+d_s)\ldots(m).$$

Sind nun erstens die beiden Reihen

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots(3)$$

und $$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2+\alpha_{n+1}^2+\ldots(4)$$

gleichzeitig convergent, so werden die Glieder α_{n+1}, $\alpha_{n+2}, \ldots$ und $\alpha_{n+1}^2, \alpha_{n+2}^2, \ldots$ der Relat. (m) für unendlich wachsende n unendlich klein, und da auch d_s dabei gegen 1 verschwindet, so convergirt E_n gegen Null, folglich ist die Reihe (2) convergent, und wenn s ihre Summe ist, so convergirt das Product (1) gegen die endliche von Null verschiedene Grenze $p=e^s$.

Ist zweitens die vorige Reihe (3) convergent, dagegen jene (4) divergent, so nähert sich der Ausdruck (m) oder E_n, mithin auch (wegen $s=l(1+\alpha_1)+l(1+\alpha_2)+\ldots+E_n$) die Reihe (2) selbst ohne Ende der Grenze $-\infty$, und sonach convergirt das Product (1) gegen die Grenze Null.

Ist drittens die Reihe (3) divergent und negativ, dagegen jene (4) convergent, so hat E_n, mithin auch die Reihe (2) die Grenze $-\infty$, folglich convergirt das Product (1) wieder gegen Null.

Ist endlich viertens die Reihe (3) divergent und positiv, dagegen jene (4) convergent, so besitzt E_n und sonach auch die Reihe (2) die Grenze $+\infty$, und sonach das Product (1) bei der unendlichen Zunahme von n die Grenze e^{∞}.

Anmerk. Hat das Product (1) die Form $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots$ und kommen dabei Factoren $1-\alpha_m$ vor, wobei $\alpha_m > 1$ ist, so muss man sich in der Reihe (2) für die entsprechenden Logarithmen $l(1-\alpha_m)$ der negativen Grössen die Logarithmen ihrer numerischen Werthe ohne Rücksicht auf das negative Zeichen gesetzt denken.

§. **305.** Zur Anwendung der vorhergehenden Sätze mögen folgende Beispiele dienen.

1. Für die unendliche Factorenfolge oder das Product

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\ldots$$

sind die obigen Reihen (3) und (4) beziehungsweise:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots \quad \text{und} \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots,$$

von denen (§§. 282, 281) die erstere convergent und die letzte divergent ist; es convergirt daher das vorliegende Product gegen die Grenze Null.

2. Für das Product $(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{9})\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ldots$ sind die beiden Reihen (3) und (4):

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad 1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots,$$

und da beide Reihen convergent sind, so convergirt dieses Product gegen eine endliche, von Null verschiedene Grenze.

3. Für die Factorenfolge $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots$ sind die beiden Reihen (3) und (4):

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

und da die erstere divergent und negativ, dagegen die letztere convergent ist, so convergirt das vorliegende Product gegen die Grenze Null.

Diess ist überhaupt bei dem Producte $\frac{1}{m}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{3}{m+2}\ldots$ der Fall, wenn m positiv und >1 ist. Dagegen nimmt dasselbe mit n unendlich zu, wenn dabei $m<1$ ist.

4. Für das Product endlich

$$(1\pm x^2)\left(1\pm\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1\pm\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1\pm\frac{x^2}{n^2}\right)\ldots$$

werden die beiden erwähnten Reihen (3) und (4):

$$\pm x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) \quad \text{und} \quad x^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)$$

für alle endlichen reellen Werthe von x convergent, folglich con-

vergirt diese unendliche Factorenfolge für beide Zeichen von x gegen eine endliche von Null verschiedene Grenze.

Anmerk. Zu den wenigen derartigen Producten, für welche sich die endliche Grenze bestimmen lässt, gehört eben das vorige Product

$$(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

für welches man, $x=\frac{z}{\pi}$ gesetzt, die Grenze (*Cauchy*: *Cours d'analyse*) $\frac{Sin\, z}{z}$ findet, so, dass

$$Sin\, z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$$

$$= z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots,$$

und wenn man $z=\frac{\pi}{2}$ setzt, sofort

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots,$$

oder endlich

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

(ein zuerst von Wallis gefundener Ausdruck) wird. $\frac{\pi}{2}$ ist sonach zugleich die Grenze der unendlichen Factorenfolge

$$(1+1)(1-\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{5})\ldots=(1+1)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots$$

für welche auch in der That die obigen beiden Reihen (3) und (4) hier in $-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$ und $\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$ übergehen, welche beide convergent sind.

Zehntes Capitel.

Trigonometrische Reihen. Berechnung von π. *Moivre*sche Formel. Binomische Gleichungen.

§. **306**. Setzt man Kürze halber $\sqrt{-1} = i$ und in der Reihe (4), §. 288, statt x einmal xi und dann $-xi$; so erhält man: $e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3 i}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5 i}{2...5}$ etc.

und $e^{-xi} = 1 - xi - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3 i}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^5 i}{2...5}$ — etc.

Ferner aus diesen beiden Reihen, wenn man sie einmal addirt und dann auch von einander subtrahirt, im erstern Falle sogleich durch 2, und im letztern durch $2i$ dividirt:

$$\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2...6} + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

§. **307**. Bezeichnet man den ersten dieser beiden Exponentialausdrücke durch $f(x)$ und den letztern durch $\varphi(x)$, so erhält man ganz einfach daraus folgende Relationen: $f(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\overline{f(x)}^2 + \overline{\varphi(x)}^2 = 1$, $f(-x) = f(+x)$, $\varphi(-x) = -\varphi(+x)$, $f(2x) = 2\overline{f(x)}^2 - 1 = 1 - 2\overline{\varphi(x)}^2$, $\varphi(2x) = 2\varphi(x) f(x)$ u. s. w., so wie auch noch $\varphi(x \pm y) = \varphi(x) f(y) \pm \varphi(y) f(x)$ und $f(x \pm y) = f(x) f(y) \mp \varphi(x) \varphi(y)$ [I., 328]. Aus allen diesen Relationen folgt aber, dass $f(x) = \cos x$ und $\varphi(x) = \sin x$ sei *).

§. **308**. Man hat demnach folgende wichtige Ausdrücke:

(1) $\sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, (2) $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$,

*) Da hier immerhin der Zweifel bestehen kann, ob diese beiden durch $\varphi(x)$ und $f(x)$ bezeichneten Reihen in der That auch alle Eigenschaften und Werthe der in der Trigonometrie unter dem Namen *Sinus* und *Cosinus* bekannten goniometrischen Linien ausdrücken, und für die Analysis die Kenntniss der Elementar-Trigonometrie durchaus nicht unentbehrlich ist; so kann man auch den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich die Trigonometrie ganz ignoriren, diese beiden Reihen $\varphi(x)$ und $f(x)$ auf irgend eine Weise benennen und bezeich-

$$(3)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2...5} - \ldots,$$

$$(4)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2...6} + \ldots,$$

$$\{x = -\infty,\ x = +\infty \text{ für beide Reihen}\}.$$

§. **309**. Wegen $tang\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ erhält man ganz einfach, wenn man für $\sin x$ und $\cos x$ die Reihen (3) und (4) substituirt:

$$(5)\quad tang\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} + \ldots$$

$$(6)\quad \cot x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} - \frac{2x^5}{3^3.5.7} - \ldots$$

[Wie man in diese Reihen durch Einführung der Bernoullischen Zahlen (§. 245, Anmerk. 1) ein Gesetz hineinbringt, so wie die Entwickelung der Reihen für $l \sin x$, $l \cos x$ etc., s. m. I., 333, ff.]

§. **310**. Um x durch $\sin x$ und $tang\, x$ auszudrücken, erhält man durch Umkehrung der Reihen (3) und (5) [§. 275, Beispiele 3 und 4]:

$$(7)\quad x = \sin x + \frac{1 . \sin x^3}{2 . 3} + \frac{1.3 \sin x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5 \sin x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

$$\{\sin x = -\underline{1},\ \sin x = +\underline{1}\},$$

$$(8)\quad x = tang\, x - \tfrac{1}{3}\, tang\, x^3 + \tfrac{1}{5}\, tang\, x^5 - \tfrac{1}{7}\, tang\, x^7 + \ldots$$

$$\{tang\, x = -\underline{1},\ tang\, x = +\underline{1}\}.$$

Anmerkung. Diese letztere Reihe kann auch direct auf folgende Art abgeleitet werden: aus den Gleich. (1) und (2), §. 308, folgt durch Addition und Subtraction (wieder $\sqrt{-1} = i$ gesetzt):

nen (wofür man jetzt allerdings, um Verwirrungen zu vermeiden, das Geschichtliche respectiren, und diese Functionsreihen durch *Sinus* und *Cosinus* bezeichnen wird) und später erst in der Geometrie nachweisen, dass diese ziffermässig berechneten Reihen die Längen gewisser Linien angeben, wenn nämlich x numerisch gegeben ist und die Länge eines Kreisbogens vorstellt.

Man kann allerdings diese beiden Reihen auch aus schon bekannten Eigenschaften des Sinus und Cosinus der Trigonometrie, so z. B. $f(x)$ aus jener $\cos(-x) = \cos(+x)$, $\cos 0 = 1$, $\cos 2x = 2\cos x^2 - 1$ u. s. w. herleiten, allein man gewinnt, wie es sich von selbst versteht, dadurch Nichts an Beweiskraft, und es gilt auch für diesen Fall die eben gemachte Bemerkung.

$e^{xi} = \cos x + i \sin x = \cos x\,(1 + i\, tang\, x)$ und $e^{-xi} = \cos x - i \sin x = \cos x\,(1 - i\, tang\, x)$, und wenn man auf natürliche Logarithmen übergeht: $xi = l \cos x + l\,(1 + i\, tang\, x)$ und $-xi = l \cos x + l\,(1 - i\, tang\, x)$; diese beiden letztern Gleichungen von einander abgezogen, erhält man, wenn man auch gleich durch $2i$ dividirt:

$$x = \frac{1}{2i} l \left(\frac{1 + i\, tang\, x}{1 - i\, tang\, x}\right),$$ oder, wegen (§. 293, β)

$$l\left(\frac{1 + i\, tang\, x}{1 - i\, tang\, x}\right) = 2i\,(tang\, x - \tfrac{1}{3}\, tang\, x^3 + \ldots),$$

endlich: $x = tang\, x - \frac{1}{3}\, tang\, x^3 + \frac{1}{5}\, tang\, x^5 - \ldots$

Reihen zur Berechnung der Ludolphischen Zahl π.

§. **311**. Setzt man in der vorigen Reihe (8)

$$x = \frac{\pi}{4} = 45^0,$$

so erhält man, wegen $tang\, x = tang\, 45^0 = 1$, sofort die zuerst von *Leibnitz* aufgestellte Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots,$$

welche jedoch wegen ihrer zu geringen Convergenz zur Berechnung selbst nicht brauchbar ist.

§. **312**. Dagegen erhält man für $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ aus der genannten Reihe, wegen $tang\, 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, die schon besser convergirende Reihe $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \ldots$ oder

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right).$$

§. **313**. Setzt man $a + b = 45^0$, so wird (§. 22)

$$tang\,(a + b) = \frac{tang\, a + tang\, b}{1 - tang\, a\; tang\, b} = 1,$$

und aus dieser letztern Gleichung für $tang\, a = \frac{1}{2}$, sofort $tang\, b = \frac{1}{3}$. Nun ist aber wieder nach der Reihe (8), wegen $tang\, a = \frac{1}{2}$ sofort $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \ldots$ und wegen $tang\, b = \frac{1}{3}$: $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \ldots$, mithin wenn man diese beiden Reihen addirt, wegen $a + b = \frac{\pi}{4}$, sofort:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right).$$

Nach dieser von *Euler* herrührenden, zur wirklichen Berechnung äusserst bequemen Reihe findet man für die ersten 16 Decimalstellen: $\pi = 3{\cdot}1415926535897932$.

Anmerk. Gestützt auf das hier angewandte Verfahren, den Bogen von 45° in 2 oder mehrere andere Bögen zu zerlegen, deren Tangenten passende Werthe haben, lassen sich noch viele andere und stärker convergirende Reihen herleiten. So wird z. B. für $2a + b = 45^0$ und $tang\, a = \frac{1}{3}$, wofür man $tang\, b = \frac{1}{7}$ findet:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \ldots\right).$$

Für $4a + b = 45^0$ und $tang\, a = \frac{1}{5}$, wozu $tang\, b = -\frac{1}{239}$ gefunden wird, erhält man:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right),$$

u. s. w. [I., 337, ff.]

Moivre'sche Binomialformel.

§. **314**. Aus den Gleichungen (1) und (2), §. 308, folgt, fortwährend $\sqrt{-1} = i$ gesetzt:

$$(a) \quad \cos x \pm i \sin x = e^{\pm ix}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x \pm 2r\pi$ statt x, wo r jede ganze positive Zahl bezeichnen soll; so erhält man wegen

$$\cos(x \pm 2r\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x \pm 2r\pi) = \sin x,$$

sofort: $\cos x \pm i \sin x = e^{\pm i(x \pm 2r\pi)}$, und wenn diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhoben wird, wo n jeden Werth haben kann: $(\cos x \pm i \sin x)^n = e^{\pm ni(x \pm 2r\pi)}$, und endlich mit Berücksichtigung der Gleichung (a), wenn man in derselben $n(x \pm 2r\pi)$ statt x setzt:

$$(1) \quad (\cos x \pm i \sin x)^n = \cos n(x \pm 2r\pi) \pm i \sin n(x \pm 2r\pi),$$

welche Formel unter dem Namen der *Moivre*'schen Binomialformel bekannt ist *).

§. **315**. Ist in dieser Formel (1) n eine ganze Zahl, so erhält man für die Entwickelung (da $\cos$ und $\sin n(x \pm 2r\pi) = \cos$ und $\sin nx$ wird), wie es sein soll, nur

*) Eigentlich verstand man darunter, selbst bis auf die neueste Zeit, die speciellere: $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$, welche aber nur für ganze Zahlen von n giltig ist.

einen Werth. Ist dagegen $n=\frac{s}{m}$ ein zur kleinsten Benennung gebrachter Bruch vom Nenner m, so erhält man für $r=0, 1, 2, \ldots m-1, m, m+1, \ldots$ aus $n\,(x \pm 2r\pi)$ der Reihe nach die Bögen: $\frac{s}{m}x$, $\frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi, \ldots \frac{s}{m}x \pm \frac{2s\,(m-1)}{m}\pi$, $\left(\frac{s}{m}x \pm 2s\pi\right)$, $\left(\frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi \pm 2s\pi\right)$ u. s. w., von welchen aber, man mag nun durchaus die obern oder untern Zeichen beibehalten, wie man sieht, nur die m ersten (nicht eingeklammerten) *verschiedene* Sinus und Cosinus, dagegen der $m+1$. mit dem 1., der $m+2$. mit dem 2. u. s. w. denselben Sinus und Cosinus besitzen, so, dass also die Entwickelung (1), in diesem Falle, wie es sein soll, m und auch nur m verschiedene Werthe, und zwar dadurch liefert, dass man nach und nach $r=0, 1, 2, \ldots (m-1)$ setzt. Behält man jedoch die *doppelten* Zeichen bei, so darf man zur Gewinnung dieser m Werthe, wie leicht zu sehen, diese Substitutionen bloss bis $r=\frac{m}{2}$, wenn m *gerad* und $r=\frac{m-1}{2}$, wenn m *ungerad* ist, fortsetzen. Denn ist m *gerad*, so entsteht für $r=\frac{m}{2}+1$ ein Bogen, welcher für das *obere* oder *untere* Zeichen denselben Sinus und Cosinus besitzt, wie der durch die zweit vorhergehende Substitution von $r=\frac{m}{2}-1$ entstandene Bogen für das *untere* oder *obere* Zeichen; dasselbe gilt von den beiden Bögen, welche durch die Substitution von $r=\frac{m}{2}+2$ und $r=\frac{m}{2}-2$ entstehen u. s. w. Ist aber m *ungerad*, so gibt die Substitution von $r=\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$ einen Bogen, welcher für das *untere* oder *obere* Zeichen denselben Sinus und Cosinus erhält, wie der aus der Substitution von $r=\frac{m-1}{2}$ für das *obere* oder *untere* Zeichen; dasselbe gilt für die beiden, aus den Substitutionen von $r=\frac{m+3}{2}$ und $r=\frac{m-3}{2}$ entstehenden Bögen u. s. w.

§. **316**. Für $x = 0$ und $x = \pi$ erhält man aus der Gleichung (1), §. 314 beziehungsweise:

(2) $(+1)^n = \cos 2rn\pi \pm i \sin 2rn\pi$,

(3) $(-1)^n = \cos(2r+1)n\pi \pm i \sin(2r+1)n\pi$,

und es gilt auch von diesen beiden Formeln das eben Angeführte. Man erhält nämlich, sowohl für $(+1)^n$ als für $(-1)^n$, nur einen Werth, wenn n eine ganze Zahl, dagegen m Werthe, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist, und zwar dadurch, dass man (mit Beibehaltung der doppelten Zeichen) nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$ setzt, je nachdem m gerad oder ungerad ist.

§. **317**. Aus der obigen Relation (a) (§. 314) folgt auch $\cos y \pm i \sin y = e^{\pm iy}$, und wenn man diese Gleichung mit jener (a) multiplicirt:

$(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x \pm y) \pm i \sin(x + y)$.

Setzt man nun in dieser Relation nx statt x und $y = \pm 2rn\pi$, so erhält man:

$(\cos nx \pm i \sin nx)(\cos 2rn\pi \pm i \sin 2rn\pi)$

$$= \cos n(x \pm 2r\pi) \pm i \sin n(x \pm 2r\pi),$$

nämlich dasselbe Resultat, wie in der Formel (1), §. 314, so, dass sich also diese letztere, mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (2), auch so darstellen lässt:

(4) $(\cos x \pm i \sin x)^n = (+1)^n (\cos nx \pm i \sin nx)$.

Aus dieser letztern Formel folgt auch noch für $x = \pi$:

(5) $(-1)^n = (+1)^n (\cos n\pi \pm i \sin n\pi)$,

und man erhält sonach aus diesen beiden Formeln, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist, die m verschiedenen Werthe, indem man den Werth von $\cos nx \pm i \sin nx$ und $\cos n\pi \pm i \sin n\pi$ nach und nach mit den m verschiedenen [aus (2) zu findenden] Werthen von $(+1)^{\frac{s}{m}}$ multiplicirt.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man noch aus (4):

(6) $(\pm i)^n = (+1)^n \left(\cos \frac{n}{2}\pi \pm i \sin \frac{n}{2}\pi\right)$,

wofür dieselbe Bemerkung gilt.

Anmerk. Versteht man unter $(1)^{\frac{s}{m}}$, wie bisher, die sämmtlichen m Werthe oder Wurzeln von $1^{\frac{s}{m}}$, dagegen unter $\bar{1}^{\frac{s}{m}}$ nur den einen gewöhnlichen oder sogenannten arithmetischen Werth, und macht man überhaupt denselben Unterschied auch zwischen $(a)^n$ und (wenn n gebrochen ist) $\bar{a}^n$, $log(a)$ und $log\,\bar{a}$ u. s. w.; so erhält man sofort auch die m Wurzeln von $\sqrt[m]{\pm a} = (\pm a)^{\frac{1}{m}}$, indem man die arithmetische Wurzel $\bar{a}^{\frac{1}{m}}$ mit den m Wurzeln von $(\pm 1)^{\frac{1}{m}}$ der Reihe nach multiplicirt; denn es ist

$$\sqrt[m]{\pm a} = \sqrt[m]{\pm 1}\,.\,\sqrt[m]{a} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}}\bar{a}^{\frac{1}{m}}.$$

(Vergl. auch §. 181.)

§. **318.** Da sich die Formeln (2) und (3), §. 316, mit Rücksicht auf jene (a), §. 314, auch so darstellen lassen:

$$(7) \quad (+1)^n = e^{\pm 2rn i\pi} \text{ und } (-1)^n = e^{\pm(2r+1)ni\pi},$$

so erhält man daraus, wenn man natürliche Logarithmen nimmt und überall gleich durch n abkürzt: $l(+1) = \pm 2ri\pi$ und $l(-1) = \pm(2r+1)i\pi$; woraus sofort folgt, dass sowohl (wegen $r = 0, 1, 2, \ldots$) der positiven, wie der negativen Einheit unendlich viele Logarithmen zukommen, dass aber unter den ersteren nur einer (jener für $r = 0$), unter den letzteren aber gar keiner reell ist. Da ferner

$$l(+a) = l(+1.a) = l(+1) + l\bar{a} \text{ und}$$
$$l(-a) = l(-1.a) = l(-1) + l\bar{a}$$

ist, so gilt dieses überhaupt für jede Zahl, und wegen $log\,A = MlA$, auch für jedes Logarithmensystem.

Allgemeine Auflösung der binomischen Gleichungen.

§. **319.** Mit Hilfe der vorigen Formeln können wir nun auch die oben (§. 194, Anmerk.) erwähnten binomischen Gleichungen, welche sich immer auf die Form $x^n \mp 1 = 0$ bringen lassen (ist nämlich $y^n = \pm A$, so darf man nur $y = x\sqrt[n]{A}$ setzen), allgemein auflösen.

Für die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat man $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$ oder, wenn man in der Formel (2), §. 316, $\frac{1}{n}$ statt n schreibt:

$$(\alpha) \quad x = \cos\frac{2r}{n}\pi \pm i \sin\frac{2r}{n}\pi,$$

aus welcher Formel man die n Wurzeln dieser Gleichung durch die successive Substitution von $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerad oder ungerad ist, erhält.

Anmerk. Für n gerade entstehen 2 reelle Wurzeln $+1$ und -1 [aus den Substitutionen von $r=0$ und $r=\frac{n}{2}$]; für n ungerade nur eine reelle Wurzel $+1$ (aus der Substitution von $r=0$). Alle übrigen Wurzeln sind imaginär (und entstehen aus den übrigen Werthen von r), welche (übereinstimmend mit §. 164) paarweise conjugirt, und überdiess, wegen

$$\left(\cos\frac{2r}{n}\pi + i\sin\frac{2r}{n}\pi\right)\left(\cos\frac{2r}{n}\pi - i\sin\frac{2r}{n}\pi\right) = 1,$$

reciprok sind.

1. Für die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ folgt aus (α):

$$x = \cos\frac{r}{2}\pi \pm i\sin\frac{r}{2}\pi,$$

und man erhält daraus für $r = 0, 1, 2$, beziehungsweise:

$$x = \cos 0 \pm i\sin 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = \pm i \text{ und}$$

$$\cos\pi \pm i\sin\pi = -1.$$

Die 4 Wurzeln dieser Gleichung sind also: $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$.

2. Für die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ erhält man aus (α):

$$x = \cos\frac{2r}{5}\pi \pm i\sin\frac{2r}{5}\pi,$$

und daraus beziehungsweise für $r = 0, 1$ und 2:

$$x = \cos 0 \pm i\sin 0 = 1,\quad \cos 72^0 \pm i\sin 72^0 \text{ und}$$

$$\cos 144 \pm i\sin 144.$$

Die 5 Wurzeln dieser Gleichung sind daher (mit Zuhilfenahme der trigonometrischen Tafeln):

1, $\cdot 3090170 \pm \cdot 9510565\sqrt{-1}$ und $-\cdot 8090170 \pm \cdot 5877853\sqrt{-1}$.

§. **320.** Aus der Gleichung $x^n + 1 = 0$ folgt eben so $x = (-1)^{\frac{1}{n}}$, und wenn man in der Formel (3), §. 316, $\frac{1}{n}$ statt n setzt:

$$(\beta) \quad x = \cos\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi,$$

aus welcher Formel wieder die n Wurzeln dieser Gleichung erhalten werden, indem man nach und nach $r=0, 1, 2\ldots$

$\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ setzt, je nachdem n gerad oder ungerad ist.

Anmerk. Ist n gerad, so sind die sämmtlichen Wurzeln imaginär, ist dagegen n ungerad, so erhält man eine reelle Wurzel, und zwar aus der Substitution von $r = \frac{n-1}{2}$.

1. Um die Gleichung $x^6 + 1 = 0$ aufzulösen, hat man aus der Formel (β) : $x = \cos\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi$, und daraus für $r = 0, 1, 2$ beziehungsweise:

$$x = \cos \tfrac{1}{6}\pi \pm i \sin \tfrac{1}{6}\pi, \quad \cos \tfrac{3}{6}\pi \pm i \sin \tfrac{3}{6}\pi \quad \text{und}$$
$$\cos \tfrac{5}{6}\pi \pm i \sin \tfrac{5}{6}\pi.$$

2. Für die Gleichung $x^5 + 1 = 0$ erhält man,

$$x = \cos\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi,$$

und daraus für $r = 0$, 1 und 2, die 5 Wurzeln:

$$x = \cos \tfrac{1}{5}\pi \pm i \sin \tfrac{1}{5}\pi, \quad \cos \tfrac{3}{5}\pi \pm i \sin \tfrac{3}{5}\pi \quad \text{und}$$
$$\cos \pi \pm i \sin \pi = -1.$$

Eilftes Capitel.

Entwickelung der Sinus und Cosinus der *vielfachen*, dann der Potenzen dieser Functionen der *einfachen* Bögen.

§. **321**. Durch die wirkliche Potenzirung des Binoms $\cos x \pm i \sin x$ erhält man aus der Gleichung (1), §. 314, wenn man gleich die reellen und auch die imaginären Glieder für sich zusammennimmt:

$$\cos n\,(x \pm 2r\pi) + i \sin n\,(x \pm 2r\pi)$$
$$= \left[\cos x^n - \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \binom{n}{4} \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots\right]$$
$$+ i \left[\binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \ldots\right],$$

oder, wenn man $\cos x^n$ herausnimmt und berücksichtiget, dass im Falle n gebrochen ist, die sämmtlichen Werthe von $\cos x^n$ erhalten werden, indem man (§. 317, Anmerk.) den arithmetischen Werth, welchen wir unter $\cos x^n$ verstehen wollen, mit allen Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt, auch:

$$(1)\quad \cos n(x \pm 2r\pi) + i \sin n(x \pm 2r\pi)$$
$$= (+1)^n \cos x^n \left[\left(1 - \binom{n}{2} \operatorname{tang} x^2 + \binom{n}{4} \operatorname{tang} x^4 - \ldots\right)\right.$$
$$\left. + i\left(\binom{n}{1} \operatorname{tang} x - \binom{n}{3} \operatorname{tang} x^3 + \ldots\right)\right];$$
$$\left\{x = -\frac{\pi}{4},\ x = +\frac{\pi}{4}\right\},$$

welche Formel, da innerhalb der angegebenen Grenzen $\pm \frac{\pi}{4}$ der Convergenz (welche Grenzwerthe noch mitbegriffen sind, wenn n positiv) $\cos x$ immer positiv ist, für jeden reellen Werth von n wenigstens einen reellen Werth von $\cos x^n$ gibt.

§. **322.** Ist n eine ganze, positive oder negative Zahl, so hat $(+1)^n \cos x^n$ nur einen, und zwar reellen Werth; demnach zerfällt die vorige Gleichung (1), nach dem Satze, dass die reellen und imaginären Theile, für sich genommen beiderseits einander gleich sind, in die beiden folgenden:

$$(2)\quad \cos nx = \cos x^n - \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \ldots,$$

$$(3)\quad \sin nx = \binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \ldots,$$

wenn man nämlich die Multiplication mit $\cos x^n$ verrichtet und die 2. Gleichung durch i abkürzt. — Für den besondern Fall, dass n positiv ist, brechen diese beiden Reihen ab und sind sonach nicht an die Bedingung der Convergenz gebunden. Zugleich lässt sich auf diesen erwähnten Fall immer auch jener zurückführen, in welchem n negativ ist; weil (§. 11) $\cos(-n) = \cos(+n)$ und $\sin(-n) = -\sin(+n)$ ist.

§. **323.** Ist dagegen n gebrochen und gleich $\frac{s}{m}$, so hat (§. 316) $(+1)^{\frac{s}{m}}$ m verschiedene Werthe, wovon nur einer, wenn m ungerad, und zwei reell sind, wenn m gerad ist. Es lässt sich daher die obige Gleichung (1) nicht mehr für alle Werthe von r, sondern nur für jene,

für welche $(+1)^{\frac{s}{m}}$ reelle Werthe erhält, also (§. 319) beziehungsweise für $r=0$ und $r=0$, $r=\frac{m}{2}$, auf die vorhin angegebene Weise trennen. Für alle übrigen Werthe von r zerfällt jedes der beiden Glieder im 2. Theile der Gleichung (1) in einen reellen und einen imaginären Theil, was man am besten sieht, wenn man für $(+1)^{\frac{s}{m}}$ den Werth aus (2), §. 316, substituirt. Es fällt also auch die Trennung der Gleichung (1) durch Gleichsetzung der reellen, so wie der imaginären Theile, anders aus als im vorigen §. Man erhält nämlich, wenn man Kürze halber n statt $\frac{s}{m}$ stehen lässt und die obigen Reihen (2) und (3), nämlich

$$\cos x^n - \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \ldots = R \text{ und}$$

$$\binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \ldots = R' \text{ setzt:}$$

$$(4) \quad \cos n(x \pm 2r\pi) = \cos 2rn\pi \, . \, R \mp \sin 2rn\pi \, . \, R',$$

$$(5) \quad \sin n(x \pm 2r\pi) = \pm \sin 2rn\pi \, . \, R + \cos 2rn\pi \, . \, R',$$

welche beiden Formeln für $r=0$, wenn $\left(\text{in } n=\frac{s}{m}\right)$ m ungerad, und für $r=0$, $r=\frac{m}{2}$, wenn m gerad ist, wie es sein soll, in die obigen (2) und (3) übergehen.

Anmerk. Da diese Formeln (2) — (5), den Fall ausgenommen, in welchem n eine ganze positive Zahl ist, ebenfalls nur innerhalb der Grenzen $x = \mp \frac{\pi}{4}$ verlässliche Resultate liefern; so wird man für ausserhalb dieser Grenzen liegende Werthe von x, $x = y + k\frac{\pi}{4}$ setzen, und, was immer möglich ist, für k eine solche ganze Zahl wählen, dass der Bogen $y = x - k\frac{\pi}{4}$ in die genannten Grenzen hineinfällt. (Für $x = 125^0$ z. B. wird für $k = 2$ sofort

$$y = 125 - 2\frac{\pi}{4} = 35^0,$$

welcher Bogen sonach in die besagten Grenzen fällt.) Hat man $\cos ny$ und $\sin ny$ nach den obigen Formeln gefunden, so kann man dann auch, wegen $nx = ny + \frac{nk}{4}\pi$, $\cos nx$ und $\sin nx$ leicht bestimmen.

§. **324**. Die obigen, für jede ganze Zahl von n (die überdiess auch noch immer positiv angenommen werden kann) geltenden Formeln (2) und (3), §. 322, lassen sich mit geringer Ausnahme, auch so darstellen, dass darin bloss die Sinus oder Cosinus vorkommen.

Es ist nämlich [(2), §. 308] (α) $2\cos x = e^{xi} + \frac{1}{e^{xi}}$ oder für $e^{xi} = z$, auch (β) $2\cos x = z + \frac{1}{z}$.

Eben so ist, wenn man in (α) nx statt x schreibt, und wegen $e^{nxi} = (e^{xi})^n = z^n$, sofort: ($\gamma$) $2\cos nx = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Setzt man jetzt in der Formel (α), §. 127, $a = z$ und $b = \frac{1}{z}$, wodurch $y = a + b = z + \frac{1}{z} = 2\cos x$ und $ab = 1$ wird; so erhält man $z^n + \frac{1}{z^n}$, d. i.

$$(1)\quad 2\cos nx = (2\cos x)^n - n(2\cos x)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}(2\cos x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(2\cos x)^{n-6} + \ldots,$$

wobei für $n=1$ und 2 (für die übrigen Werthe bricht sie ohnehin von selbst ab) die Reihe beziehungsweise nur 1 und 2 Glieder erhält.

§. **325**. Es ist ferner eben so [(1), §. 308] $2i\sin x = z - \frac{1}{z}$ und (δ) $2i\sin nx = z^n - \frac{1}{z^n}$. Setzt man daher in der angezogenen Formel (α), §. 127, $a = z$, $b = -\frac{1}{z}$, wodurch $a + b = z - \frac{1}{z} = 2i\sin x$ und $ab = -1$ wird, so erhält man, je nachdem n gerad oder ungerad ist:

$$z^n \pm \frac{1}{z^n} = i^n(2\sin x)^n + n\,i^{n-2}(2\sin x)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}i^{n-4}(2\sin x)^{n-4} - \ldots,$$

und daraus für n gerade [Gleichung (γ)]:

$$(2)\quad 2\cos nx =$$
$$(-1)^{\frac{n}{2}}\left[(2\sin x)^n - n(2\sin x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}(2\sin x)^{n-4} - \ldots\right],$$

und für n ungerade, wenn man gleich durch i abkürzt [Gleichung (δ)]:

$$(3)\quad 2\sin nx =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[(2\sin x)^n - n(2\sin x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}(2\sin x)^{n-4} - ..\right].$$

Potenzen der Sinus und Cosinus.

§. **326**. Aus der Gleichung (α), §. 324, folgt auch $2\cos x = \frac{1+e^{2xi}}{e^{xi}}$, und wenn man diese Gleichung zur n. Potenz erhebt, wobei n jeden Werth haben kann, ferner die einzelnen Glieder der Entwickelung $(1+e^{2xi})^n$ gleich durch den entstehenden Nenner e^{nxi} dividirt:

$$2^n \cos x^n = e^{-nxi} + \binom{n}{1} e^{-(n-2)xi} + \binom{n}{2} e^{-(n-4)xi} + \ldots$$

Da aber nach der Formel (a), §. 314,

$$e^{-nxi} = \cos nx - i\sin nx,$$

also auch ganz allgemein

$$(h)\quad e^{-(n-\alpha)xi} = \cos(n-\alpha)x - i\sin(n-\alpha)x$$

ist; so hat man auch:

$$2^n \cos x^n = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \ldots$$

$$- i\left[\sin nx + \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \ldots\right].$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ erhält man aus dieser Formel für $2^n \cos x^n$ noch einen zweiten Ausdruck, wenn man statt x, $-x$ setzt; da sich aber dadurch bloss das Zeichen der in i multiplicirten Reihe (die nur Sinus enthält) ändert, so hat man allgemein:

$$(1)\quad 2^n \cos x^n = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + ..$$

$$\pm\sqrt{-1}\left[\sin nx + \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x + \ldots\right].$$

§. **327**. Auf gleiche Art findet man, da [(1), §. 308] $2i\sin x = \frac{e^{2xi}-1}{e^{xi}} = \frac{-1.(1-e^{2xi})}{e^{xi}}$ ist, auch:

$$(2i)^n \sin x^n =$$

$$(-1)^n\left[e^{-nxi} - \binom{n}{1}e^{-(n-2)xi} + \binom{n}{2}e^{-(n-4)xi} - \ldots\right] =$$

$$(-1)^n\Big[(\cos nx - i\sin nx)$$

$$-\binom{n}{1}[\cos(n-2)x - i\sin(n-2)x] + \ldots\Big],$$

mit Rücksicht nämlich auf die vorige Gleichung (h). Daraus folgt für n gerad:

$$(2)\quad 2^n \sin x^n =$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\right]$$

$$-(-1)^{\frac{n}{2}}\sqrt{-1}\left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\right],$$

und für n ungerad, wenn man gleich beide Theile der Gleichung mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt:

$$(3)\quad 2^n \sin x^n =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\right]$$

$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{-1}\left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\right].$$

Anmerk. Auch aus (1) lässt sich noch eine Formel für $\sin x^n$ herleiten, wenn man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$ schreibt. Ist n ein Bruch vom Nenner m, so müssen wieder $\cos x^n$ in (1) und $\sin x^n$ in (2) und (3) m verschiedene Werthe erhalten. Man findet diese, indem man den einen, gewöhnlichen, aus den Formeln (1) — (3) gefundenen Werth von $\cos x^n$ und $\sin x^n$ mit den m Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt. — Zugleich gelten diese Formeln, da man (§. 323, Anmerk.) x immer als zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegend annehmen kann, für jeden reellen Werth von n, den man übrigens auch immer als positiv voraussetzen kann, weil z. B. $\cos x^{-n} = 1 : \cos x^n$ ist.

§. **328.** Ist n eine ganze, positive Zahl; so verschwindet in der Formel (1), §. 326, die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte Reihe. Denn erstlich bricht diese (§. 125) mit dem $n+1$. Gliede ab, und dann sind je zwei, von den beiden äussern gleich weit abstehende Glieder, immer numerisch einander gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen, wodurch sie sich paarweise aufheben; erscheint (was für n gerad geschieht) ein mittleres Glied, so ist dieses für sich

gleich Null. — Auf gleiche Weise verschwinden auch in den Formeln (2) und (3) des vorigen §. in diesem Falle die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Reihen.

§. **329**. Für diesen Fall also, von n ganz und positiv, erhält man aus den allgemeinen Formeln (1), (2) und (3) folgende Relationen:

Für n gerad oder ungerad:

$$(4)\quad 2^n \cos x^n = \cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x + \ldots$$

Für n gerad:

$$(5)\quad 2^n \sin x^n = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x - \ldots\right].$$

Für n ungerad:

$$(6)\quad 2^n \sin x^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\sin nx - n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)x - \ldots\right].$$

Dabei ist noch, für n gerad:

$$\sin nx \pm n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)x \pm \ldots = 0,$$

und für n ungerad:

$$\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x - \ldots = 0.$$

Alle diese Reihen sind so weit fortzusetzen, bis sie von selbst abbrechen, also einschliessig bis zum $n+1^{\text{ten}}$ Gliede.

Anmerk. Aus diesen beiden letzten Capiteln leuchtet die Nützlichkeit ein, die imaginären Grössen, obschon man sich von ihnen keinen anschaulichen Begriff machen kann, in die Rechnung einzuführen. Sie entstehen zunächst aus der Auflösung der quadratischen Gleichungen, welche keine reelle Wurzeln besitzen, unter der Form $a+b\sqrt{-1}$, und man behandelt dabei den Factor $\sqrt{-1}$ als eine reelle Grösse, deren Quadrat gleich -1 ist.

Man weiss, dass eine Gleichung, in welcher imaginäre Grössen vorkommen, eigentlich nur die symbolische Darstellung zweier Gleichungen zwischen reellen Grössen ist, indem z. B. die Gleichung $a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$ in die beiden $a=a'$ und $b=b'$ zerfällt.

Wir wollen hier noch bemerken, dass sich jeder imaginäre Ausdruck $a+b\sqrt{-1}$ unter der Form $r(Cos\,u+\sqrt{-1}\,Sin\,u)$ darstellen

lässt, denn man braucht dazu nur

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad Cos\, u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad Sin\, u = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

woraus auch $Tang\, u = \frac{b}{a}$ folgt, zu setzen.

Dabei wird die Grösse r, welche man immer positiv nimmt, der Modul der imaginären Grösse, so wie der Bogen u, welcher aus den Werthen von $Sin\, u$, $Cos\, u$ oder $Tang\, u$ gefunden wird, das Argument genannt.

Zwölftes Capitel.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Erklärungen.

§. **330**. Die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität irgend eines Ereignisses ist das Verhältniss der das Ereigniss begünstigenden zu allen gleich möglichen Fällen, und wird durch einen Bruch ausgedrückt, in welchem diese beiden Zahlen beziehungsweise den Zähler und Nenner bilden.

So ist die Wahrscheinlichkeit mit einem gewöhnlichen Würfel eine der 6 Zahlen, z. B. jene 3 zu werfen, $= \frac{1}{6}$; jene, irgend eine der beiden Zahlen 2 oder 3 zu werfen, $= \frac{2}{6}$ u. s. w.

§. **331**. Die Wahrsch. also, welche für das Eintreffen irgend eines Ereignisses Statt findet, wird um so grösser, je mehr sich die Zahl der günstigen, jener der gleich möglichen Fälle, d. i., je mehr sich der die Wahrsch. ausdrückende Bruch der Einheit nähert. Kann von allen möglichen Fällen keiner dem Ereigniss entgegen oder ungünstig sein, so wird die Wahrsch. zur Gewissheit, und sofort, da nun Zähler und Nenner gleich gross sind, durch die Einheit ausgedrückt: die Einheit ist sonach das Symbol der Gewissheit.

So ist die Wahrsch. mit dem genannten Würfel irgend eine, gleichgiltig welche, der 6 Zahlen zu werfen, $= \frac{6}{6} = 1$.

§. 332. Die Wahrsch., dass irgend ein Ereigniss nicht, sondern das Gegentheil davon eintreffe, heisst die entgegengesetzte Wahrsch. des erwarteten Ereignisses, und muss zur Wahrsch. des Ereignisses selbst addirt, die Einheit geben; weil es gewiss ist, dass dieses Ereigniss entweder eintrifft oder nicht eintrifft.

So ist im obigen Beispiele die Wahrsch., dass die Zahl 3 nicht geworfen werde (wofür 5 Fälle, nämlich, dass eine der 5 übrigen Zahlen 1, 2, 4, 5, 6 fällt, günstig sind), $= \frac{5}{6}$, welche zu der oben gefundenen Wahrsch. $\frac{1}{6}$ addirt, in der That die Einheit gibt. [I., 378.]

§. 333. Ausser der eben betrachteten Wahrscheinlichkeit, welche auch einfache oder absolute Wahrsch. heisst, unterscheidet man noch die relative und zusammengesetzte Wahrsch. — Unter der relativen Wahrsch. versteht man die Wahrsch., welche entsteht, wenn man bloss jene Fälle, die zweien bestimmten Ereignissen günstig sind, ohne Rücksicht auf die noch übrigen möglichen Fälle, in Betracht zieht.

Die Wahrsch. z. B. aus einer Urne, welche weisse, rothe, blaue und schwarze Kugeln enthält, eher eine weisse, als eine schwarze Kugel zu ziehen, wobei also jene Fälle, in welchen man eine rothe oder blaue Kugel zieht, nichts entscheiden, ist eine relative Wahrscheinlichkeit.

§. 334. Unter der zusammengesetzten Wahrsch. versteht man die Wahrsch., dass zwei oder mehrere von einander unabhängige Ereignisse zusammen eintreffen werden, so wie auch die Wahrsch. eines Ereignisses, welches von dem Eintreffen eines oder mehrerer vorausgehender Ereignisse, die wieder ihre eigene Wahrsch. haben, abhängt oder bedingt wird.

So ist z. B. die Wahrsch., mit 2 Würfeln auf einen Wurf den Pasch 66 zu werfen, eine zusammengesetzte; weil die Ereignisse, mit dem einen Würfel die 6, und dann auch mit dem zweiten Würfel dieselbe Zahl zu werfen, zusammen eintreffen müssen.

Theilt man die 32 Karten nach den Farben in vier Packete, so ist die Wahrsch., das Coeur-Ass zu ziehen, ebenfalls eine zusammengesetzte; weil man zuerst die Hand auf das rechte Packet (auf jenes der Coeurs) legen, und dann erst daraus das Coeur-Ass ziehen muss; welch' letzteres Ereigniss offenbar gar nicht eintreffen kann, wenn nicht das erstere schon Statt gefunden hat.

Die *einfache* oder *absolute* Wahrscheinlichkeit.

§. **335**. Bezeichnen a und b die Anzahl der Fälle, welche beziehungsweise ein Ereigniss begünstigen und demselben entgegen sind; so ist die Wahrsch. für das Ereigniss: $\omega = \frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte Wahrsch. desselben $\omega_1 = \frac{b}{a+b}$.

§. **336**. Zerfällt das mögliche Resultat einer Handlung oder eines Versuches in mehr als zwei, z. B. in drei Classen, so, dass von drei verschiedenen Ereignissen nothwendig eines eintreffen muss, und sind a Fälle dem ersten, b Fälle dem zweiten, und c Fälle dem dritten Ereignisse günstig; so sind ihre Wahrsch., wenn man $a+b+c=s$ setzt, beziehungsweise: $\omega = \frac{a}{s}$, $\omega' = \frac{b}{s}$, $\omega'' = \frac{c}{s}$. Zugleich ist, wie es sein soll, die Wahrsch., dass von diesen drei Ereignissen entweder das erste oder zweite, oder dritte eintreffe $= \frac{a+b+c}{s} = 1$, gleich der Gewissheit. — Auf gleiche Art werden die Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, wenn noch mehrere Ereignisse möglich sind.

§. **337**. Beispiele und Aufgaben über die einfache Wahrscheinlichkeit.

1. Wie gross ist die Wahrsch., mit zwei gewöhnlichen Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen?

Es können überhaupt die Summen 2, 3, 4, . . . 12 fallen, die aber keineswegs alle einerlei Wahrsch. für sich haben. So können die Summen 2 und 12 nur auf eine Art geworfen werden, indem jeder der beiden Würfel beziehungsweise 1 und 6 zeigen muss. Die Summe 6 dagegen kann schon auf fünf verschiedene, durch die Combinationen 15, 24, 33, 42, 51 dargestellte Arten, wobei immer die erste Zahl dem ersten, und die zweite dem zweiten Würfel angehören soll, geworfen werden. Da nun überhaupt $6^2 = 36$ Fälle gleich möglich sind, indem sich die 6 Felder des einen Würfels mit allen 6 Feldern des andern verbinden lassen, so ist die Wahrsch. die Summe 2 zu werfen $= \frac{1}{36}$ (so auch die für die Summe 12), dagegen jene für die Summe $6 = \frac{5}{36}$. — Diese Betrachtungen auch auf alle übrigen der oben erwähnten Summen ausgedehnt, erhält man ganz einfach für die Wahrsch., beziehungsweise die Summe 2,

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 zu werfen, der Reihe nach $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$ und $\frac{1}{36}$. Dabei ist, wie es sein soll, die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten $= 1$.

2. Die W. finden, dass man mit 3 Würfeln *a*) die Summe 9 überhaupt werfe; *b*) dass sich darunter zwei, und nur zwei gleiche Zahlen befinden; *c*) dass alle drei Zahlen gleich sind; *d*) dass dabei der erste, zweite und dritte Würfel beziehungsweise die Zahlen 2, 3 und 4 zeigt, und *e*) dass diese drei Zahlen ohne Rücksicht auf die Ordnung der Würfel fallen.

a) Da sich die Zahl 9 (§. 115) auf 28 verschiedene Arten zu 3 zerlegen und permutiren lässt, von welcher Anzahl jedoch der Natur der Sache nach die drei Complexionen 711, 171, 117 ausgeschlossen bleiben, so sind dem fraglichen Ereigniss 25 Fälle günstig, während im Ganzen $6^3 = 216$ Fälle gleich möglich sind. Die gesuchte Wahrsch. ist demnach $= \frac{25}{216}$ (welche zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ liegt).

b) Da der Fall mit drei gleichen Zahlen ausgeschlossen sein soll, so können die beiden gleichen Zahlen nur 22 und 44, also die dritte ungleiche Zahl beziehungsweise bloss 5 und 1 sein; da ferner diese dritte Zahl jeder der drei Würfel zeigen kann, so gibt es im Ganzen $3 \times 2 = 6$ günstige Fälle, und die gesuchte Wahrsch. ist demnach $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

c) Da die Summe 9 nur auf eine einzige Art mit drei gleichen Zahlen (333) fallen kann, so ist hier die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{216}$.

d) Auch in diesem Falle ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{216}$.

e) Da sich die Zahlen 234 sechsmal permutiren lassen, oder, was dasselbe ist, da die Zahlen 234 auf sechs verschiedene Arten fallen können; so ist hier die Wahrscheinlichkeit $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

3. Man hat die 13 Blätter von einer Farbe eines vollständigen Spieles von 52 Karten in einen Pack gethan und gehörig gemischt; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das oberste Blatt der König und das nächste das Ass sei?

Die beiden obersten Blätter bilden (auf eine gleich mögliche Weise) eine der $\frac{13 \,.\, 12}{1 \,.\, 2} = 78$ Combinationen der 13 Blätter zu 2, unter denen jene von Ass und König nur einmal vorkommt; es ist also die Wahrsch., dass ohne Rücksicht auf die Ordnung, das oberste Paar Ass und König sei $= \frac{1}{78}$. Da aber bei einer bestimmten Ordnung die Wahrsch. nur halb so gross ist, so erhält man für die gesuchte Wahrsch. $\frac{1}{156}$; was man auch findet, wenn man berücksichtiget, dass jede der genannten 78 Combinationen noch zwei Permutationen zulässt, und unter diesen so entstehenden 156 Complexionen nur eine dem fraglichen Ereigniss günstig ist. [I., 383.]

Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. **338.** Um die Regel für die relative Wahrsch. sogleich an einem Beispiele zu entwickeln, soll die Wahrsch. bestimmt werden, mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 7 als jene 5 zu werfen.

Nach dem vorigen §. (Beispiel 1) gibt es für die Summen 7 und 5 beziehungsweise 6 und 4 günstige Fälle, und da es nach dem Sinne der vorliegenden Aufgabe $6+4=10$ gleich mögliche Fälle gibt, so sind die gesuchten Wahrsch. beziehungsweise: $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Da nun aber die absoluten Wahrsch. für das Werfen der Summen 7 und 5 respective $\frac{6}{36}$ und $\frac{4}{36}$ sind (vorig. §.), so findet man die vorigen Resultate auch, indem man die betreffende absolute Wahrsch. durch die Summe beider Wahrsch. dividirt; denn man erhält dadurch als relative Wahrsch. für die Summe 7 sofort $\frac{6}{36}:(\frac{6}{36}+\frac{4}{36})=\frac{6}{10}$, und für die Summe 5 eben so $\frac{4}{36}:(\frac{6}{36}+\frac{4}{36})=\frac{4}{10}$, wie vorhin. Auch hier ist die Summe der beiden Wahrsch., der Natur der Sache gemäss, gleich der Einheit; weil es gewiss ist, dass man (da die übrigen Summen unberücksichtiget bleiben) entweder eher die Summe 7 als jene 5, oder umgekehrt, eher die Summe 5 als jene 7 werfen wird.

§. **339.** Sind also allgemein a Fälle dem Ereigniss A, b Fälle dem Ereigniss B, c Fälle dem Ereigniss C u. s. w. günstig, und setzt man $a+b+c+..=s$; so sind die absoluten Wahrsch. für die Ereignisse $A, B, C, \ldots$ beziehungsweise $\omega=\frac{a}{s}$, $\omega'=\frac{b}{s}$, $\omega''=\frac{c}{s}\ldots$, also die Wahrsch., dass A eher als B eintreffen werde: $\omega=\frac{\omega}{\omega+\omega'}=\frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte Wahrsch. nämlich, dass B eher als A eintrifft: $\omega_1=\frac{\omega'}{\omega+\omega'}=\frac{b}{a+b}$; also wieder $\omega+\omega_1=1$. Eben so ist die Wahrsch., dass A eher als C eintritt $=\frac{\omega}{\omega+\omega''}=\frac{a}{a+c}$, jene, dass B eher als C zutrifft $=\frac{\omega'}{\omega'+\omega''}=\frac{b}{b+c}$ u. s. w.

Die relative Wahrsch. eines Ereignisses wird demnach erhalten, indem man die absolute Wahrsch. desselben durch die Summe der absoluten Wahrsch. jener beiden Ereignisse, die gerade mit einander verglichen werden, dividirt.

§. 340. Beispiele und Aufgaben über die relative Wahrscheinlichkeit.

1. Eine Urne enthält 6 weisse, 8 rothe, 14 blaue und 12 schwarze Kugeln (von übrigens gleicher Beschaffenheit); wie gross ist die Wahrsch., auf einen Zug eher eine weisse als schwarze Kugel zu ziehen?

Da hier die absolute Wahrsch. für das Ziehen einer weissen Kugel $= \frac{6}{40}$, jene eine schwarze zu ziehen $= \frac{12}{40}$ ist; so hat man für die gesuchte relative W., wenn man gleich durch 40 abkürzt: $\omega = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}$; für die des Gegentheils: $\omega_1 = \frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}$, und sofort $\omega + \omega_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

2. Ein Spiel von 16 Karten, worunter immer 4 von derselben Farbe sind, wird unter 4 Spieler vertheilt, und dabei ist die letzte Karte Trumpf; wie gross ist die Wahrsch., dass der Spieler A, welcher die Karten nicht gibt, eher einen, und auch nur einen Trumpf, als 3, und zwar auch nur 3 Karten von einerlei Farbe (z. B. 3 Coeurs) erhält.

Da (rücksichtlich des ersten Punktes der Frage) eigentlich nur 15 Karten ausgegeben werden, worunter sich 3 Trümpfe befinden; so kann A seine 4 Karten auf $\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} = 1365$ verschiedene Arten erhalten, Da sich ferner nach Hinwegnahme der 3 Trümpfe die übrigen 12 Karten auf $\frac{12.11.10}{1.2.3} = 220$ verschiedene Arten zu 3 verbinden lassen, so gibt es 3 Mal 220, d. i. 660 Verbindungen zu 4, deren jede Einen, und auch nur Einen Trumpf enthält, also auch eben so viele günstige Fälle; es ist daher die absolute Wahrscheinlichkeit für das erste Ereigniss: $\omega = \frac{660}{1365} = \frac{220}{455} = \frac{44}{91}$ (etwas kleiner als $\frac{1}{2}$).

Da sich ferner (rücksichtlich des zweiten Punktes kommen alle Blätter in Rechnung) die 16 Blätter auf $\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4} = 1820$ verschiedene Arten zu 4 verbinden lassen, und unter diesen Verbindungen 192 mit 3 gleichen und einer ungleichen Farbe enthalten sind (die 4 Coeurs z. B. lassen sich $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ Mal zu 3 verbinden, und jede dieser Complexionen gibt mit jeder der 12 übrigen Karten eine Verbindung zu 4 von der verlangten Eigenschaft; also gibt es $4 \times 12 = 48$ Verbindungen, deren jede 3 Coeurs und eine andere Farbe enthält. Da aber dasselbe auch, wie von Coeur, für jede der 3 übrigen Farben gilt; so gibt es in der That $4 \times 48 = 192$ günstige Fälle), so ist die absolute Wahrsch.

für das zweite Ereigniss: $\omega' = \frac{192}{1820} = \frac{48}{455}$ (zwischen $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$). Es ist also endlich die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\omega}{\omega + \omega'} = \frac{220}{220 + 48} = \frac{55}{67} \text{ (etwas } < \tfrac{5}{6}\text{)}.$$

Die *zusammengesetzte* Wahrscheinlichkeit.

§. **341.** Um die Wahrsch. für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse A und B, denen beziehungsweise a und a' Fälle günstig, b und b' Fälle entgegen sein sollen, welche also die absoluten Wahrsch. $\omega = \frac{a}{a+b}$ und $\omega' = \frac{a'}{a'+b'}$ besitzen, zu finden; so gibt es, da die a günstigen Fälle des ersten mit den a' günstigen Fällen des zweiten Ereignisses aa' Verbindungen geben, also beide Ereignisse auf aa' verschiedene Arten zusammen eintreffen können, auch eben so viele günstige Fälle; da ferner im Ganzen $(a+b)(a'+b')$ Fälle auf eine gleich mögliche Art Statt finden können, so ist die gesuchte Wahrsch. für das Zusammentreffen beider Ereignisse (§. 335):

$$\mathfrak{w} = \frac{aa'}{(a+b)(a'+b')} = \omega\omega'.$$

Auf gleiche Weise findet man, dass wenn $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ beziehungsweise die einfachen Wahrsch. für die Ereignisse $A, B, C, \ldots$ sind, sofort die Wahrsch. für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse $\mathfrak{w} = \omega\omega'\omega''\ldots$, d. i. gleich dem Producte der einfachen Wahrsch. der einzelnen Ereignisse ist.

§. **342.** Beispiele und Aufgaben über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

1. Die Wahrsch. zu bestimmen, dass man mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 mehre Mal hinter einander werfen werde.

Hier ist die einfache Wahrsch., die Zahl 6 zu werfen, $= \frac{1}{6}$, mithin die zusammengesetzte Wahrsch., dass diese Zahl 2, 3, . . . m Mal nach einander falle, beziehungsweise:

$$\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{1}{6^2}, \; \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{1}{6^3} \text{ u. s. w. } \frac{1}{6^m};$$

eine Wahrsch., welche um so kleiner wird, je grösser m ist.

2. Nehmen wir das in §. 334 angeführte Beispiel und suchen die Wahrsch., auf einen zufälligen Griff, aus den nach den Farben in 4

Packete getheilten 32 Karten (ohne zu wissen, von welcher Farbe jedes Packet ist) das Coeur-Ass zu ziehen.

Die Wahrsch., die Hand auf das Packet der Coeurs zu legen, ist $= \frac{1}{4}$, und die Wahrsch., daraus die bezeichnete Karte zu ziehen, $= \frac{1}{8}$; folglich ist die gesuchte Wahrsch. für das zusammengesetzte Ereigniss $= \frac{1}{4} . \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Dasselbe Resultat erhält man auch für die einfache Wahrsch., aus einem wohl gemischten Spiele von 32 Karten das Coeur-Ass zu ziehen; welcher Fall auch in der That mit dem hier behandelten identisch ist.

3. Wie gross ist die Wahrsch., dass man aus einem gut gemischten Spiele von 32 Karten in zwei auf einander folgenden Zügen Ass und König von derselben Farbe in beliebiger Ordnung ziehen werde?

Die Wahrsch., auf den ersten Zug das Ass der bestimmten Farbe zu ziehen, ist $= \frac{1}{32}$; die Wahrsch., hierauf den König derselben Farbe zu ziehen, $= \frac{1}{31}$; folglich ist die Wahrsch., dass Beides in dieser angeführten Ordnung eintreffen werde, $= \frac{1}{32} . \frac{1}{31}$. Da aber die Ordnung willkürlich sein soll, also auch jener Fall, in welchem zuerst der König und dann das Ass gezogen wird, ein günstiger ist; so ist die gesuchte zusammengesetzte Wahrsch. doppelt so gross, oder $= \frac{2}{32 . 31}$. Und da endlich auch die Farbe nicht bestimmt ist, also dieses Ereigniss in allen 4 Farben eintreten kann; so hat man zuletzt für die zusammengesetzte Wahrsch. des genannten Ereignisses: $\omega = \frac{2 . 4}{32 . 31} = \frac{1}{124}$.

Zu diesem Ergebniss gelangt man auch auf folgendem Wege: Die 32 Karten können auf $\frac{32 . 31}{1 . 2}$ Arten zu 2 verbunden werden, worunter aber dem fraglichen Ereignisse nur 4 Combinationen, nämlich jene günstig sind, in welchen Ass und König von gleicher Farbe beisammen liegen; man hat daher für die einfache Wahrsch. dieses Ereignisses, wie zuvor, $\frac{4 . 1 . 2}{32 . 31} = \frac{1}{124}$.

4. Von 2 Urnen enthält die erste 3 weisse und 1 schwarze, die zweite 4 weisse und 2 schwarze Kugeln; wie gross ist die Wahrsch., dass man auf einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen eine weisse Kugel ziehen wird?

Die Wahrsch., in die erste Urne zu greifen, ist $= \frac{1}{2}$, jene, daraus eine weisse Kugel zu ziehen, $= \frac{3}{4}$, folglich die Wahrsch. für das Zusammentreffen beider Ereignisse $= \frac{1}{2} . \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Eben so ist die zusammengesetzte Wahrsch., dass man in die zweite Urne greifen und dann daraus eine weisse Kugel ziehen wird, $= \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; man hat daher endlich, da beide diese betrachteten Ereignisse dem fraglichen Ereigniss günstig sind, für die gesuchte zusammengesetzte Wahrsch.: $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$.

Genau eben so findet man für die Wahrsch., auf einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen eine schwarze Kugel zu ziehen: $\frac{1}{2} . \frac{1}{4} + \frac{1}{2} . \frac{2}{6} = \frac{7}{24}$,

welche Wahrsch, mit der vorigen addirt, wie es in der That sein soll, die Einheit gibt; indem diese Wahrsch. die entgegengesetzte von der vorigen bildet [I, 392].

5. Das im §. 337 angeführte dritte Problem lässt sich einfacher mittelst der zusammengesetzten Wahrsch. auflösen. Denn es ist die Wahrsch., dass das oberste Blatt der König sei, $=\frac{1}{13}$, jene, dass, nachdem diese Karte weggenommen worden, das oberste Blatt das Ass sei, $=\frac{1}{12}$, folglich die gesuchte Wahrsch., dass Beides in dieser Ordnung Statt finde: $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{156}$, wie a. a. O.

6. Die Wahrsch. zu bestimmen, dass in der gewöhnlichen Zahlenlotterie, in welcher von den 90 Nummern jedesmal 5 gezogen werden, von 2 besetzten Nummern wenigstens eine herauskomme.

Die Wahrsch., dass auf den ersten Zug eine der beiden Nummern herauskomme, ist $=\frac{1}{90}$, jene, dass auf den zweiten Zug die andere gezogen wird, $=\frac{1}{89}$; mithin die Wahrsch., dass Beides geschieht, $=\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}$. Da es aber hier auf die Ordnung, in welcher beide Nummern gezogen werden, nicht ankommt; so wird diese Wahrsch. (da sich 5 Elemente, worunter 3 gleiche sind, 20 Mal permutiren lassen) 20 Mal so gross, also die Wahrsch., dass unter 5 Zügen die 2 bestimmten Nummern herauskommen, $=\frac{20}{90.89}=\frac{2}{9.89}$. — Ferner ist die Wahrsch., dass in diesen 5 Zügen bloss eine der beiden Nummern, z. B. die erste, komme, $=\frac{5}{90}$, und jene, dass die andere in den 4 übrigen Zügen nicht herauskommt, $=1-\frac{4}{89}=\frac{85}{89}$, also die Wahrsch., dass Beides zutrifft, $=\frac{5}{90}\cdot\frac{85}{89}$; da ferner dasselbe auch in Beziehung auf die zweite Nummer gilt, so ist überhaupt die Wahrsch., dass in diesen 5 Zügen nur eine der beiden Nummern herauskommt, $=2.\frac{5}{90}\cdot\frac{85}{89}=\frac{85}{9.89}$. Es ist also endlich, da beide betrachteten Ereignisse der Erwartung günstig sind, die gesuchte Wahrsch. $=\frac{2}{9.89}+\frac{85}{9.89}=\frac{87}{801}$ (nahe $=\frac{1}{9}$). Zur Uebung kann man dieses Resultat auch durch die einfache Wahrsch. zu erhalten suchen. [I., 393, 395.]

Die wiederholten Versuche.

§. **343**. Gibt es m Fälle, welche dem Ereigniss A, und n Fälle, welche jenem B günsig sind, und findet bei jedem neuen Versuche immer das nämliche Verhältniss zwischen der Zahl der Fälle beider Arten Statt; so kann die Wahrsch. für irgend eine Erwartung nach einer bestimmten Anzahl von Versuchen leicht durch die zusammengesetzte Wahrsch. gefunden werden. — Nehmen wir z. B. ein $(m+n)$seitiges

regelmässiges Prisma, wovon m Seiten mit A und n Seiten mit B bezeichnet sind, und setzen, dass damit z. B. 3 Mal hinter einander geworfen werde; so können dabei folgende Fälle eintreten: Man wirft 3 Mal A, oder 2 Mal A und 1 Mal B, oder 1 Mal A und 2 Mal B, oder endlich 3 Mal B. Bezeichnet man die Wahrsch. für das Eintreffen von A und B beziehungsweise durch a und b, so ist (§. 335) $a=\frac{m}{m+n}$ und $b=\frac{n}{m+n}$; folglich die zusammengesetzte W. für das erste Ereigniss AAA sofort $a.a.a=a^3$; für das zweite oder AAB: $a.a.b=a^2b$, und wenn dabei die Ordnung nicht bestimmt ist (also AAB 3 Mal permutirt werden kann) $=3a^2b$; für das dritte Ereigniss oder $ABB=ab^2$, und ohne Rücksicht auf die Ordnung $=3ab^2$, und endlich für den vierten Fall, d. i. für BBB: $b.b.b=b^3$. Die bei diesen drei wiederholten Versuchen vorkommenden Wahrsch. aller dabei möglichen Fälle sind demnach, wenn die Ordnung nicht bestimmt ist: a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, nämlich die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^3$.

§. **344**. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen findet man eben so, dass die einzelnen Wahrsch. für alle jene Fälle, welche bei n wiederholten Versuchen eintreten können, durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^n$, d. i. durch a^n, $\binom{n}{1}a^{n-1}b$, $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$, . . b^n ausgedrückt werden, so, dass nämlich das allgemeine Glied $\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ die Wahrsch. ausdrückt, dass unter n Versuchen oder Würfen, ohne Rücksicht auf die Ordnung, A $n-p$ Mal und B p Mal eintreffe. — Soll dabei die Ordnung eine bestimmte sein, so darf man darin nur den Coefficienten auslassen, d. i. $\binom{n}{p}=1$ setzen.

§. **345**. Soll endlich die Wahrsch. bestimmt werden, dass unter diesen n Versuchen A wenigstens $n-2$ Mal eintrifft, so sind auch jene Fälle dem Ereigniss günstig, in welchen A $n-1$ oder n Mal zutrifft; mithin drückt die Summe der ersten drei Glieder der vorigen Entwickelung die ge-

suchte Wahrsch. aus, weil man in diesem Falle eigentlich die Wahrsch. sucht, dass A n Mal, oder $n-1$ Mal, oder $n-2$ Mal eintrifft. — Dagegen ist die Wahrsch., dass A unter n Versuchen höchstens $n-2$ Mal eintritt, gleich der Summe der ganzen Reihe, um jene der beiden ersten Glieder vermindert. Dasselbe gilt auch in Beziehung auf das Ereigniss B.

Anmerk. Da hier immer $a+b=1$, also auch $(a+b)^n=1$, oder die Summe der ganzen Reihe gleich 1 ist; so ist auch die Summe aus der Wahrsch., dass A wenigstens $n-p$ Mal und höchstens $n-p-1$ Mal unter n Versuchen eintrifft, immer gleich der Einheit oder Gewissheit; was auch sein soll. Zugleich folgt daraus, dass es, wenn zur Bestimmung irgend einer Wahrsch. mehr als die halbe Anzahl der Glieder dieser Reihe summirt werden soll, bequemer ist, die Summe der kleineren Hälfte von der Einheit, als Summe der ganzen Reihe abzuziehen; was damit übereinstimmt, anstatt der gesuchten Wahrsch. die entgegengesetzte Wahrsch. zu bestimmen und sie von der Einheit abzuziehen. [I., 398 — 403.]

§. 346. Beispiele und Aufgaben über die wiederholten Versuche.

1. Wie gross ist die Wahrsch, mit einem gewöhnlichen Würfel unter 4 Würfen *a*) die Zahl 6 Einmal, also 3 Mal eine andere Zahl, *b*) diese Zahl 6 wenigstens 2 Mal, und endlich *c*) höchstens 2 Mal zu werfen?

Hier ist die einfache Wahrsch. des Ereignisses A sofort $a=\frac{1}{6}$, also die entgegengesetzte: $b=\frac{5}{6}$ und $n=4$; daher

$$(a+b)^n=(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

a) In diesem Falle gibt das 4. Glied dieser Reihe die gesuchte Wahrscheinlichkeit; diese ist nämlich: $4ab^3=4\,.\,\frac{1}{6}\,.\,\frac{125}{216}=\frac{125}{324}$.

b) Die gesuchte Wahrsch. wird hier durch die Summe der 3 ersten Glieder dieser Reihe ausgedrückt, so, dass man dafür hat:

$$\frac{1+4.5+6.25}{6^4}=\frac{19}{144}.$$

c) In diesem Falle erhält man die Wahrsch. durch die Summe der 3 letzten Glieder der Reihe; diese ist nämlich

$$=\frac{6.25+4.125+625}{6^4}=\frac{1275}{1296}=\frac{425}{432}.$$

2. In einer Urne befinden sich 4 weisse und 6 schwarze Kugeln; wie gross ist die Wahrsch., in 6 Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gelegt wird, 2 weisse und 4 schwarze Kugeln zu ziehen?

Hier ist die einfache Wahrsch., eine weisse Kugel zu ziehen (die W. für das Ereigniss A): $a = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, und jene, eine schwarze zu ziehen (die Wahrsch. für das Ereigniss B): $b = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Die gesuchte Wahrsch. wird durch jenes Glied der Entwickelung von $(a+b)^6$ ausgedrückt, welches die Form Ka^2b^4 hat (die Exponenten von a und b sind die Wiederholungszahlen von A und B), und da hier

$$K = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3.4} = 15$$

ist; so hat man für die gesuchte Wahrsch.:

$$15\,a^2b^4 = 15 . \tfrac{4}{25} . \tfrac{81}{625} = \tfrac{972}{3125}.$$

3. Man wirft ein Geldstück, dessen beide Seiten beziehungsweise das Gepräge von Kopf und Wappen besitzen, in die Höhe; wie gross ist die Wahrsch., dass in 2 Würfen wenigstens Einmal Wappen falle?

Die gesuchte Wahrsch. ist $= a^2 + 2ab$, wobei $a = b = \frac{1}{2}$ ist, also $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; von welchem Ergebniss man sich auch leicht durch die einfache Wahrsch. überzeugen kann. [I, 405.]

§. **347.** Zusatz. Verändert sich nach jedem Versuche die Anzahl aller Fälle, wie z. B. wenn die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne zurückgelegt werden; so treten andere Verhältnisse ein, und man findet z. B., dass wenn A m und B n Fälle für sich hat, und $m + n = s$ gesetzt wird, die Wahrsch., dass nach p Versuchen, nach deren jedem die Summe s um eine Einheit abnimmt, A $p - q$, und B q Mal eintreffen werde,

$$= \frac{p(p-1)..(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q} \times \frac{m(m-1)..[m-(p-q)+1] \times n(n-1)..(n-q+1)}{s\,(s-1)..\;(s-p+1)}$$

ist. Auch sieht man von selbst, dass wenn mehr als zwei Arten von Ereignissen vorkommen, man statt dem Binom das Polynom in Anwendung bringen müsse. — Befinden sich z. B. in einer Urne 3 weisse, 5 schwarze und 4 rothe Kugeln; so werden beziehungsweise die Wahrsch. für alle bei n auf einander folgenden Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gethan wird, vorkommenden Ereignisse, durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b+c)^n$, wo a, b, c der Reihe nach die absoluten Wahrsch. für das Ziehen einer weissen, schwarzen und rothen Kugel bezeichnen, also $= \frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$ und $\frac{4}{12}$ sind, ausgedrückt. [I., 406.]

Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch fortgesetzte Versuche.

§. **348.** Nach §. 344 drückt das letzte Glied b^n der Entwickelung von $(a+b)^n$, wobei a und b die absoluten Wahrsch. der Ereignisse A und B bezeichnen, die Wahrsch. aus, dass unter n Versuchen A kein Mal, also B n Mal nach einander eintreffen werde. Nun wird aber, wegen $b < 1$, b^n um so kleiner, je grösser n wird; also die W., dass unter n Versuchen A gar nicht eintrifft, immer kleiner, folglich die entgegengesetzte W. $1 - b^n$, dass nämlich A dabei wenigstens 1 Mal zutrifft, immer grösser. Es lässt sich daher die Frage aufwerfen, für welchen Werth von n, oder für wie viele Versuche diese W. eine bestimmte Grösse erreicht haben wird?

§. **349.** Setzt man zur Beantwortung dieser Frage die gegebene W. (welche das Ereigniss, dass A unter n Versuchen wenigstens Einmal eintrifft, erhalten soll) $= g$, so ist die entgegengesetzte W.: $b^n = 1 - g$, und aus dieser Gleichung, wenn man Logarithmen anwendet: $n = \frac{log\,(1-g)}{log\,b}$; welcher Ausdruck sofort zeigt, dass n oder die Anzahl der Versuche um so grösser sein muss, je mehr sich b oder g der Einheit nähern.

Beispiel. Die W., mit zwei Würfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen, ist $= \frac{1}{6}$; wie viele Versuche müssen gemacht werden, wenn die W., dass darunter wenigstens Einmal ein Pasch geworfen werde, sich bis auf $\frac{1}{2}$ steigert, und für wie viele Versuche ist diese $= \frac{3}{4}$?

Hier ist $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{6}$, und für den 1. Fall $g = \frac{1}{2}$; folglich nach der vorigen Formel:

$$n = log\,\tfrac{1}{2} : log\,\tfrac{5}{6} = log\,2 : (log\,6 - log\,5) = \cdot 30103 : \cdot 07918 = 3 \cdot 8,$$

oder die W. für das genannte Ereigniss ist für 4 Versuche schon etwas weniges grösser als $\frac{1}{2}$.

Für den 2. Fall ist $g = \frac{3}{4}$, also

$$n = log\,4 : (log\,6 - log\,5) = 7 \cdot 6,$$

also die W. bei 8 Versuchen ebenfalls schon grösser als $\frac{3}{4}$.

Regeln beim Wetten.

§. **350.** Eine Wette zwischen zwei oder mehreren Personen kann nur dann rechtmässig genannt werden, wenn

der Einsatz eines jeden der W., die Wette zu gewinnen, proportional ist. Denn nimmt man z. B. an, dass beim gewöhnlichen Würfelspiele von 6 Personen jede eine der 6 Zahlen besetzt, so wird offenbar jeder gleich viel einsetzen müssen; es hat aber auch in der That jeder der Spieler die nämliche W. für sich, das Spiel zu gewinnen. Uebernimmt nun z. B. *B* 5 Antheile oder vertritt er die Stelle von 5 Spielern, die etwa beziehungsweise auf die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gesetzt haben; so bleibt Alles dasselbe, wenn nur *B* seinen vorigen (nämlich den jetzigen Einsatz des *A*) 5fach leistet, und sonach mit dem Einsatze 5 gegen *A*, welcher 1 auf die Zahl 6 einsetzt, wettet, dass eine der 5 übrigen Zahlen von 1 bis 5 falle. Aber auch in diesem Falle, dessen Rechtmässigkeit einleuchtet, verhalten sich die W., die beziehungsweise *A* und *B* zum Gewinnen des Spieles haben, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6} = 1 : 5$, d. i. wie ihre Einsätze.

§. **351.** Setzen also 2 Spieler die Summen a und a', und sind ihre W. das Spiel zu gewinnen ω und ω'; so wird erfordert, dass $a : a' = \omega : \omega'$ oder $a\omega' = a'\omega$ sei: es müssen nämlich die Producte aus dem Gewinnste, den jeder hofft, in die W. diesen zu erlangen, d. i. die mathematischen Hoffnungen oder Erwartungen einander gleich sein.

1. Wettet *A* gegen *B*, dass er mit 2 Würfeln auf einen Wurf die Summe 5 werfen wird, so müssen sich die von *A* und *B* zu leistenden Einsätze wie 1 : 8 verhalten; weil die W. die Summe 5 zu werfen (§. 337, 1.) $= \frac{1}{9}$, also die des Gegentheils $= \frac{8}{9}$ ist.

2. Verspricht *A* dem *B* beim Kopf- und Wappenspiel, wenn Wappen auf den 1. Wurf fällt 2, und wenn es erst auf den 2. Wurf fällt, 4 Groschen; so ist die mathematische Hoffnung des *B*, da die einfachen W. der genannten Ereignisse beziehungsweise $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sind, sofort: $2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{4} = 2$ Groschen; und eben so viel muss auch der *B* dem *A* entgegen setzen, weil Einsatz und Hoffnung gleich sein sollen.

Soll aber, ungeachtet vielleicht schon auf den 1. Wurf Wappen fiel, *B* dennoch die 4 Groschen bekommen, wenn es auch auf den 2. Wurf fällt; so ist jetzt die W., dass Wappen auf den 2. Wurf fällt, da nun der 1. Wurf hierauf keinen Einfluss hat, $= \frac{1}{2}$, also die mathematische Hoffnung des $B = 2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{2} = 3$ Groschen, die er sofort auch einsetzen muss.

Rechtmässige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spieles.

§. **352.** Sind mehrere Versuche nöthig, um ein Spiel zu entscheiden oder zu Ende zu bringen, und wird, nachdem bereits einige Versuche gemacht worden, das Spiel vor dessen Beendigung abgebrochen; so kann gefragt werden, nach welchem Verhältnisse der von den Spielern geleistete Einsatz zu vertheilen sei. Da man bei jedem Spiele von dem Grundsatze ausgeht, dass jeder Spieler auf den geleisteten Einsatz verzichtet, dagegen, wenn der Zufall über den ganzen Einsatz noch nicht entschieden hat, zur Entschädigung auf diesen Einsatz ein Recht besitzt, welches seiner Hoffnung, d. i. seiner W. das Spiel zu gewinnen, proportionirt ist; so muss eben diese Regel, die sogenannte Theilungsregel, bei allen solchen Theilungen, wenn sie rechtmässig sein sollen, zu Grunde liegen.

Dass dieser Einsatz der Hoffnung, die er hat, das Spiel zu gewinnen, gleich sein muss, kann auch so gezeigt werden.

Es ist $a : a' = \omega : \omega'$ oder $a\omega' = a'\omega \ldots (1)$;

ferner ist auch $\omega + \omega' = 1 \ldots (2)$.

Die Hoffnung, den ganzen Einsatz zu gewinnen, ist für den Spieler A:

$$(a+a')\omega = a\omega + a'\omega = a\omega + a\omega' \text{ (wegen Relat. 1)},$$

$$\text{d. i.} = a(\omega+\omega') = a \text{ (wegen Relat. 2)},$$

und für jenen B:

$$(a+a')\omega' = a\omega' + a'\omega' = a'\omega + a'\omega' = a'(\omega+\omega') = a'.$$

Dabei gibt der Einsatz eines Spielers diesem gleichsam erst das Recht auf die Hoffnung, den ganzen Einsatz zu gewinnen.

1. Wettet z. B. A, mit einem Würfel 2 Mal hinter einander die Zahl 6 zu werfen; so darf er (nach dem Grundsatze in §. 351) nur die Summe 1 setzen, während sein Gegner B den Einsatz 35 zu leisten hat. Gehen die Spieler aus einander, bevor noch ein Wurf gemacht worden, so muss natürlich jeder seinen Einsatz unverändert zurück nehmen, oder es muss der ganze Einsatz 36 so vertheilt werden, dass davon A die Summe 1, und B die Summe 35 erhält, also augenscheinlich in demselben Verhältniss, in welchem in diesem Augenblicke noch ihre W. das Spiel zu gewinnen stehen. Hat aber A bereits Einmal und dabei wirklich die Zahl 6 geworfen, so haben sich dadurch die Hoffnungen der Spieler ganz anders gestellt: A gewinnt nun, wenn er im nächsten Wurf die Zahl 6 wirft, wofür er die W. $= \frac{1}{6}$ hat; B dagegen gewinnt, wenn A diese Zahl nicht wirft, wofür die W. $= \frac{5}{6}$ ist. Vor dem 2. Wurfe verhalten sich also die mathematischen Hoffnungen des A und

B, das Spiel zu gewinnen, wie 1:5, also muss auch, falls sich die Spieler vor diesem 2. Wurfe trennen, der ganze Einsatz 36 in eben demselben Verhältniss getheilt werden, so, dass davon A die Summe 6 und B jene 30 erhält.

2. Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, dass derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst 3 Partien gewinnt; nachdem nun A bereits 2, und B Eine Partie gewonnen haben, trennen sie sich; nach welchem Verhältniss ist jetzt der Einsatz zu theilen?

Wäre das Spiel fortgesetzt worden, so würde A dasselbe gewonnen haben, wenn er entweder die folgende Partie gewonnen hätte, wofür die W. $= \frac{1}{2}$ ist, oder, wenn er diese Partie verloren, dagegen die nächst folgende gewonnen hätte, welches zusammengesetzte Ereigniss sonach die W. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ für sich hat; es ist also in dem Augenblicke, in welchem das Spiel unterbrochen wird, die mathematische Hoffnung des A $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. B dagegen würde das Spiel nur haben gewinnen können, wenn er die beiden folgenden Partien nach einander gewonnen hätte, wofür die zusammengesetzte W. $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ist; und diess ist zugleich die Hoffnung, welche B beim Abbrechen des Spiels hat. Es muss also zufolge der obigen Regel von dem ganzen Einsatze A $\frac{3}{4}$ und B $\frac{1}{4}$ erhalten, so, dass wenn z. B jeder 32 Ducaten gesetzt hat, A und B davon beziehungsweise 48 und 16 Ducaten bekommen. [I., 413.]

Die Wahrscheinlichkeit *a posteriori*.

§. **353**. Bei allen bisher behandelten Aufgaben hat sich das Verhältniss der günstigen zu allen gleich möglichen Fällen aus den gegebenen Bedingungen immer im Voraus, also auch die W. *a priori* bestimmen lassen. Ist dieses Verhältniss aber unbekannt, und soll dieses erst, so weit es möglich, aus Beobachtungen abgeleitet werden; so wird die darauf gebaute Wahrscheinlichkeit eine W. *a posteriori* genannt. Kennt man z. B. die Bedingungen einer Urne nicht vollständig, aus welcher die Ereignisse hervorgehen; so muss man alle möglichen Bedingungen untersuchen, unter welchen diese Ereignisse haben Statt finden können, um dafür wenigstens eine Art von mittlerer W. zu erhalten, welche der wahren um so näher gebracht werden kann, je zahlreicher die Erfahrungen oder angestellten Versuche sind.

§. **354**. Gesetzt man habe aus einer Urne, welche 3 Kugeln enthält, davon jede entweder weiss oder schwarz

sein kann, so, dass man die wahre Anzahl der weissen und schwarzen Kugeln nicht genau kennt, in 3 Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wurde, 2 weisse und 1 schwarze Kugel gezogen; so können in Betreff der Bedingungen dieser Urne die beiden folgenden, aber auch nur diese beiden Hypothesen aufgestellt werden: die Urne enthält α) 2 weisse und 1 schwarze, oder β) 1 weisse und 2 schwarze Kugeln.

Bezeichnet a die W. eine weisse, und b jene eine schwarze Kugel zu ziehen; so ist nach der ersten oder Hypothese α): $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, und nach der 2. β): $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Nun wird die W. 2 weisse und 1 schwarze Kugel zu ziehen (§. 344) durch $3a^2b$ ausgedrückt, folglich ist diese nach den beiden Hypothesen α) und β) beziehungsweise $3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ und $3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Nach der 2. Hypothese ist also die W. des beobachteten Ereignisses nur halb so gross als nach der ersten; es ist aber auch in der That die 2. Hypothese weniger wahrscheinlich als die erste.

§. **355.** Da aber nach der Leichtigkeit, mit welcher die aufgestellte Hypothese die beobachteten Ereignisse herbeiführt, auch der Grad der W. der Hypothese selbst beurtheilt werden muss; so hat man folgenden Grundsatz aufgestellt: die W. der Hypothesen oder Ursachen sind den W., welche daraus für die beobachteten Ereignisse hervorgehen, proportional.

Im angeführten Beispiele verhalten sich also die W. beider Hypothesen wie 2 : 1, und da von beiden eine nothwendig Statt finden muss, so muss auch (§. 331) die Summe ihrer W. = 1 sein. Aus dieser Bemerkung findet man sofort die W der Hypothesen, indem man die betreffenden Verhältnisszahlen 2 und 1 durch ihre Summe dividirt; es ist nämlich die W. der 1. Hypothese $= \frac{2}{3}$, und die der 2. $= \frac{1}{3}$ (denn nun ist, wie es sein soll, $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$, und zugleich $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$).

§. **356.** Sind allgemein H, H', H'', . . . die W. der Hypothesen, und A, A', A'', . . . beziehungsweise die darnach berechneten W. für die beobachteten Ereignisse; so ist dem vorigen Satze gemäss:

$$H : A = H' : A' = H'' : A' = \text{etc.},$$

und daraus:

$$H+H'+H''+\ldots : A+A'+A''+\ldots = H:A = H':A' = \text{etc.},$$

oder wegen $H+H'+H''+\ldots = 1$, und wenn man $A+A'+A''+\ldots = S$ setzt:

$$1 : S = H : A = H' : A' \text{ u. s. w.},$$

so, dass man endlich hat:

$$H = \frac{A}{S}, \quad H' = \frac{A'}{S}, \quad H'' = \frac{A''}{S} \text{ u. s. w.}$$

So hat man im vorigen Beispiele $A = \frac{4}{9}$ und $A' = \frac{2}{9}$, mithin $S = A + A' = \frac{6}{9}$, und daher $H = \frac{4}{9} : \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, und $H' = \frac{2}{9} : \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$, wie vorhin.

§. **357**. Sind die W. der möglichen Ursachen oder Hypothesen ausgemittelt, so kann man nun auch die W. für ein folgendes Ereigniss (nach der W. *a priori*) finden. Es darf nämlich nur die W. des erwarteten Ereignisses nach jeder Hypothese genommen, und diese mit der W. der betreffenden Hypothese selbst multiplicirt werden, so drückt die Summe dieser zusammengesetzten W. die gesuchte W. aus.

So ist in dem vorigen Beispiele die W. auf den folgenden oder 4. Zug eine weisse Kugel zu ziehen $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, und die W. eine schwarze zu ziehen $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$; die Summe dieser beiden W. ist $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$, wie es auch sein soll; weil es gewiss ist, dass man auf diesen 4 Zug entweder eine weisse oder eine schwarze Kugel ziehen wird. [I., 418, dann vermischte Beispiele 420—432.]

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erstes Capitel.

Von der geometrischen Construction algebraischer Ausdrücke.

§. **358.** Bekanntlich lassen sich die Linien, Flächen und Körper ebenfalls durch Zahlen, d. i. arithmetisch, also auch algebraisch, darstellen. So ist z. B. $\sqrt{2}$ die Diagonale eines Quadrates von der Seite 1; $\sqrt{3}$ die im Kreise vom Halbmesser 1 beschriebene regelmässige Dreiecksseite; $2.3 = 6$ die Fläche eines Rechteckes, dessen zusammenstossende Seiten 2 und 3 sind; $2.4.5 = 40$ der Inhalt eines rechtwinkeligen Parallelopipeds von den Seiten 2, 4, 5. Und eben so hat man allgemein ab, ac, bc für die Seitenflächen und abc für den Inhalt eines solchen Körpers, wenn a, b, c die Zahlen bedeuten, welche anzeigen, wie oft die Linieneinheit in den 3 zusammenstossenden Seitenlinien desselben enthalten ist.

§. **359.** Indem man aber die Linien, Flächen und Körper arithmetisch oder vielmehr algebraisch darstellt, lässt sich auch die Algebra auf die Entwickelung und Auflösung der geometrischen Sätze und Probleme, und zwar mit um so grösserem Vortheile anwenden, als die Algebra, sobald sie sich nur einmal eines Gegenstandes bemächtigt hat, dabei immer nach bestimmten und festgesetzten Regeln zu Werke geht und ans Ziel gelangt.

§. **360.** Um das Gesagte sogleich durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Aufgabe auflösen: eine gegebene

Fig. 9. Gerade AB (Fig. 9) ins äussere und mittlere Verhältniss, d. i. im Puncte C so zu theilen, dass das grössere Stück AC die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem kleinern Abschnitt BC und der ganzen Linie AB werde.

Bezeichnen wir die gegebene Gerade durch a, den grössern Abschnitt durch x, also den kleinern durch $a-x$, so soll der Bedingung gemäss (1) $a-x:x=x:a$ sein. Um aber die algebraischen Operationen hierauf anwenden zu können, müssen diese Linien a, x und $a-x$ zuerst algebraisch ausgedrückt werden. Zu diesem Ende nehmen wir eine beliebige Linie α zur Einheit und setzen $\frac{a}{\alpha}=a'$, $\frac{x}{\alpha}=x'$; so sind a' und x' die Absolut- oder Verhältnisszahlen, welche anzeigen, wie oft die Linieneinheit α in den Linien a und x enthalten ist. Mit diesen Werthen von $a=\alpha a'$ und $x=\alpha x'$ verwandelt sich die vorige Proportion (1) in folgende: $\alpha a'-\alpha x':\alpha x'=\alpha x':\alpha a'$, oder (1′) $a'-x':x'=x':a'$, und daraus folgt (da man es nun mit Zahlen oder algebraischen Grössen zu thun hat)

$$(2')\quad x'=-\frac{a'}{2}\pm\sqrt{a'^2+\frac{a'^2}{4}},$$

wobei jedoch von den doppelten Zeichen nur das obere genommen werden darf, weil für das untere der Abschnitt x negativ, also gegen den Sinn der Aufgabe grösser als die gegebene Linie a würde.

§. 361. Obschon wir nun aus dieser Gleichung (2′) die Zahl x' wenigstens näherungsweise berechnen, und wegen $AC=x=x'\alpha$ den gesuchten Punct C dadurch angeben könnten; so will man doch, abgesehen von der dabei immer Statt findenden Ungenauigkeit, gewöhnlich die geometrische Construction der gesuchten Grössen, also die geometrische Bedeutung der gefundenen Ausdrücke kennen lernen. Führen wir daher in die gefundene Formel (2′) wieder die Linien selbst ein, indem wir darin bloss

$x' = \frac{x}{\alpha}$ und $a' = \frac{a}{\alpha}$ zu setzen haben; so entsteht, wenn man auch gleich durch α abkürzt:

$$(2) \quad x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Diese Formel, in welcher die Wurzelgrösse offenbar die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes von den Catheten a und $\frac{a}{2}$ vorstellt, führt nun zu folgender geometrischen Construction: in dem Endpuncte B der gegebenen Geraden AB errichte man auf diese das Perpendikel $BD = \frac{a}{2}$, ziehe AD, beschreibe aus D mit dem Halbmesser $DB = \frac{a}{2}$ den Bogen BE und schneide auf der Geraden AB das Stück AE von A bis C ab; so ist C der gesuchte Punct. Denn es ist, dieser Construction zufolge

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \text{ und}$$

$$AC = AE = AD - DE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x.$$

Anmerk. Die algebraische Auflösung dieser Aufgabe führt also genau zu derselben Construction, die schon in den Elementen der Geometrie vorkommt und aus rein geometrischen Betrachtungen hervorgeht. Indess machen wir darauf aufmerksam, dass diese letzteren nicht mehr so ganz einfach sind, während die algebraische Behandlung spielend und fast mechanisch zu dieser Construction hinleitet.

§. **362.** So wie das eben behandelte Beispiel zeigt, fordert die Anwendung der Algebra auf die Geometrie: 1. das Ausdrücken oder Uebersetzen der gegebenen Bedingungen in die algebraische Zeichensprache, 2. die rein arithmetische oder algebraische Entwickelung und Bestimmung der unbekannten Grössen, und endlich 3. die Herstellung der geometrischen Bedeutung der gefundenen Formeln und Ausdrücke oder ihre geometrische Construction.

Anmerk. 1. Aus demselben Beispiele ersieht man aber auch, durch Vergleichung der Gleichungen (1) und (1'), dann (2) und (2'), dass

man schneller und einfacher zur Endgleichung (2) gelangt, wenn man, ohne erst von den Linien a, x auf ihre Verhältnisszahlen a', x' und von diesen wieder auf die Linien zurückzugehen, x unmittelbar aus der Gleichung (1) bestimmt. Allein, wenn wir uns auch in der Folge diese Abkürzung erlauben; so wird dennoch, dem wahren Sinne gemäss, immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die angenommenen Buchstaben, während der algebraischen Operationen nicht die Linien selbst, sondern nur ihre Verhältnisszahlen zu einer bestimmten oder beliebigen linearen Einheit bezeichnen; denn es würde durchaus keinen Sinn haben, wenn man Linien mit einander multipliciren, dividiren u. s. w. wollte.

Anmerk. 2. Endlich zeigt dieses Beispiel noch, dass die Endgleichung durchaus von einerlei Dimension (hier, wo eine Linie gesucht wird, von der ersten) oder homogen sei; und diese Eigenschaft findet in allen Gleichungen und algebraischen Ausdrücken Statt, welche aus der Anwendung der Algebra auf die Geometrie hervorgehen, sobald man nämlich jede vorkommende Linie ausdrücklich durch einen Buchstaben, die Fläche durch die 2. und den Körper durch die 3. Potenz solcher Buchstaben bezeichnet.

Diese Homogenität wird dagegen gestört, sobald eine dieser Linien, wie z. B. in der Trigonometrie der Halbmesser, zur Einheit genommen, also mit 1 bezeichnet, und sonach in der Multiplication, Division u. s. w. ausgelassen wird. (Vergleiche §. 35.) Diese beiden Fälle sollen bei den nun vorzunehmenden geometrischen Constructionen besonders behandelt werden.

Construction der *homogenen* algebraischen Ausdrücke.

§. **363.** Alle vorkommenden algebraischen Ausdrücke, welche einer geometrischen Construction fähig (nämlich mittelst Lineal und Zirkel ausführbar) sind, lassen sich auf die wenigen Grundformen: $x = A \pm B$, $x = \frac{AB}{C}$, $x = \sqrt{AB}$ und $x = \sqrt{A^2 \pm B^2}$, die wir sofort der Reihe nach durchgehen wollen, zurückführen.

§. **364.** Um den Ausdruck $x = a - b + c + d - e$, wobei a, b, c, d, e gegebene Linien bezeichnen, zu construiren, hat man auch $x = (a + c + d) - (b + e) = A - B$. Man nehme daher auf einer unbestimmten Geraden AN

(Fig. 10) $AB = a$, $BC = c$ und $CD = d$; so ist $AD = a + c + d = A$. Ferner trage man von D gegen A zurück, $DE = b$ und $EF = e$, so ist $DF = b + e = B$; folglich $AF = A - B = x$. Fig. 10.

Auf dieselbe Art wird man die Ausdrücke $x = 2a$, $x = 5b$ u. s. w., und da man jede gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann, auch jene $x = \frac{3a}{5}$, $x = \frac{4b}{7}$ u. s. f. construiren.

§. **365**. Zur Construction des Ausdruckes $x = \frac{ab}{c}$, welcher die Proportion $c : a = b : x$ liefert, darf man nur eine vierte Proportionallinie zu den Linien c, a und b suchen. Diess zu bewerkstelligen, zeichne man einen beliebigen Winkel MAN (Fig. 11), trage von A aus auf den einen Schenkel die Gerade c bis B, auf den andern die Linie a bis C, und dann wieder auf den ersten die Linie b bis D auf, verbinde die beiden erstern Puncte B und C durch die Gerade BC und ziehe zu dieser durch den 3. Punct D die Parallele DE; so ist AE die gesuchte Linie x. Denn man hat, zufolge dieser Construction, $AB : AC = AD : AE$, d. i. $c : a = b : AE$, also $AE = \frac{ab}{c} = x$. Fig. 11.

§. **366**. Der Ausdruck $x = \frac{a^2}{b}$ stellt eine dritte Proportionallinie zu b und a vor, indem man daraus die Proportion $b : a = a : x$ hat. Da diess aber nur ein specieller Fall des vorigen ist, so ist auch die Construction die nämliche.

Anmerk. In gewissen Fällen und für $b > a$ kann auch die folgende Construction mit Vortheil angewendet werden: Ueber der Geraden $AB = b$ (Fig. 12) beschreibe man als Durchmesser einen Halbkreis, trage aus A die Linie $AC = a$ als Sehne ein und fälle aus C auf AB das Perpendikel CD; so ist AD die gesuchte 3te Proportionallinie x; denn man hat, wenn noch BC gezogen wird, im rechtwinkeligen Dreieck ACB bekanntlich $AB : AC = AC : AD$, d. i. $b : a = a : AD$, also $AD = \frac{a^2}{b} = x$. Fig. 12.

§. **367.** Der Ausdruck $x = \sqrt{ab}$ bezeichnet eine mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Geraden a und b; denn man hat daraus die Proportion $a : x = x : b$. Um diese Linie zu construiren, trage man α) auf einer Fig. 13. unbestimmten Geraden AN (Fig. 13) $AB = a$ und $BC = b$ auf, beschreibe über $AC = a + b$ als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AC in B das Perpendikel BD bis zum Durchschnitt desselben; so ist dieses die gesuchte Linie x. Denn man hat (mit Zuziehung der Hilfslinien AD, CD) in dem bei D rechtwinkeligen Dreiecke ADC, $AB : BD = BD : BC$ oder $a : BD = BD : b$, also $BD = \sqrt{ab} = x$. — Oder man trage β) beide Linien von dem-Fig. 14. selben Puncte A aus, d. h. man mache (Fig. 14) $AB = a$, $AC = b$, beschreibe über der grössern AC als Durchmesser den Halbkreis und errichte im Endpuncte B das Perpendikel BD; so ist die Sehne AD die gesuchte Linie x. Denn es folgt, wenn noch CD gezogen wird, aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ADC sofort $AB : AD = AD : AC$ oder $a : AD = AD : b$, und daraus $AD = \sqrt{ab} = x$.

§. **368.** Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ stellt die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes vor, dessen Catheten a und b sind. Man construire daher einen rechten Win-Fig. 15. kel CAB (Fig. 15), schneide auf dessen Schenkeln $AB = a$, $AC = b$ ab und ziehe BC; so ist $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = x$.

§. **369.** Um den Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, welcher die Cathete eines rechtwinkeligen Dreieckes darstellt, in welchem a die Hypotenuse und b die andere Cathete ist, zu construiren, zeichne man wieder einen rechten Winkel CAB Fig. 16. (Fig. 16), schneide auf den einen Schenkel $AB = b$ ab, und durchschneide den andern aus B, mit dem Halbmesser $BC = a$ in C; so ist $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Fig. 17. Oder man beschreibe über der Geraden $AB = a$ (Fig. 17) einen Halbkreis, trage in diesen, von A aus, die Linie $AC = b$ als Sehne ein; so ist offenbar die andere Sehne

BC die gesuchte Gerade x. Oder da endlich

$$x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

ist, so kann man auch, nach §. 367, zu den beiden Linien $a+b$ und $a-b$ die mittlere geometrische Proportionallinie suchen.

§. **370.** Beispiele. Dass nun überhaupt jeder homogene, rationale oder irrationale Ausdruck von einer Dimension, in so ferne bloss Quadratwurzeln vorkommen, construirt werden könne, soll in den nachstehenden Beispielen gezeigt werden.

1. Um den Ausdruck $x = \frac{abc}{de}$ zu construiren, setze man $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$. Sucht man daher, nach §. 365, die 4. Proport.-Linie $\frac{ab}{d} = m$, so ist $x = \frac{mc}{e}$ abermals eine solche Proportionallinie zu e, m und c.

2. Um den Ausdruck $x = \frac{3a^2 b^3}{2c^3 d}$ zu construiren, schreibe man denselben auf folgende Art: $x = \frac{3a^2}{2c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{d}$, suche (§. 365) zu $2c$, $3a$ und a die 4. Proport-Linie $m = \frac{3a^2}{2c}$, hierauf zu c, m und b die Linie $n = \frac{mb}{c}$, dann wieder zu c, n und b die 4. Proport.-Linie $p = \frac{nb}{c}$; so ist endlich $x = \frac{pb}{d}$ die 4. Proportionallinie zu d, p und b.

3. Um die Gerade $x = \frac{a^2 d - b^2 d}{ac}$ zu finden, hat man auch $x = \frac{ad}{c} - \frac{b^2 d}{ac}$. Sucht man daher nach den vorigen Beispielen die Linien $\frac{ad}{c} = m$ und $\frac{b^2 d}{ac} = n$, so wird $x = m - n$ gleich der Differenz zweier geraden Linien. Oder man bringe den gegebenen Ausdruck auf die Form $x = \frac{d(a+b)(a-b)}{ac}$, suche zu den Linien a, d und $a+b$ die 4. Proport.-Linie m; so ist $x = \frac{m(a-b)}{c}$ ebenfalls eine solche Proportionallinie zu c, m und $(a-b)$.

4. Zur Construction des Ausdruckes

$$x = \frac{3a^3 + 2a^2 b - ab^2 + c^3}{2a^2 - 3ab + b^2}$$

bringe man diesen auf die Form:

$$x = a^2\left(3a + 2b - \frac{b^2}{a} + \frac{c^3}{a^2}\right) : a\left(2a - 3b + \frac{b^2}{a}\right),$$

und suche wieder die Linien $m = \frac{b^2}{a}$, $n = \frac{c^3}{a^2}$; so wird, nachdem dieser Bruch durch a abgekürzt worden,

$$x = \frac{a(3a + 2b + n - m)}{2a + m - 3b}.$$

Werden ferner, nach §. 364, die Linien $p = 3a + 2b + n - m$ und $q = 2a + m - 3b$ gesucht; so wird endlich $x = \frac{ap}{q}$ eine 4. Proport.-Linie zu q, a und p.

5. Um den Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - e^2}$ zu construiren, ordne man diesen auf folgende Weise:

$$x = \sqrt{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2 + e^2)},$$

suche, nach §. 368, die Hypotenuse m des rechtwinkligen Dreieckes von den Catheten a und d, ferner die Hypotenuse n für die Catheten b und c, so wie endlich noch die Hypotenuse p, welche den Catheten n und e entspricht; so ist $a^2 + d^2 = m^2$, $b^2 + c^2 = n^2$, $n^2 + e^2 = b^2 + c^2 + e^2 = p^2$, folglich $x = \sqrt{m^2 - p^2}$ die 2. Cathete eines rechtwinkligen Dreieckes von der Hypotenuse m und ersten Cathete p, welche nach §. 369 gefunden wird.

6. Dasselbe Verfahren dienet auch zur Construction der Quadratwurzeln aus Zahlen. Ist z. B. $x = \sqrt{10}$, so setze man $x = \sqrt{2 \times 5}$, und suche (nach § 367) zu den Linien 2 und 5 die mittlere Proportionallinie; oder einfacher, man setze $x = \sqrt{3^2 + 1^2}$, und construire diesen Ausdruck nach §. 368. — Eben so ist für $x = \sqrt{7}$ auch

$$x = \sqrt{2^2 + 2^2 - 1^2},\quad \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2},\quad \sqrt{23} = \sqrt{5^2 - 1^2 - 1^2}$$

u. s. w.,

lauter Ausdrücke, die zu der im vorigen Beispiele behandelten Form gehören.

7. Um den Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + bc}$ zu construiren, kann man, nach § 367, die Linie $m = \sqrt{bc}$ suchen, wodurch $bc = m^2$, also $x = \sqrt{a^2 + m^2}$ wird, und diese letztere Linie nach §. 368 bestimmen. Oder man kann auch $x = \sqrt{a\left(a + \frac{bc}{a}\right)}$ setzen, nach §. 365, die Linie $n = \frac{bc}{a}$ construiren, und dann $x = \sqrt{a(a + n)}$ nach §. 367 finden.

Anmerk. Eben so leicht können auch noch zusammengesetztere Ausdrücke dieser Art, wie z. B.

$$x = \sqrt{\frac{a^3 - 3a^2b + bc^2}{b - c}} \text{ u. s. w.,}$$

construirt werden. [II., ·14.]

Construction der *ungleichartigen* algebraischen Ausdrücke.

§. **371**. Wir haben im §. 362 (Anmerk. 2) bemerkt, dass die aus der Anwendung der Algebra auf die Geometrie hervorgehenden Ausdrücke, welche sonst immer homogen sein müssen, dadurch ungleichartig werden können, dass man von den Linien eine zur Einheit nimmt und durch 1 bezeichnet. So gehen z. B. die gleichartigen Ausdrücke $x = \frac{bc}{a}$ und $x = \frac{a^2 b - ac^3}{d^2 + ef}$, wenn man $a = 1$ setzt, über in $x = bc$ und $x = \frac{b - c^3}{d^2 + ef}$, werden sonach ungleichartig und sind in dieser Form zur geometrischen Construction nicht geeignet.

§. **372**. In einem solchen Falle bezeichnet man die durch 1 ausgedrückte Linieneinheit durch einen Buchstaben, z. B. α, und führt diesen in den ungleichartigen Ausdruck statt der 1 dergestalt ein, dass man die einzelnen Glieder der Gleichung mit den nöthigen Potenzen von α multiplicirt oder dividirt, um dadurch die Homogenität in der ganzen Gleichung herzustellen. Ist diese zur Einheit genommene Linie α nicht gegeben, so wählet man eine solche nach Willkür; aber dann ist natürlich auch die zu construirende Linie unbestimmt.

§. **373**. Beispiele.

1. So wird der vorige Ausdruck $x = \frac{b - c^3}{d^2 + ef}$ zur Construction eingerichtet, wenn man die dabei zu Grunde liegende Linieneinheit durch α bezeichnet und berücksichtiget, dass der Bruch (weil x eine Linie bezeichnet) eine Dimension, folglich, da der Nenner deren 2 besitzt, der Zähler 3 Dimensionen erhalten, also b mit α^2 und c^3 mit α multiplicirt werden muss. Dadurch erhält man den homogenen und nach den vorhergehenden §§. leicht zu construirenden Ausdruck: $x = \frac{b\alpha^2 - c^3\alpha}{d^2 + ef}$, wobei nämlich ausser den vorigen Linien b, c, d, e und f auch noch jene α gegeben sein muss, oder sonst beliebig angenommen wird.

2. Eben so wird der ungleichartige Ausdruck

$$x = a^3 + b\sqrt{a - \frac{b^2 c}{d} + \frac{ab}{c^3 d^2}}$$

zur geometrischen Construction eingerichtet, wenn man unter der vorigen Voraussetzung schreibt:

$$x = \frac{a^3}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} \sqrt{a\alpha - \frac{b^2 c}{d} + \frac{a b \alpha^3}{c^2 d^2}}.$$

(Vergl. §. 35, Anmerk.)

Anmerk. Bezeichnen in einem ungleichartigen Ausdrucke die vorkommenden Buchstaben nicht die Linien selbst, sondern nur ihre Verhältnisszahlen zur linearen Einheit; so stellt sich die Gleichartigkeit von selbst her, sobald, wie es auch die geometrische Construction erfordert, dafür die Linien eingeführt werden.

Ist z. B. $x' = a'b'$, und sind x', a', b' die Zahlen, welche anzeigen, wie oft die Linieneinheit α in den betreffenden Linien x, a, b enthalten ist; so hat man $x' = \frac{x}{\alpha}$, $a' = \frac{a}{\alpha}$, $b' = \frac{b}{\alpha}$, und daher, wenn man diese Werthe substituirt: $\frac{x}{\alpha} = \frac{ab}{\alpha^2}$ oder $x = \frac{ab}{\alpha}$, ein Ausdruck, welcher nunmehr homogen und zur geometrischen Construction geeignet ist. [Construction der quadratischen Gleichungen II., 17.]

Zweites Capitel.

Anwendung der Algebra auf die Auflösung einiger geometrischen Aufgaben.

§. **374.** Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 18) ein Quadrat einzuschreiben. Fig. 18.

Auflösung. Nimmt man die Aufgabe als gelöst, und $EFHG$ als das gesuchte Quadrat an, fällt aus C auf AB das Perpendikel CD; so kommt es offenbar nur darauf an, den Punct I zu finden, durch welchen man zu AB die Parallele EF ziehen muss, damit $EF = ID$ werde. Man setze demnach $DI = EF = x$, und suche zwischen x und den Linien des Dreieckes, die sonach bekannt sind, eine Relation zu erhalten. Dazu folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und EFC, deren Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten, $AB : EF = CD : CI$, oder, wenn man $AB = a$ und $CD = h$ setzt, auch $a : x = h : h - x$, woraus man sofort $x = \frac{ah}{a+h}$, nämlich eine 4. Proportionallinie zu $a + h$, a und h erhält. Um diese sogleich mit Benützung der Figur zu construiren, nehmen wir den Winkel CDB, und schneiden, da schon $DC = h$ ist, auf dem verlängerten Schenkel DB, die Stücke $DK = AB = a$ und $KL = CD = h$ ab; so ist $DL = a + h$. Verbindet man ferner L mit C, und zieht zu dieser Verbindungslinie durch K die Parallele KI; so schneidet sich dadurch auf der Geraden CD der gesuchte Punct I ab. Denn es ist dieser Construction zufolge $DL : DK = DC : DI$ oder

$$a + h : a = h : DI = \frac{ah}{a+h} = x.$$

§. **375.** Aufgabe. In der Seite AC des Dreieckes ACB (Fig. 19) einen Punct D von solcher Beschaffenheit zu finden, dass die durch ihn zu AB gezogene Parallele DE einer gegebenen geraden Linie n gleich werde. Fig. 19.

Auflösung. Nimmt man wieder die Aufgabe als gelöst und D für den gesuchten Punct an, so hat man die Proportion $AC:AB = DC:DE$, oder, wenn man $AB = a$, $AC = b$ und $AD = x$ als die unbekannte Entfernung des Punctes D von A setzt, auch (p) $b : a = b - x : n$, und daraus (α) $x = \frac{b(a-n)}{a}$, nämlich eine 4. Proportionallinie zu a, b und $a - n$.

Um diesen Ausdruck zu construiren, wird man gleich den Winkel CAB, auf dessen Schenkeln schon die Linien a und b aufgetragen sind, benützen, und nur noch von B gegen A hin, $BF = n$ abschneiden und durch F mit BC parallel die Gerade FD ziehen, um sofort den gesuchten Punct D zu erhalten; denn man hat dadurch

$$AB : AC = AF : AD,$$

oder $a : b = a - n : AD$, also $AD = \frac{b(a-n)}{a} = x$.

§. **376**. Discussion dieses Resultates. So lange $n < a$ ist, bleibt x in der Gleichung (α) positiv, also der Punct D, wie ursprünglich angenommen wurde, zwischen A und C. Für $n = a$ wird $x = 0$, also fällt D auf A, und es leistet die Linie AB selbst der Aufgabe Genüge. Für $n > a$ endlich wird x negativ, und man hat, wenn das Zeichen ausgesetzt oder sichtbar gemacht wird:

$$(\beta) \quad x = -\frac{b(n-a)}{a}.$$

Um nun den wahren Sinn dieses negativen Resultates zu erfahren, verwandeln wir in der obigen Proportion (p) die Grösse x in $-x$; so entsteht $b : a = b + x : n$, und da dadurch nichts weiter als $b - x$ in $b + x$ verändert wird, so folgt daraus, dass in diesem Falle der gesuchte Punct D nicht, wie es bei der Differenz $b - x$ der Fall ist, zwischen A und C, sondern nun in der Verlängerung von CA liegt. Diess vorausgeschickt, hat man jetzt aus der letztern Proportion sofort $x = \frac{b(n-a)}{a}$; es wird also durch das der Formel (β) vorstehende Zeichen — angedeutet, dass (für

$n > a$) der Punct D nicht mehr, wie man bei der Bildung der ersten Proportion stillschweigend vorausgesetzt hat, von A gegen C hin, sondern in gerad entgegengesetzter Richtung, nämlich in der Verlängerung von A gegen C' liegt.

Was endlich die diessfällige Construction betrifft, so darf man nur BA verlängern, $BF' = n$ auftragen, und durch F' mit CB die Parallele $F'D'$ führen, um sofort den gesuchten Punct D' abzuschneiden; denn man hat dadurch $AB : AC = AF' : AD'$ oder

$$a : b = n - a : AD' = \frac{b(n-a)}{a} = x.$$

Anmerk. Da also die negative Auflösung, die man in diesem Beispiele für $n > a$ erhält, nichts anderes anzeigt, als dass die ursprünglich im Sinn gehabte Lage des Punctes D in Bezug auf A, die auch so lange gilt, als $n < a$ bleibt, für $n > a$ nicht mehr Statt hat, sondern in die gerad entgegengesetzte übergeht; so muss man diese negative Auflösung auch vermeiden können, sobald man den festen Punct, von welchem aus die gesuchte Distanz gezählt wird, so annimmt, dass dieser Punct niemals zwischen die Puncte D und D' der Auflösung zu liegen kommen kann. Und in der That, wählt man C für diesen festen Punct, und setzt $CD = x$; so hat man aus der obigen Proportion (p) $b : a = x : n$, und daraus $x = \frac{bn}{a}$, also einen Ausdruck für x, welcher unter keiner Bedingung, mag auch n noch so gross sein, negativ werden kann. — Dieser Ausdruck zeigt aber ebenfalls wieder, dass für $n < a$, $n = a$, $n > a$ beziehungsweise $x < b$, $x = b$ und $x > b$ wird, so, dass dadurch der Punct D der Reihe nach zwischen C und A, in A selbst, und endlich in der Verlängerung von CA liegt.

§. **377**. Aufgabe. Zwei parallele Linien PQ, MN (Fig. 20) und ein Punct A sind gegeben; man soll durch diesen Punct eine Gerade AF so ziehen, dass der zwischen die Parallelen fallende Abschnitt EF einer gegebenen Linie n gleich werde. Fig. 20.

Auflösung. Fällt man aus A auf MN das Perpendikel AB, so kann man AB und CB als bekannt ansehen, und sofort $AB = a$ und $CB = b$ setzen. Sieht man ferner die Aufgabe als gelöst und AF als die gesuchte Gerade an, so hat man offenbar $AF : EF = AB : CB$ oder $AF : n = a : b$,

also $AF = \frac{na}{b}$. Es ist aber auch, wenn man, da es nur darauf ankommt, den Punct F zu finden, $BF = x$ setzt, aus dem rechtwinkeligen Dreieck ABF:

$$BF = \sqrt{AF^2 - AB^2}, \text{ d. i. } x = \frac{\pm a\sqrt{n^2 - b^2}}{b},$$

so, dass man für x zwei Werthe oder eine doppelte Auflösung der Aufgabe hat.

Um diese Werthe zu construiren, beschreibe man aus C mit dem Halbmesser $CD = CD' = n$ einen Kreisbogen, so ergeben sich auf der Geraden MN die Durchschnittspuncte D, D'; zieht man dann noch zu den Verbindungslinien CD, CD' durch A die Parallelen AF und AF', so sind BF und BF' die beiden Werthe von x. Denn es ist, dieser Construction zufolge, $BD = \sqrt{n^2 - b^2}$, $BC : BD = BA : BF$ oder $b : \sqrt{n^2 - b^2} = a : BF$, also

$$BF = \frac{a\sqrt{n^2 - b^2}}{b} = + x \text{ und } BF' = - BF = - x.$$

Anmerk. Diese Construction wird unmöglich für $CD < CB$, weil dann kein Durchschnitt D oder D' entsteht. In diesem Falle sind aber auch, wegen $n < b$, die Wurzeln oder Auflösungen von x imaginär. Für $n = b$ fallen, wie es sein soll, AF und AF' mit AB zusammen.

§. **378**. Aufgabe. Es sind zwei Puncte A und B
Fig. 21. (Fig. 21) gegeben; man suche in der Geraden AB oder ihrer Verlängerung einen dritten Punct C von solcher Beschaffenheit, dass dessen Abstand vom Puncte A eine mittlere geometrische Proportionale zwischen dessen Abstand vom zweiten Puncte B und der Geraden AB bilde.

Auflösung. Es sei $AB = a$ und es werde angenommen, der Punct C liege, da diess eben so gut sein kann, von A gegen die rechte Seite, also zwischen A und B; so ist, wenn man $AC = x$ setzt, sofort $CB = a - x$, mithin der Bedingung der Aufgabe gemäss $AB : AC = AC : CB$ oder $a : x = x : a - x$, und daraus $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. Man hat daher für x wieder zwei Werthe, wovon der eine

positiv und der andere negativ ist. Die Construction des erstern oder positiven Werthes haben wir bereits in §. 361 ausgeführt, und diese gibt den gesuchten Punct C in der That von A gegen B, genau so, wie vorausgesetzt worden.

Um aber den 2. oder negativen Werth

$$x = -\left[\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}\right]$$

zu construiren, verlängere man die bei der 1. Auflösung erhaltene Gerade $AD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ um das Stück $DE' = \frac{a}{2}$, was am einfachsten dadurch geschieht, dass man gleich Anfangs die verlängerte AD aus D mit dem Halbmesser $DB = \frac{a}{2}$ in E und E' durchschneidet. Dadurch wird

$$AE' = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2},$$

und wenn man des negativen Zeichens von x wegen und zufolge der in §. 376 gemachten Bemerkung, die Linie AE' auf der verlängerten BA von A gegen die Linke bis C' aufträgt; so hat man sofort den zweiten, der Aufgabe Genüge leistenden Punct C'. Es ist in der That, wovon man sich leicht überzeugt, auch für diesen Punct C',

$$AB : C'A = C'A : C'B.$$

Anmerk. Hätten wir den gesuchten Punct C auf der linken Seite von A vorausgesetzt, also diese Seite für die positive genommen; so würden wir für die positive Auflösung sofort AC' und für die negative AC erhalten haben. Diese in beiden Fällen entstehenden entgegengesetzten Auflösungen kommen wieder daher, dass der feste Punct A, von welchem die gesuchte Entfernung x gezählt wird, zwischen den, der Aufgabe Genüge leistenden Puncten C und C' liegt; und wir wiederholen, dass man die negative Auflösung, jedoch ganz ohne Nutzen und nur auf Kosten der Einfachheit, vermeiden kann, wenn man diesen festen Punct so wählt, dass die, die Aufgabe auflösenden Puncte C, C' auf eine und die nämliche Seite fallen. Ein solcher Punct wäre z. B. hier der Punct A'.

§. 379. Aufgabe. Eine gerade Linie AB (Fig. 22) und ein Kreis $IMED$ sind der Grösse und Lage nach ge- Fig. 22

geben; man soll in der Peripherie des Kreises einen Punct M von solcher Beschaffenheit finden, dass, wenn er mit den Endpuncten A und B der Geraden AB verbunden, und hierauf die Sehne DE gezogen wird, diese mit der Geraden AB parallel laufe.

1. Auflös. Man nehme wieder an, die Aufgabe sei gelöst und M der gesuchte Punct; fälle aus C und D auf AB die Perpendikel CF, DG und setze $CD = CI = r$, $AB = a$, $AF = b$, $CF = c$, und da es hinreicht, den Punct D zu finden, welchen wir der Bequemlichkeit der Rechnung wegen durch zwei Linien festsetzen wollen, $AG = x$, $GD = y$; so wird $CH = c - y$, $DH = GF = b - x$, und aus dem rechtwinkeligen Dreieck CDH, $CD^2 = DH^2 + CH^2$ oder (1) $r^2 = (b - x)^2 + (c - y)^2$, und daraus, wenn man entwickelt:

$$(1') \quad x^2 + y^2 = 2bx + 2cy + r^2 - b^2 - c^2.$$

Um noch eine 2. Relation zwischen x und y zu erhalten, hat man aus den ähnlichen Dreiecken MAB und MDE: $MA : MD = AB : DE$ oder $MA : DA = AB : (AB - DE)$, und wenn man das 1. Verhältniss mit AD multiplicirt, auch $AM . AD : AD^2 = AB : (AB - DE)$. Nun ist aber, wenn man an den Kreis aus A die Tangente AI zieht und $AI = p$ setzt, sofort $AM . AD = AI^2 = p^2$, folglich auch, da noch $AD^2 = x^2 + y^2$ und $DE = 2HD = 2(b - x)$, also $AB - DE = a + 2x - 2b$ ist:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = \frac{p^2}{a}(a + 2x - 2b).$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen (1′) und (2) gibt, wenn man die 3. Proportionallinie (§. 366) $\frac{p^2}{a} = m$ setzt, wodurch $p^2 = am$, oder (aus den rechtwinkeligen Dreiecken ACF und ACI), wegen $AC^2 = b^2 + c^2$ und $AI^2 = AC^2 - CI^2$, nämlich p^2 oder $am = b^2 + c^2 - r^2$ wird, sofort $m(a + 2x - 2b) = 2bx + 2cy - am$, oder endlich, wenn man reducirt:

$$(3) \quad (b - m)x + cy = (a - b)m.$$

Diese einfache Gleichung des 1. Grades kann eine der beiden obigen (1) oder (2) ersetzen. Nimmt man sie statt der Gleichung (2), so kommt es noch darauf an, aus den beiden Gleichungen (1) oder vielmehr (1′) und (3), indem der gesuchte Punct D schon durch $AG = x$ hinlänglich bestimmt wird, y zu eliminiren. Man erhält dadurch ohne Schwierigkeit die Finalgleichung:

$$[(b-m)^2 + c^2]\, x^2 - 2m\,[(a-b)(b-m) + c^2]\, x$$
$$= m\,[(a-2b)\,c^2 - m\,(a-b)^2].$$

Obschon sich aber die beiden Wurzeln dieser Gleichung nach dem vorigen Capitel construiren liessen; so würde diese Construction dennoch ziemlich verwickelt ausfallen, und wir können sie hier um so eher übergehen, als wir für diese Aufgabe sogleich noch eine zweite, weit einfachere Auflösung geben werden. Diese 1. Auflösung wird uns weiter unten, bei den geometrischen Oertern, zu einer wichtigen Bemerkung Anlass geben.

§. **380.** 2. Auflösung. Nimmt man wieder D (Fig. 23) als jenen Punct an, durch welchen AD gezogen und verlängert werden muss, um in der Kreisperipherie den gesuchten Punct M abzuschneiden, führt an den Kreis in D die Tangente DG und aus A die Tangente AI; so sind die Dreiecke ADG und AMB (wegen $A = A$, $AGD = GDE = MED = \frac{1}{2}$ Bogen DE) ähnlich, und geben die Proportion $AD : AG = AB : AM$, woraus $AD \,.\, AM = AB . AG$, d. i. $AI^2 = AB . AG$, oder, wenn man $AI = p$, $AB = a$ und $AG = x$ setzt, $p^2 = ax$ oder $x = \frac{p^2}{a}$ folgt. Fig. 23

Um diese dritte Proportionallinie zu construiren, beschreibe man über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, trage in diesen $AK = AI = p$ als Sehne ein, und fälle noch aus K das Perpendikel KG auf AB; so ist (§. 366, Anmerk.) sofort $AG = \frac{p^2}{a} = x$. Ist aber der Punct G gefunden, so darf man nur noch aus diesem an den Kreis die Tangente GD ziehen, um sofort den erwähnten Punct D,

durch welchen auch M gefunden ist, zu erhalten. — Da man jedoch aus dem Puncte G zwei Tangenten GD, GD' an den Kreis ziehen kann; so gibt es ausser M noch einen 2. Punct M', welcher die Aufgabe auflöst; ein Umstand, welcher bei der vorigen oder 1. Auflösung dadurch angedeutet wird, dass die Finalgleichung in x vom 2. Grade ist. [II., 30, ff.]

Vierter Abschnitt.

Die analytische Geometrie in der *Ebene* oder auf *zwei* Coordinaten.

Erstes Capitel.

Bestimmung der Lage eines Punctes. Gleichungen des Punctes und der geraden Linie. Aufgaben über die letztere.

§. 381. Um den Ort eines Punctes M (Fig. 24) in einer gegebenen Ebene festzusetzen, bezieht man diesen auf zwei feste, sich in irgend einem Puncte A schneidende gerade Linien XX', YY', deren Lage man in dieser Ebene als bekannt oder gegeben voraussetzt. Sobald nämlich die auf den beziehungsweise mit XX' und YY' parallelen Geraden MQ und MP gezählten Abstände dieses Punctes von den genannten Linien AY, AX, oder was dasselbe ist, die den vorigen gleichen Entfernungen AP, AQ gegeben oder bekannt sind; so ist auch der Punct M dergestalt bestimmt, dass er mit keinem zweiten verwechselt werden kann. Denn zieht man durch P und Q die Geraden PM und QM mit AY und AX parallel, so ist offenbar der Durchschnittspunct dieser beiden Geraden der gesuchte Punct M. Fig. 24

§. 382. Die festen Geraden AX, AY werden Axen, der Abstand QM, oder gewöhnlicher der ihm gleiche AP, Abscisse, jener AQ oder gewöhnlicher PM, Ordinate, und beide, d. i. Abscisse und Ordinate zusammen, Coordinaten des Punctes M genannt. Die Abscissen werden in der Regel durch x, die Ordinaten durch y bezeichnet, und aus diesem Grunde heissen auch XX' die Abscissenaxe oder Axe der x (weil auf ihr die Abscissen x gezählt werden), und YY', auf welcher die Ordinaten y ge-

zählt werden, die Ordinatenaxe, oder Axe der y; beide Axen zusammen heissen Coordinatenaxen, so wie ihr Durchschnittspunct A, von welchem aus die Coordinaten gezählt werden, Ursprung oder Anfang der Coordinaten, und endlich der Winkel YAX Coordinatenwinkel genannt wird. Je nachdem dieser Winkel ein rechter oder schiefer ist, erhält man ein rechtwinkeliges (orthogonales) oder schiefwinkeliges Coordinaten-System.

Anmerk. Ausser diesem Parallel-Coordinaten-Systeme werden wir weiter unten noch eines, das sogenannte Polar-Coordinaten-System, kennen lernen.

§. **383**. Ueberträgt man auf die Abscisse x und Ordinate y den Begriff der veränderlichen Grössen, so kann man dadurch alle möglichen, innerhalb des Winkels YAX liegenden Puncte bezeichnen und festsetzen. Versieht man aber diese Coordinaten x, y, gemäss den im §. 376 entwickelten Begriffen, noch ausserdem mit den gehörigen Vorzeichen; so können auf dieselbe Art auch die in den 3 übrigen Winkeln liegenden, also überhaupt alle Puncte der gegebenen Ebene bezeichnet oder festgesetzt werden.

§. **384**. Sind für irgend einen Punct M die Abstände $AP = a$, $AQ = b$ gegeben; so hat man $x = a$, $y = b$, und man nennt diese beiden Gleichungen, weil sie den Punct M vollkommen festsetzen, Gleichungen des Punctes M.

Anmerk. Häufig wählt man statt a, b, auch α, β, x', y', x'', y'' u. s. w.

§. **385**. Bleibt der Abstand AP unverändert, während jener MP fortwährend abnimmt und zuletzt Null wird, also M auf P fällt; so hat man $x = a$, $y = 0$, als Gleichungen eines in der Abscissenaxe liegenden Punctes P.

§. **386**. Nimmt dagegen MQ immer mehr ab, und fällt endlich der Punct M auf Q, während AQ unverändert

bleibt; so erhält man $x = 0$, $y = b$, als Gleichungen eines in der Ordinatenaxe liegenden Punctes Q.

§. 387. Fällt endlich im 1. Falle noch P, oder im letztern Q auf A; so wird sowohl x wie y Null, und man hat $x = 0$, $y = 0$ für die Gleichungen des Ursprunges oder Anfangspunctes A.

§. 388. Für Puncte, welche innerhalb des Winkels YAX' liegen, erhält (§. 376) die Abscisse x das entgegengesetzte Zeichen von jenem, welches man ihr in der ersten oder ursprünglichen Lage beilegt. Denn zählt man die x anstatt aus A von A', setzt die Distanz $AA' = d$, und bezeichnet zum Unterschiede die neuen von A' gezählten Abscissen durch x'; so hat man für den Punct M sofort $x' = d + x$ oder $x = x' - d$. So lange nun M innerhalb des 1. Winkels YAX liegt, ist $x' > d$, also x positiv; fällt M in die Ordinatenaxe AY, so wird wegen $x' = d$ sofort $x = 0$; rückt endlich M noch mehr gegen die Linke, so, dass er in den Winkel YAX' zu liegen kommt, so wird $x' < d$, also x negativ, und man sieht, dass x beim Uebergange aus dem Positiven ins Negative durch Null geht. — Genau dasselbe gilt auch von den Ordinaten y hinsichtlich der ober- und unterhalb der Abscissenaxe XX' liegenden Puncte. Nimmt man nämlich, wie es üblich, die Ordinaten für die oberhalb dieser Axe liegenden Puncte als positiv; so werden sie für Puncte, welche in dieser Axe selbst liegen, Null, und gehen von da für unterhalb derselben liegende Puncte ins Negative über.

§. 389. Alles das zusammen gibt also für die beziehungsweise im 1., 2., 3. und 4. Winkel, nämlich in YAX, YAX', $Y'AX'$ und $Y'AX$ liegenden Puncte M, M', M'' und M''' die Gleichungen:

$$\begin{cases} x = +a, \\ y = +b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ y = +b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ y = -b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = +a, \\ y = -b. \end{cases}$$

Distanz zweier Puncte.

§. 390. Wir wollen gleich hier, um die Theorie des Punctes vollständig zu machen, den algebraischen Ausdruck für die Distanz zweier Puncte bestimmen. Dazu nehmen wir zur grössern Einfachheit, was auch in allen folgenden Entwickelungen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, geschehen soll, den Coordinatenwinkel gleich einem Rechten, beziehen also die Puncte auf rechtwinkelige Coordinaten.

Fig. 25 Sind nun M', M'' (Fig. 25) die gegebenen Puncte, x', y' und x'', y'' ihre Coordinaten, und bezeichnet d ihre gegenseitige Distanz; so ist, wenn man noch die Gerade $M'N$ zur Abscissenaxe AX parallel zieht: $d^2 = M'N^2 + M''N^2$, oder wegen $M'N = AP'' - AP' = x'' - x'$ und $M''N = P''M'' - P'M' = y'' - y'$ auch, wenn man gleich die Wurzel auszieht:

$$(1) \quad d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2},$$

als allgemeine Formel für die Entfernung zweier gegebenen Puncte x', y' und x'', y'' (d. h. zweier Puncte, welche die Coordinaten x', y' und x'', y'' besitzen).

§. 391. Liegt einer der beiden Puncte, z. B. jener x'', y'', im Ursprunge A; so hat man (§. 387) $x'' = 0$, $y'' = 0$, und daher (2) $d = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Anmerk. 1. Das doppelte Zeichen, welches vor der Wurzelgrösse [in (1) und (2)] stehen kann, bezieht sich auf die Art, wie man diesen Abstand nimmt; ob nämlich dieser vom 1. gegen den 2., oder umgekehrt vom 2. gegen den 1. Punct, also in gerad entgegengesetzter Richtung genommen wird. Augenscheinlich ist dieses in dem besonderen Falle, in welchem die beiden Puncte M'', M' auf einer der beiden Axen, z. B. auf jener der x liegen; denn in diesem Falle hat man

$$y' = 0,\ y'' = 0, \text{ also } d = \sqrt{(x'' - x')^2} = \pm (x'' - x') = \pm P'P'',$$

und hier gilt offenbar das obere oder untere Zeichen, je nachdem man die Entfernung $P'P''$ gegen X, d. i. von P' gegen P'', oder gegen X', d. i. von P'' gegen P' nimmt.

Anmerk. 2. Für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem, in welchem der Coordinatenwinkel gleich φ ist, erhält man für diese Distanz den schon etwas complicirteren Ausdruck

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2\,(x'' - x')\,(y'' - y')\cos\varphi},$$

welcher für $\varphi = 90^0$ natürlich wieder in den obigen (1) übergeht.

Gleichung der geraden Linie.

§. **392**. Es sei KL (Fig. 26) eine beliebige gerade Linie, Fig. 26. welche die Abscissen- und Ordinatenaxe beziehungsweise in den Puncten C und B schneiden soll. Nimmt man auf dieser Geraden ganz beliebig die Puncte M, M', M'',... und zieht zu diesen die Ordinaten MP, $M'P'$, $M''P''$, ... ferner noch durch B mit der Abscissenaxe XX' die Parallele BQ; so geben die dadurch entstehenden ähnlichen Dreiecke BMp, $BM'p'$, ... sofort:

$$\frac{Mp}{Bp} = \frac{M'p'}{Bp'} = \frac{M''p''}{Bp''} = \ldots,$$

oder, wenn man AB gleich b setzt, auch:

$$\frac{MP - b}{AP} = \frac{M'P' - b}{AP'} = \frac{M''P'' - b}{AP''} = \text{etc.};$$

es ist also das Verhältniss zwischen der um b verminderten Ordinate eines jeden Punctes der Geraden KL und der zugehörigen Abscisse constant. Bezeichnet man daher dieses constante Verhältniss durch a, und die Coordinaten irgend eines Punctes der Geraden KL durch x, y; so hat man die Relation $\frac{y-b}{x} = a$, und daraus.

$$(1)\quad y = ax + b,$$

eine Gleichung für alle Puncte dieser Geraden.

§. **393**. Die Gerade KL wird also durch diese Gleichung (1) auf eine solche Weise repräsentirt, dass wenn man in letzterer für x einen beliebigen Werth AP annimmt, daraus y berechnet und diesen auf dem in P errichteten Perpendikel von P bis M aufträgt, dadurch ein Punct M dieser Geraden erhalten wird. Aus diesem Grunde heisst die Gleichung (1) Gleichung der Geraden KL. Man sieht, dass darin x, y veränderliche, a und b aber constante Grössen bezeichnen, und zwar ist $b = AB$ die Ordinate des Durchschnittspunctes B der Geraden mit der Ordinatenaxe, und wenn man den Winkel LCX dieser Geraden mit der

Abscissenaxe durch a bezeichnet, $a = \frac{Mp}{Bp} = tang\,\alpha$ für den Halbmesser 1.

Anmerk. Wie man aus der Ableitung ersieht, gilt die Gleichung (1) für jeden Coordinatenwinkel; nur erhält für einen schiefen Winkel φ die constante Grösse a nicht mehr den vorigen Werth $tang\,\alpha$, sondern es wird

$$a = \frac{Mp}{Bp} = \frac{sin\,MBp}{sin\,BMp} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\varphi - \alpha)},$$

mithin in diesem Falle die Gleichung der Geraden:

$$(1') \quad y = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\varphi - \alpha)}\,x + b.$$

§. 394. Discussion dieser Gleichung (1).

1. Die beiden constanten Grössen a und b dieser Gleichung, welche so lange unbestimmt bleiben, als nicht von einer gegebenen oder bestimmten Geraden die Rede ist, zeigen, dass eine gerade Linie zu ihrer Bestimmung zwei Bedingungen fordert. Wir werden in den nächstfolgenden Paragraphen sehen, wie sich a und b solchen gegebenen Bedingungen gemäss bestimmen lassen.

2. Ist die Gleichung der Geraden (1) [d. h. Geraden, deren Gleichung (1) ist] gegeben, so erhält man die Coordinaten der Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der Abscissen- und Ordinatenaxe, wenn man in dieser Gleichung respective $y = 0$ und $x = 0$ setzt, und daraus im ersten Falle x und im zweiten y bestimmt. Man erhält nämlich dadurch für diese Durchschnittspuncte C und B beziehungsweise die Coordinaten: $y = 0$, $x = AC = -\frac{b}{a}$ und $x = 0$, $y = AB = b$.

3. Ist $b = 0$, so erhält man $y = ax$ als Gleichung einer durch den Ursprung A gehenden Geraden; denn es folgt daraus für $x = 0$ auch $y = 0$, welches (§. 387) in der That die Coordinaten des Anfangspunctes A sind. Diese Gleichung enthält nur mehr eine unbestimmte Grösse a, zum Zeichen, dass jetzt zur Festsetzung der betreffenden Geraden auch nur mehr eine Bedingung nöthig ist.

4. Dreht sich die Gerade KL um den Punct B gegen die Ordinatenaxe AY zu, so fällt diese bei $\alpha = 90^0$ mit die-

ser Axe zusammen, und man hat dafür wegen $a = tang\,90^0 = \infty$ sofort:

$$x = \frac{y-b}{\infty} = 0;$$

es ist also $x = 0$ die Gleichung der Ordinatenaxe.

5. Fällt bei der weitern Drehung KL mit QB zusammen, so wird $\alpha = 180^0$, $a = tang\,180^0 = 0$, und daher $y = b$ als Gleichung einer mit der Abscissenaxe in dem Abstand b parallelen Geraden.

6. Setzt man $AC = c$, so ist (2) $c = \frac{b}{a}$ oder $b = ac$, und unsere Gleichung (1) erhält auch die Form $y = ax + ac$. Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, die Gerade KL drehe sich jetzt um den Punct C gegen CX; so ist, wenn dabei KL mit der Abscissenaxe zusammenfällt, $\alpha = 0$, $a = tang\,0 = 0$, und daher $y = 0$ als Gleichung der Abscissenaxe.

7. Kommt bei dieser letztern Drehung KL in die mit $YY_{\prime}'$ parallele Lage, so wird $\alpha = 90^0$, $a = \infty$ und $x = \frac{y}{a} - c = \frac{y}{\infty} - c$, d. i. $x = -c$ als Gleichung einer mit der Ordinatenaxe in dem Abstand $-c$ parallelen Geraden.

Anmerk. Da nach 7. und 5. $x = a$ die Gleichung einer mit der Ordinatenaxe in dem Abstand a, und $y = b$ die Gleichung einer mit der Abscissenaxe in dem Abstand b parallelen Geraden ist; so gehören beide Gleichungen, wenn man diese als zusammen bestehend oder coexistirend ansieht, für den Durchschnitt beider Geraden, oder es sind $x = a$, $y = b$ die Gleichungen dieses Durchschnittspunctes; was mit §. 384 übereinstimmt.

Aufgaben über die gerade Linie.

§. **395**. Aufgabe. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten Punct geht.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung hat die Form $y = ax + b$, wobei a und b noch unbestimmte constante Grössen sind. Heissen die Coordinaten des gegebenen Punctes x', y'; so soll der Bedingung der Aufgabe zufolge x', y' ein Punct der gesuchten Geraden sein, folglich muss die

vorige Gleichung für $x = x'$ und $y = y'$ befriedigt werden, so, dass man hat $y' = ax' + b$. Diese Gleichung von der vorigen abgezogen (d. i. aus beiden b eliminirt), erhält man für die gesuchte Gleichung: $y - y' = a(x - x')$, in welcher also x', y' die bestimmten oder constanten, und x, y die allgemeinen, laufenden oder veränderlichen Coordinaten sind.

Für $x = x'$ folgt aus dieser Gleichung $y - y' = 0$ oder $y = y'$; zum Beweise, dass diese Gerade wirklich durch den Punct x', y' geht. Weil ferner diese Gleichung noch die unbestimmte Grösse a enthält, so ist sie selbst unbestimmt, was damit zusammenhängt, dass die hier gegebene Aufgabe eine unbestimmte ist. — Soll der gegebene Punct der Ursprung sein, so erhält man wegen $x' = 0$ und $y' = 0$ sofort: $y = ax$ (vergl. §. 394, 3.).

§. **396.** Aufgabe. Die Gleichung einer durch zwei bestimmte Puncte gehenden Geraden zu finden.

Auflösung. Es seien x', y' und x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Puncte. Die Gleichung der durch den Punct x', y' gehenden Geraden ist nach der vorigen Aufgabe (α) $y - y' = a(x - x')$, wobei nun a so zu bestimmen ist, dass auch die zweite Bedingung erfüllt wird, also die Gerade zugleich noch durch den zweiten Punct x'', y'' geht. Da aber aus der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$ nicht nur, wie vorhin, $y' = ax' + b$, sondern aus gleichem Grunde auch $y'' = ax'' + b$ folgt, indem auch x'', y'' ein Punct dieser Geraden sein soll; so erhält man aus diesen beiden Gleichungen: $y'' - y' = a(x'' - x')$, und daraus $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, welcher Werth in der obigen Gleichung (α) substituirt, sofort für die gesuchte Gleichung gibt:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Diese Gleichung, welche, wie aus der Ableitung hervorgeht, für jeden Coordinatenwinkel gilt, enthält nun keine unbestimmte Grösse mehr, weil auch jetzt die Gerade (der Lage nach) vollkommen bestimmt ist. — Diese Gleichung, welche auch mit der folgenden $y - y'' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'')$ gleichgeltend ist [weil statt der Gleichung (α) eben so gut jene $y - y'' = a(x - x'')$ genommen werden kann], gibt für $x = x'$, sofort $y = y'$,

und für $x = x''$, eben so $y = y''$, zum Beweise, dass die betreffende Gerade wirklich durch die beiden Puncte x', y', x'', y'' geht.

Für $y'' = y'$ folgt $y = y'$, als Gleichung unserer Geraden, die jetzt mit der Abscissenaxe in dem Abstand y' parallel läuft. Für $x'' = x'$ dagegen erhält man wegen $x - x' = \frac{x'' - x'}{y'' - y'}(y - y')$ sofort $x - x' = 0$, oder $x = x'$ als Gleichung der Geraden, die nun mit der Ordinatenaxe im Abstand x' parallel läuft (vergl. §. 394, 5., 7.).

§. **397.** Aufgabe. Die Bedingung anzugeben, unter welcher drei Puncte in ein und derselben geraden Linie liegen.

Auflösung. Sind die Coordinaten dieser drei Puncte beziehungsweise x', y', x'', y'' und x''', y'''; so darf man nur in der Gleichung des vorigen §. noch $x = x'''$ und $y = y'''$ setzen, um auszudrücken, dass die bereits durch die beiden Puncte x', y' und x'', y'' gehende Gerade auch noch durch den dritten Punct x''', y''' geht; dadurch erhält man für die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\frac{y''' - y'}{x''' - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \quad \text{oder} \quad \frac{y''' - y''}{x''' - x''} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

§. **398.** Aufgabe. Zwei sich schneidende gerade Linien sind gegeben; man soll α) ihren Durchschnittspunct und β) den Winkel bestimmen, welchen sie zusammen einschliessen.

Auflösung. Seien (1) $y = ax + b$ und (2) $y = a'x + b'$ die Gleichungen der gegebenen Geraden KL und $K'L'$ (Fig. 27), wobei also a, b, a', b' gegebene oder bestimmte Grössen sind. Bezeichnet man die zu suchenden Coordinaten des Durchschnittspunctes M' dieser beiden Geraden durch x', y', so müssen diese, da der Punct M' beiden Geraden angehört, gleichzeitig beide Gleichungen (1) und (2) befriedigen, so, dass also auch die Gleichung $y' = ax' + b$ und $y' = a'x' + b'$ gelten, aus denen man sofort die Coordinaten x', y' bestimmen kann. Da aber hieraus für x', y' offenbar dieselben Werthe resultiren, wie durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) für x, y; so verfährt man kürzer, und geschieht dieses in der Folge auch immer so, indem man die Coordinaten des Durchschnittspunctes beider Fig. 27.

Geraden (1) und (2) nicht erst accentuirt, sondern unmittelbar ihre Gleichungen (1) und (2), die für diesen Durchschnittspunct gleichzeitig gelten (wofür also x und y nicht mehr die allgemeinen, sondern die besondern, bloss dem Durchschnittspunct entsprechenden Coordinaten bedeuten), mit einander verbindet, und daraus x und y bestimmt. Man erhält nämlich dadurch $a\,x + b = a'x + b'$, und daraus $x = \frac{b' - b}{a - a'}$ für die Abscisse AP' des gesuchten Durchschnitts M'; ferner mit diesem Werthe aus einer der Gleichungen (1) oder (2):

$y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$ für die Ordinate $P'M'$ dieses Punctes.

Für den besondern Fall von $a' = a$ hat man $x = \infty$ und $y = \infty$; was auch der Natur der Sache angemessen ist, da in diesem Falle die beiden Geraden einander parallel sind. — Für $a' = a$ und $b' = b$ wird $x = \frac{0}{0}$ und $y = \frac{0}{0}$ unbestimmt; was damit zusammenhängt, dass nun die beiden Geraden, indem ihre Gleichungen identisch sind, zusammen fallen, sich also in der That in unzähligen Puncten begegnen.

§. **399**. β) Um ferner den Neigungswinkel φ der beiden Geraden (1) und (2) zu bestimmen, so folgt aus dem

Fig. 27. Dreiecke $CM'C'$ (Fig. 27) $\varphi = \alpha' - \alpha$, also

$$tang\,\varphi = tang\,(\alpha' - \alpha) = \frac{tang\,\alpha' - tang\,\alpha}{1 + tang\,\alpha\; tang\,\alpha'},$$

oder, wegen $tang\,\alpha = a$ und $tang\,\alpha' = a'$ auch

$$(p) \quad tang\,\varphi = \frac{a' - a}{1 + a\,a'}.$$

1. Nimmt man an, dass die beiden Geraden (1) und (2) zu einander parallel sind, also $\varphi = 0$ ist; so hat man, wegen $tang\,\varphi = 0$, sofort $a' - a = 0$ oder (q) $a' = a$ als Bedingungsgleichung für den *Parallelismus* der beiden Geraden (1) und (2).

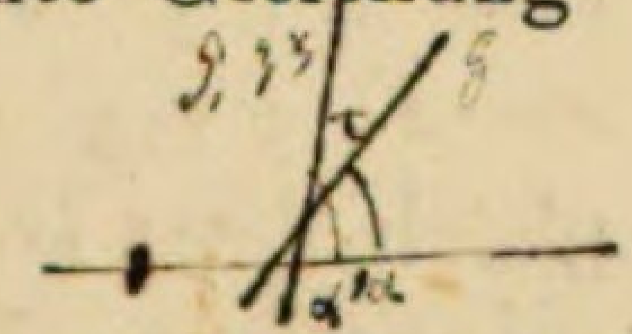
2. Stehen diese beiden Geraden auf einander perpendiculär, so wird $\varphi = 90^0$, $tang\,\varphi = \infty$ oder $\frac{1}{tang\,\varphi} = 0$, und man hat $\frac{1 + a\,a'}{a' - a} = 0$, also (r) $1 + a\,a' = 0$ als Bedingungsgleichung, dass die beiden Geraden (1) und (2) auf einander perpendiculär stehen.

Anmerk. Ist der Coordinatenwinkel kein Rechter, sondern allgemein gleich ω; so erhält man für die vorliegende Aufgabe, statt der vorigen Relation (p), folgende:

$$tang\,\varphi = \frac{(a' - a)\sin\omega}{1 + aa' + (a + a')\cos\omega}.$$

§. **400**. Aufgabe. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten Punct geht und mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel einschliesst.

Auflösung. Seien x', y' die (fortwährend rechtwinkeligen) Coordinaten des gegebenen Punctes, t die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels, und $y = ax + b$ die Gleichung der gegebenen Geraden. Die Gleichung der gesuchten Geraden ist, wenn man gleich die erste Bedingung mit hinein legt (§. 395), $y - y' = a'(x - x')$; um dabei noch a' der zweiten Bedingung gemäss zu bestimmen, bemerke man, dass [§. 399, (p)] zwischen a, a' und t die Relation $t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$, oder auch jene $t = \frac{a - a'}{1 + aa'}$, je nachdem $a' \gtrless a$ ist, also allgemein die Relation $\pm t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$ besteht, aus welcher sofort $a' = \frac{a \pm t}{1 \mp at}$ folgt. Die gesuchte Gleichung ist demnach:



$$y - y' = \frac{a \pm t}{1 \mp at}(x - x').$$

Diese Aufgabe lässt also zwei Auflösungen zu, was damit zusammenhängt, dass man durch den Punct x', y' zwei gerade Linien (eine diess-, die andere jenseits des aus x', y' auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels) unter dem verlangten Neigungswinkel ziehen kann.

1. Soll die gesuchte Gerade mit der gegebenen parallel sein, so erhält man wegen $t = 0$, sofort $y - y' = a(x - x')$ als Gleichung einer durch den Punct x', y' mit der Geraden $y = ax + b$ parallelen Geraden.

2. Soll diese Gerade hingegen auf der gegebenen perpendiculär stehen, so erhält man wegen $t = \infty$ oder $\frac{1}{t} = 0$ sofort $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ als Gleichung einer durch

x', y' gehenden, auf der Geraden $y=ax+b$ perpendiculären Geraden.

§. 401. Aufgabe. Die Länge des Perpendikels zu finden, welches von einem gegebenen Puncte auf eine gegebene Gerade gefällt wird.

Auflösung. Es seien wieder x', y' die Coordinaten des gegebenen Punctes, und (1) $y=ax+b$ die Gleichung der gegebenen Geraden; so ist nach dem vorigen Paragraphe: (2) $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$ die Gleichung des genannten Perpendikels. — Um die Länge desselben zu finden, müssen wir den Durchschnittspunct dieses Perpendikels mit der gegebenen Geraden, und dann nach Form. (1), §. 390, die Entfernung desselben vom gegebenen Puncte bestimmen. Dieser Durchschnittspunct wird aber gefunden, wenn man (§. 398) die beiden Gleichungen (des Perpendikels und der gegebenen Geraden) als coexistirend ansieht, und daraus x und y bestimmt. Bemerkt man indess, dass nach der erwähnten Formel (1) weniger die Coordinaten x', y' und x, y (welche als Coordinaten des genannten Durchschnittspunctes statt x'', y'' stehen) selbst, als vielmehr ihre Differenzen $x-x'$, $y-y'$ nothwendig sind; so wird man einfacher, sogleich diese Differenzen suchen und in die genannte Formel substituiren. Bringt man zu diesem Ende die Gleichung (1) auf die Form $y-y'=a(x-x')+ax'-y'+b$, wodurch sie nicht geändert, aber zur Verbindung mit der Gleichung (2) geeigneter wird; so erhält man durch diese Verbindung:

$$-\frac{1}{a}(x-x')=a(x-x')+ax'-y'+b,$$

und daraus $x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2}$, so wie damit aus Gleichung (2): $y-y'=\frac{-(y'-ax'-b)}{1+a^2}$, mithin endlich, wenn man diese Werthe in die mehr erwähnte Formel

$$d=\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}$$

substituirt, für die gesuchte Länge des Perpendikels P:

$$(\alpha)\quad P=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Anmerk. Das doppelte Zeichen, welches in dieser Formel, der Radikalgrösse wegen, stehen kann, bezieht sich auf die Verschiedenheit der Lage des gegebenen Punctes gegen die gegebene Gerade, indem dieser dies- oder jenseits der Geraden liegen kann. Um dieses anschaulicher zu machen, so sei CL (Fig. 28) die gegebene Gerade Fig. 28. und M der gegebene Punct, welcher oberhalb der CL liegen soll; so ist $y' = PM$, und aus der gegebenen Gleichung der Geraden CL, d. i. aus $y = ax + b$, für $x = x' = AP$ sofort $y = PQ = ax' + b$. Es wird also der Zähler unserer obigen Formel (α), d. i. $y' - (ax' + b) = PM - PQ = MQ$. — Liegt hingegen der gegebene Punct M' unterhalb der Geraden CL, so wird $y' = P'M'$, $ax' + b = P'Q'$, also

$$M'Q' = P'Q' - P'M' = ax' + b - y' = -(y' - ax' - b).$$

Es wird daher MQ, d. i. $y' - ax' - b$ positiv oder negativ, je nachdem der Punct M ober- oder unterhalb der gegebenen Geraden liegt.

Ist der gegebene Punct M der Ursprung der Coordinaten, so wird wegen $x' = 0$ und $y' = 0$:

$$(\beta) \quad P = \frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Geht dagegen die gegebene Gerade durch den Ursprung, so wird, wegen (§. 394, 3.) $b = 0$, sofort:

$$(\gamma) \quad P = \frac{y' - ax'}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Zweites Capitel.

Gleichung des Kreises und Aufgaben über denselben.

Gleichung des Kreises.

Fig. 29. §. **402.** Es seien (Fig. 29) $AB = p$, $BC = q$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Mittelpunctes C, $CM = r$ der Halbmesser, und $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punctes M der Peripherie eines Kreises; so hat man nach der Formel (1), §. 390: (α) $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, eine Relation, welche den bekannten Eigenschaften des Kreises zufolge für alle Puncte der Peripherie, aber auch nur für diese gilt, weil für jeden andern Punct $(x-p)^2 + (y-q)^2 \gtrless r^2$ ist, je nachdem derselbe ausser- oder innerhalb des Kreises liegt. — Da nun diese Gleichung (α) alle Puncte der Kreisperipherie charakterisirt und vollkommen festsetzt; so ist sie die Gleichung des Kreises (hier wird unter der Benennung „Kreis" immer dessen Peripherie, nämlich die krumme Linie verstanden). Diese Gleichung entwickelt, hat man:

$$(1)\quad x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

Anmerk. 1. Die in den allgemeinen Gleichungen (α) oder (1) vorkommenden constanten Grössen sind so lange unbestimmt, als sich diese nicht auf einen bestimmten, der Grösse und Lage nach gegebenen Kreis beziehen; dies beweist, dass zur vollkommenen Bestimmung eines Kreises drei Bedingungen nöthig sind. Weiter unten werden wir diese drei Grössen wirklich nach verschiedenen Bedingungen aufsuchen.

Anmerk. 2. Für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem vom Winkel φ erhält man als Gleichung des Kreises (§. 391, Anmerk. 2.): $(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2(x-p)(y-q)\cos\varphi = r^2$.

§. **403.** Die Gleichung (1) des vorigen §. lässt sich mehr oder weniger vereinfachen, je nachdem man dem rechtwinkligen Axensystem in Bezug auf den Kreis verschiedene Lagen gibt; die vorzüglichsten unter diesen sind folgende:

§. **404.** Liegt der Anfangspunct der Coordinaten in der Kreisperipherie, und sind $A'X'$, $A'Y'$ die Axen; so erhalten p und q die Werthe $p = A'B'$, $q = B'C$, und es ist (Dreieck $CB'A'$) $p^2 + q^2 = r^2$, folglich, wenn man diesen Werth in der Gleichung (1) substituirt: $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$ als Gleichung des Kreises bei dieser Lage der Coordinatenaxen.

Anmerk. Noch einfacher erhält man diese Gleichung des durch den Ursprung gehenden Kreises, wenn man berücksichtiget, dass die allgemeine Gleichung (1) für die Werthe von $x = 0$ und $y = 0$ (als Coordinaten des Anfangspunctes) befriedigt werden muss, wodurch man, wie vorhin, als Bedingungsgleichung $p^2 + q^2 - r^2 = 0$ erhält.

§. **405.** Nimmt man den Durchmesser $A''D$ zur Abscissenaxe, und den Endpunct A'' zum Ursprung der Coordinaten; so folgt, wegen $p = A''C = r$ und $q = 0$, aus der Gleichung (1):

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

§. **406.** Nimmt man dagegen bei der vorigen Abscissenaxe den Mittelpunct C als Ursprung der Coordinaten, so erhält man aus der Gleichung (1), wegen $p = 0$ und $q = 0$ sofort $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Discussion der Gleichung des Kreises.

§. **407.** Die Gleichung einer Curve, als analytischer Repräsentant derselben, schliesst sofort auch alle Eigenschaften der Curve in sich, und es kommt bei einer solchen Gleichung nur darauf an, alle diese Eigenschaften daraus herzuleiten. Als vorbereitende Uebung für dergleichen Analysen wollen wir die Haupteigenschaften des Kreises aus einer seiner Gleichungen dergestalt zu entwickeln suchen, dass wir ohne Anschauung desselben und ohne alle geometrischen Hilfsmittel von dieser Curve ein deutliches Bild erhalten. Wir wählen dazu die Gleichung des vorigen §. als die einfachste und bequemste.

§. **408.** 1. Löst man diese Gleichung nach y, als Function von x auf; so erhält man: (m) $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$. Hier

zeigt nun sogleich das von der Radicalgrösse herrührende doppelte Zeichen, dass jedem Werthe von x, für welchen y überhaupt möglich ist, zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von y zukommen; daraus folgt also, dass der Kreis von der Abscissenaxe in zwei symmetrische Theile, welche dergestalt auf einander gelegt werden können, dass sie sich in allen Puncten vollkommen decken, geschnitten wird.

2. Bemerkt man weiters, dass, der zweiten Potenz wegen, x sowohl positiv als negativ genommen werden kann, ohne dass sich der Werth von y ändert (oder dass die nach x aufgelöste Gleichung die Form hat $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$), dass also zu gleichen Abscissen diess- und jenseits der Ordinatenaxe auch gleiche Ordinaten gehören; so folgt, dass auch die Ordinatenaxe diese Curve in zwei symmetrische Theile theilet, folglich der Kreis von den beiden, im Mittelpuncte rechtwinkelig sich schneidenden Axen in vier symmetrische Theile getheilt wird [was auch der Umstand schon zu erkennen gibt, dass die betreffende Gleichung (§. 406) in Bezug auf x und y (§. 109) symmetrisch ist].

3. Um die Durchschnittspuncte der Curve mit den beiden Axen zu finden, muss man, wie schon (§. 394, 2.) bei der Geraden bemerkt wurde, in der Gleichung einmal y und dann x Null setzen, und daraus beziehungsweise x und y bestimmen. Nun wird für $y = 0$, sofort $x = \pm r$, als Abscissen der Durchschnittspuncte der Curve mit der Abscissenaxe, und für $x = 0$ ebenfalls $y = \pm r$, als Ordinaten der Durchschnittspuncte mit der Ordinatenaxe.

4. Die obige Gleichung (m) zeigt ferner, dass für $x = 0$ die Ordinate y ihren grössten Werth ($= r$) erreicht; dass, wie x zunimmt, y abnimmt, und für $x = r$, sofort $y = 0$ wird. Ferner ist daraus ersichtlich, dass für Werthe von $x > r$, y imaginär ausfällt, so wie wieder (aus $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$) für $y > r$, x unmöglich ist. Diess zusammen genommen, führt zu dem Schlusse, dass wenn man durch die in 3. erwähnten Durchschnittspuncte ein Quadrat construirt, dessen Seiten mit den Axen parallel laufen, dieses sofort den Kreis

vollkommen einschliesst, und dieser eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie sei.

5. Die Bemerkung endlich, dass man die fest mit einander verbundenen Coordinatenaxen, welche sich im Mittelpuncte des Kreises schneiden, beliebig um diesen Mittelpunct (in der Kreis-Ebene) herum führen kann, ohne dass dadurch in den erwähnten Schlüssen und Folgerungen das Geringste geändert wird, also die beiden Axen in jeder dieser Lagen von der Curve fortwährend in gleichen Abständen vom Mittelpuncte des Kreises ($=r$) geschnitten werden, führt auf die wesentlichste Eigenschaft des Kreises: dass dessen sämmtliche Puncte vom Mittelpuncte gleich weit abstehen.

Diese aus der Gleichung (§. 406) entwickelten Eigenschaften sind mehr als hinreichend, um sich von dem Kreise ein richtiges Bild zu entwerfen.

Anmerk. Dass diese Gleichung $y^2 = r^2 - x^2 = (r+x)(r-x)$, oder auf die Figur bezogen, $P''M^2 = A''P''.P''D$ zugleich auch einen schon aus den Elementen bekannten Satz des Kreises enthalte, wird man von selbst bemerken.

Aufgaben über den Kreis.

§. **409**. Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch einen bestimmten Punct geht, und mit einem gegebenen Kreis concentrisch ist.

Auflösung. Es seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punctes, und $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ die Gleichung des gegebenen Kreises. Die Gleichung des gesuchten Kreises hat die Form $(x-A)^2+(y-B)^2=R^2$. Zufolge der ersten Bedingung müssen die Werthe $x=x'$, $y=y'$ diese Gleichung befriedigen, und da ferner nach der zweiten Bedingung $A=p$ und $B=q$ wird; so ist auch $(x'-p)^2 + (y'-q)^2=R^2$, und wenn man diesen Werth für R^2 in der Gleichung $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$ substituirt, sofort die gesuchte Gleichung: $(x^2-x'^2)+(y^2-y'^2)-2p(x-x') -2q(y-y')=0$.

Anmerk. Einfacher wird die Auflösung, wenn man den Mittelpunct des gegebenen Kreises zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten

nimmt; denn in diesem Falle erhält man für die gesuchte Gleichung $x^2 - x'^2 + y^2 - y'^2 = 0$.

§. **410.** Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch drei gegebene Puncte geht.

Auflösung. Da man die Lage der rechtwinkeligen Coordinatenaxen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, beliebig wählen kann; so nehmen wir diese zur Vereinfachung der Auflösung so an, dass die Abscissenaxe durch den zweiten und dritten, die Ordinatenaxe aber durch den dritten der gegebenen Puncte geht, dergestalt, dass wenn man die Coordinaten dieser drei Puncte auf ein ganz willkürliches Axensystem bezogen, durch x', y', x'', y'', x''', y''', bezeichnet, dadurch $x''' = 0$, $y''' = 0$ und $y'' = 0$ wird. Die gesuchte Gleichung ist (§. 404) von der Form (1) $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$, und es sind die beiden unbestimmten Grössen p, q so zu bestimmen, dass der Kreis noch durch die beiden Puncte x', y' und x'', y'' geht. Diese beiden Bedingungen geben aber (2) $x'^2 + y'^2 - 2px' - 2qy' = 0$ und (wegen $y'' = 0$) $x''^2 - 2px'' = 0$, aus welchen Gleichungen sofort

$$(3)\ p = \tfrac{1}{2}x'' \quad \text{und} \quad (4)\ q = \frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{2y'},$$

so wie mit diesen Werthen aus (1) die gesuchte Gleichung

$$(\alpha)\ x^2 + y^2 - x''x - \left(\frac{x'^2 + y'^2 - x'x''}{y'}\right)y = 0$$

folgt.

Fig. 30. Construction dieser Gleichung. Seien M', M'', M''' (Fig. 30) die drei gegebenen Puncte, also $M'''X$, $M'''Y$ die rechtwinkeligen Coordinaten-Axen. Da es bloss darauf ankommt, den Mittelpunct des gesuchten Kreises zu finden, dieser aber durch die Coexistenz der Gleichungen (2) und (3), mithin, da jede für sich, wenn man p und q indess als die veränderlichen Coordinaten ansieht, eine gerade Linie bezeichnet, durch den Durchschnitt dieser beiden Geraden entsteht; so haben wir sofort nur diese beiden geraden Linien oder die Gleichungen (2) und (3) zu construiren. — Die Gleichung (3) oder $p = \frac{1}{2}x'' = \frac{1}{2}M'''M''$ ist aber (da p eine Abscisse und q eine Ordinate bezeichnet, §. 394, 7.) die Gleichung einer mit der Ordinatenaxe in dem Abstand $\frac{1}{2}M'''M''$ parallelen Geraden, d. i. der Geraden Nn, wenn $M'''N = NM''$ und nN perpendiculär auf $M'''X$ ist. — Die Gleichung (2), welche sich auch unter der Form $q - \frac{1}{2}y' = -\frac{x'}{y'}(p - \frac{1}{2}x')$ darstellen lässt, ist (§. 399, 2.) die

Gleichung einer Geraden, welche durch den Punct $\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$ (N') geht, und auf der Geraden $y = \frac{y'}{x'} x$ (d. i. auf $M' M'''$) perpendiculär steht, nämlich die Gleichung der Geraden $N' n'$, wenn $M''' N' = N' M'$ und $N' n' \perp M''' M'$ ist.

Für den Durchschnittspunct O dieser beiden Geraden Nn, $N' n'$ muss man (§. 398) die beiden Gleichungen (2) und (3) mit einander verbinden, und daraus p und q, als Coordinaten desselben, bestimmen. Da man aber dadurch die auf eben diesem Wege gefundenen Ausdrücke (3) und (4) erhält, so ist dieser Durchschnittspunct O in der That der gesuchte Mittelpunct des Kreises, und demnach $OM''' = OM'' = OM'$ der Halbmesser desselben.

Anmerk. Man sieht, dass die Construction dieser Gleichung (α) genau zu demselben Verfahren führt, welches in den Elementen der Geometrie in diesem Falle gelehrt wird.

Drittes Capitel.

Ueber die geometrischen Oerter.

§. **411.** Ist RS (Fig. 31) irgend eine gegebene krumme Linie, und zieht man zu beliebigen Puncten M, M', M'', ... derselben die Ordinaten MP, $M'P'$, $M''P''$, ...; so werden dadurch die Werthe von AP, PM, AP', $P'M'$ u. s. w., nämlich, wenn man der Reihe nach die Coordinaten dieser Puncte M, M', ... durch x', y', x'', y'', x''', y''' etc. bezeichnet, die Gleichungen $x' = a$, $y' = b$, $x'' = a'$, $y'' = b'$, $x''' = a''$, $y''' = b''$ u. s. w. bekannt sein. Herrscht nun, selbst wenn man diese Puncte M, M', ... unendlich nahe nimmt, zwischen jedem dieser Gleichungs-Paare, d. i. zwischen der Abscisse x eines jeden Punctes der Curve und der zugehörigen Ordinate y, ein bestimmtes, unveränderliches Gesetz, in welchem Falle die Curve stetig oder continuirlich genannt wird, und bezeichnet man dieses Gesetz durch $y = f(x)$, wo $f(x)$ irgend eine von der Natur der krummen Linie abhängige Function von x ist; so charakterisirt diese Relation $y = f(x)$ alle Puncte der Curve RS auf eine solche Weise, dass sie für die sämmtlichen Sy- Fig. 31.

steme x', y', x'', y'', . ., d. i. für alle Puncte M, M', . ., aber auch nur für die Puncte dieser Curve befriedigt wird. Aus diesem Grunde wird die Relation $y = f(x)$, welche sich auch auf die Form $F(x, y) = 0$ bringen lässt, Gleichung der Curve RS genannt. So haben wir bereits im Vorhergehenden die Gleichung der geraden Linie und des Kreises entstehen sehen und entwickelt. Die in der Gleichung $y = f(x)$ vorkommenden constanten Grössen dienen dazu, die Lage der Curve geometrisch festzusetzen, und werden benützt, um diese letztere gewissen gegebenen Bedingungen zu unterwerfen.

§. **412.** Ist man dagegen umgekehrt durch irgend eine geometrische Untersuchung oder die algebraische Auflösung einer geometrischen Aufgabe auf eine Gleichung zwischen den beiden veränderlichen Grössen x und y gekommen, welche allgemein durch $F(x, y) = 0$, oder auch, wenn man sich diese nach y aufgelöst denkt, durch $y = f(x)$ bezeichnet werden kann; so stellt diese eine stetige Folge von Puncten dar, welche je nach der Natur dieser Gleichung einer geraden oder krummen Linie angehören. Setzt man nämlich für x nach und nach die Werthe a, a', a'', . ., und berechnet aus dieser Gleichung $y = f(x)$ die zugehörigen Werthe von $y = b$, b', b'', . .; so erhält man, wenn in den Puncten P, P', P'', . ., für welche $AP = a$, $AP' = a'$ u. s. w. ist, die Ordinaten PM, $P'M'$, $P''M''$, . . gezogen und beziehungsweise gleich b, b', b'', . . abgeschnitten werden, eben so viele Puncte M, M', M'', . ., welche diese Gleichung $y = f(x)$ befriedigen. Da man dabei die auf einander folgenden Werthe von x unendlich wenig von einander verschieden annehmen kann, so werden auch die Puncte M, M', M'', . . einander unendlich nahe liegen und durch gehörige Verbindung eine continuirliche Curve bilden, in welcher jeder Punct (d. i. dessen Coordinaten) eine Auflösung der Gleichung $y = f(x)$ bildet. Aus diesem Grunde heisst die Curve der geometrische Ort, oder auch schlechtweg der Ort der Gleichung $F(x, y) = 0$ oder $y = f(x)$.

§. 413. Zur Erläuterung mögen folgende **Beispiele** dienen:

1) Um bei Voraussetzung von rechtwinkeligen Coordinaten die Gleichung $y^2 - 3x = 0$ zu construiren, oder mit andern Worten, ihren geometrischen Ort aufzufinden, wird man diese zuvörderst nach y auflösen; dadurch erhält man $y = \pm\sqrt{3x}$. Diese Gleichung zeigt, dass (des doppelten Zeichens wegen) jeder Abscisse x zwei gleiche, entgegengesetzte Ordinaten y zukommen; dass x nicht negativ sein kann, weil sonst y imaginär würde; dass dagegen dafür alle positiven, reellen Werthe von 0 bis ∞, wobei auch y unendlich zunimmt, gesetzt werden können. Daraus folgt, dass sich die gesuchte Curve (Fig. 32) in Gestalt von zwei Aesten, welche ober- und unterhalb der Abscissenaxe symmetrisch liegen, nach der Seite der positiven Abscissen bis ins Unendliche erstreckt. Fig. 32.

Die Gleichung gibt ferner für $x = 0$ auch $y = 0$, zum Beweise, dass die entsprechende Curve durch den Ursprung A der Coordinaten geht. Setzt man ferner successive $x = 1, 2, 3, \ldots$; so findet man nach und nach $y = \pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{6}$, ± 3 u. s. w. Werden demnach die Stücke $AP = 1$, $AP' = 2$, $AP'' = 3$ u. s. w. aufgetragen, in den Puncten $P, P', \ldots$ die Ordinaten gezogen, und so abgeschnitten, dass $PM = PN = \sqrt{3}$, $P'M' = P'N' = \sqrt{6}$, $P''M'' = P''N'' = 3$ u. s. w. wird; so hat man die Puncte $M, M', M'', \ldots$ und $N, N', N'', \ldots$ jener Curve gefunden, welche den Ort der gegebenen Gleichung bildet.

2) Um den Ort der Gleichung $y^2 - x^2 - 4 = 0$ zu finden, hat man, wenn diese nach y aufgelöst wird, $y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$. Daraus folgt wieder unmittelbar, dass jedem Werthe von x zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; ferner, dass, der zweiten Potenz von x wegen, gleichen positiven und negativen Werthen von x ebenfalls gleiche Ordinaten zukommen, so, dass also die der gegebenen Gleichung entsprechende Curve nicht anders als in 4 Aesten fortlaufen kann, von denen zwei und zwei gegen die Coordinatenaxen symmetrisch liegen, und die sich, weil x unendlich zunehmen kann, wobei auch y unendlich wächst, ins Unendliche ausbreiten.

Um diese Curve selbst zu finden, setze man zuerst $x = 0$, wodurch $y = \pm 2$ wird; nimmt man also auf der Ordinatenaxe YY' (Fig. 33) $AB = Ab = 2$, so hat man die beiden ersten Puncte B, b der Curve. Setzt man ferner nach und nach $x = \pm 1$, ± 2, ± 3 u. s. w. (wobei man sich die Linieneinheit 1 so klein denken mag als man will); so erhält man aus der genannten Gleichung beziehungsweise $y = \pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{8}$, $\pm\sqrt{13}$ u. s. w., so, dass, wenn man $AP = Ap = 1$, $AP' = Ap' = 2$ u. s. w. abschneidet, in den Endpuncten $P, P', \ldots, p, p', \ldots$ die Ordinaten errichtet und darauf $PM = PN = pm = pn = \sqrt{5}$, $P'M' = P'N' = p'm' = p'n' = \sqrt{8}$ u. s. w. nimmt, dadurch eben so viele Puncte $M, N, m, n, M', N', m', n'$ u. s. f. der gesuchten Curve als geometrischer Ort der gegebenen Gleichung erhalten werden. Fig. 33.

§. **414.** Der Ort einer Gleichung des ersten Grades zwischen x und y ist eine gerade Linie. Denn jede solche Gleichung ist von der Form $y = Ax + B$, welche mit jener der geraden Linie (§. 392) $y = ax + b$ verglichen, $A = a = tang\,\alpha$ und $B = b$ gibt. Man darf also nur, um
Fig. 34. diese Gerade zu finden, auf der Ordinatenaxe YY' (Fig. 34) $AB = B$ abschneiden, durch B mit der Abscissenaxe $X'X$ eine Parallele BE ziehen, darauf $BF = 1$ abschneiden, in F das Perpendikel $FG = A$ errichten, und endlich durch B und G die gesuchte Gerade $CBGD$ ziehen; denn es ist dieser Construction zufolge $tang\,GBF = \frac{GF}{BF} = \frac{A}{1} = A$, also in der That die Gleichung der Geraden CD: $y = Ax + B$. Da indess die Lage einer Geraden durch 2 Puncte bestimmt ist, so ist es bequemer, die Durchschnittspuncte der gesuchten Geraden mit den beiden Coordinatenaxen zu bestimmen, oder im Falle die Gerade durch den Ursprung geht, also (§. 394, 3.) die Gleichung die Form $y = Ax$ hat, für x einen beliebigen Werth, z. B. $x = 1$ anzunehmen, im betreffenden Puncte der Abscissenaxe die Ordinate $y = A$ zu errichten, und durch den Endpunct derselben und den Ursprung die gesuchte Gerade zu ziehen.

1. Um z. B. den geometrischen Ort der Gleichung $3y - 2x - 6 = 0$ zu finden, hat man daraus: $y = \frac{2}{3}x + 2$. Aus dieser Gleichung folgt für $x = 0$: $y = 2$, und für $y = 0$: $x = -3$; schneidet man daher auf
Fig. 34. der Ordinatenaxe (Fig. 34) $AB = 2$, auf der Abscissenaxe (da x negativ ist) $AC = 3$ ab, und zieht durch C und B die Gerade CBD; so ist diese der Ort der gegebenen Gleichung.

2. Für die Gleichung $2y - 3x + 5 = 0$ ist $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, mithin für $x = 0$: $y = -\frac{5}{2}$, für $y = 0$: $x = \frac{5}{3}$. Schneidet man daher (da y negativ ist) $AB' = \frac{5}{2}$, $AC' = \frac{5}{3}$ ab, und verbindet die Puncte B', C' durch die Gerade $D'B'C'$; so ist diese der Ort der gegebenen Gleichung.

3. Um den geometrischen Ort der Gleichung $y = 2x$ zu finden, der sofort eine durch den Ursprung gehende Gerade ist, setze man $x = 1$; so wird $y = 2$, und wenn man durch diesen Punct $x = 1$, $y = 2$ und den Ursprung eine Gerade zieht, sofort dieser Ort gefunden.

4. Die Gleichung $2y - 3 = 0$, in welcher x gar nicht vorkommt, und aus welcher $y = \frac{3}{2}$ folgt, stellt (§. 394, 5.) eine mit der Abscissenaxe in dem Abstand $\frac{3}{2}$ parallele Gerade vor, die also sehr leicht zu construiren ist.

5. Um endlich noch den Ort der Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$, in welcher bloss x vorkommt, zu finden, hat man daraus $x = -1 \pm 2$, d. i. $x = 1$ und -3. Diese Gleichung repräsentirt also (§. 394, 7.) ein System zweier, in den Abständen $+1$ und -3 mit der Ordinatenaxe parallelen Geraden, die ebenfalls leicht zu construiren sind.

§. **415.** So wie wir für die allgemeine Gleichung des Kreises (auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen) (§. 402)

$$(\alpha) \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \text{ oder}$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

gefunden haben, so ist auch umgekehrt der geometrische Ort einer jeden Gleichung des 2. Grades zwischen x und y, in welcher x^2 und y^2 gleiche Coefficienten besitzen und das Glied in xy fehlt, ein Kreis (d. i. dessen Umfang). Denn da sich unter dieser Voraussetzung jede solche Gleichung auf die Form (n) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ bringen lässt, so ist, diese mit der Gleichung (1) verglichen, $p = -\frac{1}{2}A$, $q = -\frac{1}{2}B$ und $r = \sqrt{\frac{1}{4}(A^2 + B^2) - C}$. Construirt man daher den Punct C (Fig. 35) aus den recht- Fig. 35.
winkeligen Coordinaten $p = -\frac{1}{2}A$, $q = -\frac{1}{2}B$, und beschreibt aus diesem mit dem eben bestimmten Halbmesser einen Kreis; so ist dessen Gleichung nach (α):

$$(x + \tfrac{1}{2}A)^2 + (y + \tfrac{1}{2}B)^2 = \tfrac{1}{4}(A^2 + B^2) - C,$$

oder entwickelt: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, zum Beweis, dass dieser Kreis in der That der Ort der gegebenen Gleichung sei.

Anmerk. Die reellen Grössen A, B, C können übrigens auch so beschaffen sein, dass $\frac{1}{4}(A^2 + B^2) - C =$ oder < 0 wird; im ersten Falle reducirt sich der Kreis, wegen $r = 0$, auf seinen Mittelpunct, und im zweiten Falle, in welchem r imaginär ausfällt, hat die gegebene Gleichung keinen geometrischen Ort, also auch keine geometrische Bedeutung.

1. Um z. B. die Gleichung $2x^2 + 2y^2 - 5x + 6y - 3 = 0$ zu construiren oder ihren geometrischen Ort zu finden, hat man daraus: (c) $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 3y - \frac{3}{2} = 0$, also $A = -\frac{5}{2}$, $B = 3$ und $C = -\frac{3}{2}$; demnach $p = \frac{5}{4}$; $q = -\frac{3}{2}$ und $r = \frac{1}{4}\sqrt{85}$. Unmittelbar, ohne die Zwischenwerthe von A, B und C, erhält man auch p, q, r, wenn man die Gleichung (c) auf die Form von jener (α) bringt, indem man beiderseits die Quadrate der halben Coefficienten von x und y addirt.

Man erhält dadurch: $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} + \frac{9}{4}$, d. i. $(x - \frac{5}{4})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{85}{16}$, woraus durch Vergleichung mit der Gleichung (α) für p, q, r ebenfalls wieder die angegebenen Werthe folgen. — Man construirt demnach mit den Coordinaten $AB = p = \frac{5}{4}$
Fig. 35. (Fig. 35) und $BC = q = -\frac{3}{2}$ den Punct C, und beschreibt aus diesem mit dem Halbmesser $CM = \frac{1}{4}\sqrt{85}$ einen Kreis; so ist dieser der Ort der gegebenen Gleichung.

2. Um eben so den Ort der Gleichung $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ zu finden, hat man [durch unmittelbare Vergleichung mit der Gleichung (1)] $p = -4$, $q = -3$, $p^2 + q^2 - r^2 = 0$, also

$$r = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Fig. 36. Nachdem man also (Fig. 36) mit den Coordinaten $AB = p = -4$ und $BC = q = -3$ den Mittelpunct C construirt hat, wird man aus diesem mit dem Halbmesser $CA = 5$ den Kreis beschreiben, welcher, da aus der gegebenen Gleichung für $x = 0$ auch $y = 0$ folgt (§ 404), zugleich durch den Ursprung geht (also die Bestimmung von r im Grunde überflüssig macht). [II., 78]

§. **416.** Um noch in Kürze zu zeigen, welchen Nutzen die geometrischen Oerter bei Auflösung von sowohl unbestimmten als bestimmten Aufgaben gewähren, nehmen wir zuerst an, es handle sich bei einer unbestimmten Aufgabe um die Bestimmung eines Punctes, welcher in der Ebene der betreffenden Figur selbst liegt und in Bezug auf diese letztere gewisse Eigenschaften besitzen soll. Bezieht man Alles auf 2 Coordinatenaxen, und bezeichnet die Coordinaten des gesuchten Punctes durch x, y; so erhält man, durch Anwendung der bisher vorgetragenen Lehren der analytischen Geometrie, zuletzt eine gewisse Relation $F(x, y) = 0$ oder $y = f(x)$ zwischen diesen Coordinaten und den gegebenen Grössen, d. i. die Gleichung der gegebenen Aufgabe. Construirt man daher, den eben vorgetragenen Grundsätzen gemäss, den geometrischen Ort dieser Gleichung, so stellen die Coordinaten eines jeden Punctes dieses Ortes alle Systeme der Werthe von x, y geometrisch dar, oder es leisten alle Puncte dieses Ortes der gegebenen Aufgabe Genüge.

§. **417.** Ist man bei der Auflösung einer bestimmten geometrischen Aufgabe mit zwei Unbekannten auf die Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $F'(x, y) = 0$ gekommen, wo

x und y die Coordinaten der gesuchten Puncte bezeichnen; so kann man aus diesen Gleichungen nach und nach x und y eliminiren, d. h. (§. 215, ff.) alle Paare zusammengehöriger Werthe von x und y bestimmen, und diese, wenn sie hiezu geeignet sind, nach den im ersten Capitel dieses Abschnittes vorgetragenen Regeln construiren. — Einfacher jedoch kann man diese Puncte oder Auflösungen der beiden angeführten Gleichungen, ohne daraus die erwähnte Elimination, die in den allermeisten Fällen (s. z. B. §. 379) auf sehr zusammengesetzte Ausdrücke führt, erst vorzunehmen, auf folgende Art erhalten: die Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $F'(x, y) = 0$ stellen jede für sich irgend eine Linie dar. Sucht man daher die geometrischen Oerter $BMM'C$ und $DMM'E$ (Fig. 37) dieser Gleichungen, so geben ihre Fig. 37.
Durchschnittspuncte M, M'... die gesuchten Puncte, welche der Aufgabe entsprechen; denn die Coordinaten dieser Puncte bilden offenbar jene Systeme der Werthe von x und y, welche beide Gleichungen $F(x, y) = 0$, $F'(x, y) = 0$ zu gleicher Zeit befriedigen.

§. **418.** Nehmen wir als Beispiel hiezu das auf zweifache Art aufgelöste Problem des §. 379, für welches wir nach der 1. Auflösung die beiden Gleichungen (1) $(x - b)^2 + (y - c)^2 = r^2$ und (2) $a(x^2 + y^2) = p^2(a + 2x - 2b)$ erhalten haben. Anstatt nun, wie dort, aus diesen beiden Gleichungen x oder y zu eliminiren, und dann die Systeme ihrer Auflösungen, d. i. die Coordinaten der gesuchten Puncte DD' (Fig. 22 oder 23) zu erhalten, wodurch man, Fig. 22 oder 23.
wie wir (aus der Finalgleichung nach x) gesehen haben, auf sehr zusammengesetzte Endgleichungen kommt, suchen wir vielmehr die geometrischen Oerter dieser Gleichungen (1) und (2). — Es ist aber der Ort der Gleichung (1) der gegebene Kreis C selbst, weil die Coordinaten seines Mittelpunctes durch b, c und dessen Halbmesser durch r bezeichnet worden ist. Was ferner den Ort der Gleichung (2), die sich auch in der Form $\left(x - \frac{p^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{p^4}{a^2} + p^2 - \frac{2bp^2}{a}$ darstellen lässt, betrifft; so ist dieser (§. 402, Gl. α) eben-

falls ein Kreis, dessen Mittelpunct (wegen $q = 0$) in einem
Fig. 23. Punct G (Fig. 23) der Geraden AB (als Abscissenaxe) liegt, für welchen (auf A als Anfangspunct bezogen) $AG = \frac{p^2}{a}$ ist, und dessen Halbmesser den Werth $R = \sqrt{\frac{p^4}{a^2} - \frac{2bp^2}{a} + p^2}$ hat. Da aber aus dem rechtw. Dreiecke ACI, $AI^2 = AC^2 - CI^2$, oder nach der dort eingeführten Bezeichnung: $p^2 = b^2 + c^2 - r^2$ folgt; so ist auch $R = \sqrt{\left(b - \frac{p^2}{a}\right)^2 + c^2 - r^2}$, oder wegen $b - \frac{p^2}{a} = AF - AG = GF$, also $\left(b - \frac{p^2}{a}\right)^2 + c^2 = GF^2 + FC^2 = GC^2$, auch $R = \sqrt{GC^2 - r^2}$. Führt man demnach aus dem Puncte G an den gegebenen Kreis die Tangenten GD, GD'; so ist aus den rechtwinkeligen Dreiecken GDC und $GD'C$ sofort $GC^2 - r^2 = GD^2$ und GD'^2, folglich auch $R = \sqrt{GD^2}$ und $\sqrt{GD'^2}$, d. i. endlich $R = GD = GD'$. Man erhält also auf diese Weise durch die Berührungspuncte D, D' dieser beiden Tangenten GD, GD' nicht bloss den Halbmesser $GD = GD'$ dieses 2. Kreises, sondern zugleich auch die Durchschnittspuncte der beiden Kreise, d. i. die gesuchten Puncte der Aufgabe.

Anmerk. Es ist bemerkenswerth, dass die 1. Auflösung dieser Aufgabe (§. 379), mit Benützung der Eigenschaften der geometrischen Oerter, genau auf dieselbe einfache Construction führt, welche wir durch die 2. Auflösung (§. 380) dieser Aufgabe erhalten haben.

Viertes Capitel.

Von einigen Verbindungen der geraden Linien unter einander und mit dem Kreise. Auflösung einiger bestimmten und unbestimmten Aufgaben.

Dreiecke.

§. **419.** Um eine weitere Anwendung der bereits entwickelten Principien der analytischen Geometrie zu zeigen, und zugleich den Grund zu allen ähnlichen Untersuchungen zu legen, wollen wir zuerst einige bekannte Sätze des geradlinigen Dreieckes entwickeln.

§. **420.** Lehrsatz. Die aus den 3 Winkelpuncten eines Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel schneiden sich in einem und demselben Puncte.

Beweis. Denn es sei ABC (Fig. 38) ein geradliniges Dreieck, in welchem die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten beziehungsweise durch a, b, c bezeichnet werden sollen. Eine dieser Seiten, z. B. jene $AB = c$, nehme man zur Abscissenaxe, und den Scheitel A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; so sind, wenn α, β die Coordinaten des Punctes C bezeichnen, die Gleichungen der 3 Seiten AB, AC, BC, nach §. 394 — 396 (die erste ist die Abscissenaxe, die zweite geht durch die beiden Puncte $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $x'' = 0$, $y'' = 0$, und die letzte durch jene $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $x'' = c$, $y'' = 0$) beziehungsweise: $y = 0$, $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ und $y = \frac{\beta}{\alpha - c}(x - c)$. Die Gleichungen der 3 Perpendikel CC', BB', AA' sind, nach §. 400, 2) (das erste ist eine mit der Ordinatenaxe in dem Abstand α parallele, das 2. eine durch den Punct $x' = c$, $y' = 0$ gehende, auf AC perpendiculäre, das 3. endlich eine durch den Ursprung gehende, auf BC perpendiculäre Gerade), beziehungsweise: Fig. 38

(1) $x = \alpha$, (2) $y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - c)$ und (3) $y = -\frac{\alpha - c}{\beta}x$. Durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) erhält man für die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Geraden CC' und BB': $x = \alpha$, $y = -\frac{\alpha}{\beta}(\alpha - c)$. Genau dasselbe Resultat erhält man auch aus den Verbindungen von (1) mit (3) und (2) mit (3) für die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Geraden CC' mit AA' und BB' mit AA', woraus sofort folgt, dass diese 3 Durchschnittspuncte in der That nur einen einzigen Punct ausmachen.

§. 421. Lehrsatz. Die in den drei Halbirungspuncten der Seiten eines Dreieckes auf diese letztern errichteten Perpendikel schneiden sich in einem einzigen Puncte.

Fig. 39. Beweis. Ist die Lage des Dreieckes ABC (Fig. 39) gegen die Coordinatenaxen wie vorhin, und sind wieder $AB = c$ und α, β die Coordinaten des Punctes C; so hat man, wenn D, E, F die Halbirungspuncte der Seiten AB, BC, AC sind, für die Coordinaten dieser Puncte der Reihe nach: $x = \frac{c}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{c + \alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$ und $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$. Ferner sind (§. 420) $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ und $y = \frac{\beta}{\alpha - c}(x - c)$ die Gleichungen der Geraden AC und BC; folglich hat man endlich für die Gleichungen der in D, E, F auf die Seiten AB, BC, AC errichteten Perpendikel Dd, Ee, Ff (Dd läuft mit AY in dem Abstand $\frac{1}{2}c$ parallel, Ee geht durch E und steht auf BC perpendiculär, Ff geht durch F und ist perpendiculär auf AC) beziehungsweise: (1) $x = \frac{c}{2}$, (2) $y - \frac{\beta}{2} = -\frac{(\alpha - c)}{\beta}\left(x - \frac{c + \alpha}{2}\right)$ und (3) $y - \frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$. Es geben aber die Verbindungen der Gleichungen (1), (2), (1), (3) und (2), (3) für die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Perpendikel Dd, Ee, Dd, Ff und Ee, Ff immer dieselben Werthe, nämlich $x = \frac{c}{2}$ und $y = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha - c}{2}\right)$, woraus wieder folgt, dass diese 3 Durchschnittspuncte zu-

sammenfallen, und nur einen einzigen Punct O ausmachen.

§. **422**. Lehrsatz. Die drei Geraden, welche die Halbirungspuncte der Seiten eines Dreieckes mit den gegenüberliegenden Scheiteln desselben verbinden, schneiden sich in einem und demselben Puncte.

Beweis. Denn bleibt die Lage und Bezeichnung des Dreieckes ABC (Fig. 39) wie in den beiden vorigen Sätzen, Fig. 39.
und sind AE, BF, CD diese drei Halbirungslinien; so sind die Gleichungen derselben, da wir die Coordinaten der Halbirungspuncte D, E, F bereits im vorigen Satze angegeben haben (AE ist eine durch die Puncte $x' = 0$, $y' = 0$ und $x'' = \frac{1}{2}(c + \alpha)$, $y'' = \frac{1}{2}\beta$ gehende, BF eine durch $x' = c$, $y' = 0$ und $x'' = \frac{1}{2}\alpha$, $y'' = \frac{1}{2}\beta$ gehende, so wie endlich CD eine durch die Puncte $x' = \frac{1}{2}c$, $y' = 0$ und $x'' = \alpha$, $y'' = \beta$ gehende Gerade), beziehungsweise:

$$y = \frac{\beta}{\alpha + c}x,\ y = \frac{\beta}{\alpha - 2c}(x - c) \text{ und } y = \frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{2}c}(x - \tfrac{1}{2}c).$$

Werden diese drei Gleichungen wieder zu zwei und zwei mit einander verbunden, so erhält man aus je zweien für die Coordinaten der betreffenden Durchschnittspuncte immer die nämlichen Resultate, und zwar $x = \frac{1}{3}(c + \alpha)$, $y = \frac{1}{3}\beta$; wodurch sofort der behauptete Satz erwiesen ist.

§. **423**. Lehrsatz. Werden die 3 in den drei letzten §§. erwähnten Puncte wirklich construirt, so liegen diese in einer geraden Linie.

Beweis. Sind O, O', O'' diese drei Puncte und x', y', x'', y'', x''', y''' ihre Coordinaten, so liegen (§. 397) diese Puncte in einer geraden Linie, wenn $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{y' - y'''}{x' - x'''}$ ist. Nun findet man in der That, wenn aus §§. 420, 421, 422 die Werthe der Coordinaten substituirt werden, dass diese beiden Quotienten einander gleich sind und den Werth haben: $\dfrac{\beta + \frac{3\alpha}{\beta}(\alpha - c)}{c - 2\alpha}$; woraus die Richtigkeit dieses Satzes erhellet.

Anmerk. Sucht man allgemein die Bedingung, unter welcher sich überhaupt die drei aus den Scheitelpuncten A, B, C (Fig. 38) eines Dreieckes A, B, C gezogenen geraden Linien AA', BB', CC' in einem einzigen Puncte O schneiden, so findet man [II., 90], dass dieses Statt findet, wenn die Relation besteht: $AC'.BA'.CB' = AB'.CA'.BC'$.

Fig. 38.

Kreise.

§. **424**. Um die Bedingungen aufzufinden, unter welchen sich zwei Kreise durchschneiden oder berühren, so seien C, C' (Fig. 40) die Mittelpuncte zweier Kreise von den Halbmessern r, r'. Nimmt man die Centrilinie CC' zur Abscissenaxe, C zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, und setzt $CC' = d$; so ist die Gleichung des Kreises C (§. 406) (1) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, und die des Kreises C', für welchen also $p = d$, $q = 0$ die Coordinaten des Mittelpunctes sind (§. 402), (2) $x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - r'^2 = 0$.

Fig. 40.

Nimmt man nun an, dass sich beide Kreise durchschneiden, so wird man zur Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspuncte die beiden Gleichungen (1) und (2) mit einander verbinden, und daraus x und y bestimmen. Zieht man zu dem Ende die Gleichung (2) von jener (1) ab, und bestimmt aus der entstehenden Gleichung x; so wird

$$(\alpha)\quad x = \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d},$$

und wenn dieser Werth in (1) substituirt wird:

$$(\beta)\quad y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{4r^2d^2 - (d^2 + r^2 - r'^2)^2}.$$

§. **425**. Aus diesen beiden Gleichungen (α) und (β) folgt, dass in allen Fällen, in welchen y reell ausfällt, die beiden Kreise einander in zwei Puncten M, M' durchschneiden, für welche die Abscissen (CP) einerlei, die Ordinaten (PM, PM') aber gleiche und entgegengesetzte Werthe besitzen: es steht also dabei die Centrilinie CC' auf der gemeinschaftlichen Sehne MM' perpendiculär und halbirt dieselbe. — Um aber die Bedingungen zu finden, unter welchen y reell oder imaginär ausfällt, stellen wir y, durch Zerlegung der Wurzelgrösse in (β), auf folgende Weise dar:

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(r + r' + d)(r + r' - d)(r + d - r')(r' + d - r)};$$

und in dieser Form erkennt man (da die Radicalgrösse der bekannte, bei der Dreiecksfläche (§. 65) vorkommende symmetrische Ausdruck ist) sogleich, dass y nur dann reell ausfällt, wenn sich aus den drei Linien r, r', d ein Dreieck construiren lässt: die beiden Kreise durchschneiden sich also, wenn von den drei Grössen r, r', d immer jede kleiner als die Summe der beiden übrigen ist.

§. **426.** Sollen sich aber die beiden Kreise berühren, so müssen die Puncte M, M' in einen zusammenfallen, also müssen sich auch die beiden Werthe von y auf einen reduciren, was aber nur für $y = 0$ möglich ist. Dieses letztere findet ferner nur Statt, wenn (wie unmittelbar aus dem letzten Ausdruck von y folgt) eine der Gleichungen $d = r + r'$, $d = r' - r$, $d = r - r'$, oder diese in eine vereiniget, wenn (γ) $d^2 = (r \pm r')^2$ besteht: zwei Kreise berühren sich also, wenn der Abstand ihrer Mittelpuncte entweder der Summe oder Differenz ihrer Halbmesser gleich ist (im ersten Falle findet eine äussere, im letztern eine innere Berührung Statt).

§. **427.** Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch zwei gegebene Puncte geht, und einen der Grösse und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Seien x', y', x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Puncte, p', q' die Coordinaten des Mittelpunctes und r' der Halbmesser des gegebenen Kreises, so wie p, q, r dieselben Grössen für den gesuchten Kreis; so ist die Gleichung dieses letztern (§. 402): (α) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$; wobei p, q und r noch unbestimmt sind. Die beiden ersten Bedingungen geben aber die Gleichung (1) $(x' - p)^2 + (y' - q)^2 = r^2$ und (2) $(x'' - p)^2 + (y'' - q)^2 = r^2$, so wie, wenn man den Abstand der Mittelpuncte beider Kreise durch d bezeichnet, wodurch (§. 390) $d^2 = (p - p')^2 + (q - q')^2$ wird, die dritte Bedingung nach der Relation (γ) des vorigen §. sofort die Gleichung gibt: (3) $(p - p')^2 + (q - q')^2 = (r \pm r')^2$; und

aus diesen drei Gleichungen lassen sich sofort die drei Grössen p, q, r bestimmen, und in die gesuchte Gleichung (α) substituiren.



Anmerk. Einfacher wird die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man die rechtwinkeligen Coordinatenaxen so wählt, dass z. B. der Punct x', y' der Ursprung wird, und die Abscissenaxe noch überdiess durch den Punct x'', y'' geht. Dadurch wird $x'=0$, $y'=0$, $y''=0$, und die beiden Gleichungen (1) und (2) reduciren sich auf die weit einfacheren: $p^2+q^2=r^2$ und $(x''-p)^2+q^2=r^2$.

§. **428**. Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch einen bestimmten Punct geht und zwei der Grösse und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Auflösung. Sind x', y' die Coordinaten des gegebenen Punctes, p', q', r', p'', q'', r'' und p, q, r der Reihe nach die Coordinaten der Mittelpuncte und die Halbmesser der beiden gegebenen und des gesuchten Kreises; so hat man wieder ganz einfach zur Bestimmung von p, q, r die drei Gleichungen: $(x'-p)^2+(y'-q)^2=r^2$, $(p-p')^2+(q-q')^2=(r\pm r')^2$ und $(p-p'')^2+(q-q'')^2=(r\pm r'')^2$, welche Werthe man dann nur in der Gleichung $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ substituiren darf, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Anmerk. Zur Vereinfachung kann man die Centrilinie zur Abscissenaxe und den Mittelpunct des ersten Kreises (p', q') zum Ursprung der Coordinaten nehmen; dadurch werden p', q' und q'' Null.

§. **429**. Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Auflösung. Sind wieder p, q, r die Coordinaten des Mittelpunctes und der Halbmesser des gesuchten Kreises, und werden dieselben Grössen für die drei gegebenen Kreise durch die nämlichen Buchstaben, aber der Reihe nach mit 1, 2, 3 Accente bezeichnet; so hat man ganz einfach zur Bestimmung der Werthe von p, q, r, mit welchen dann auch die gesuchte Gleichung $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ gefunden ist, die Gleichungen: $(p-p')^2+(q-q')^2=(r\pm r')^2$, $(p-p'')^2+(q-q'')^2=(r\pm r'')^2$, $(p-p''')^2+(q-q''')^2=(r\pm r''')^2$.

Anmerk. Auch hier kann man die Lage der rechtwinkeligen Axen so wählen, dass z. B. $p'''=0$, $q'''=0$ und $q''=0$ wird.

Tangenten.

§. **430**. Um eine ganz allgemeine, auf alle Curven anwendbare Definition der Tangente zu erhalten, nehme man an, die Secante MN (Fig. 41) drehe sich um den festen Punct M gegen MN' hin, und falle endlich mit dieser Geraden zusammen; so wird dadurch ein Anfangs von M gegen die Linke (oder nach abwärts) gelegener Durchschnittspunct m gegen M so fortrücken, dass er zuletzt gegen die Rechte hin (oder nach aufwärts) nach m' zu liegen kommt. In jener Lage der Secante MN nun, in welcher der Punct m mit jenem M zusammenfällt, was bei diesem Uebergange von m nach m' nothwendig Statt haben muss, nennt man diese Gerade MT Tangente der Curve RS im Puncte M: es ist also die Tangente als eine Secante zu betrachten, deren beide Durchschnittspuncte in einen, nämlich dem Berührungspunct zusammenfallen. Fig. 41.

Anmerk. Es ist nicht nöthig, dass der feste Punct M, um welchen man sich die Drehung der Secante vorstellt, zugleich auch der Berührungspunct selbst sei; er kann vielmehr irgendwo ausserhalb der Curve liegen. Auch kann sich die Secante mit sich selbst parallel fortbewegen (oder der Drehungspunct unendlich weit liegen), um zur Tangente zu werden. So folgt z. B. aus der in §. 413, Beisp. 1, behandelten Gleichung $y^2 = 3x$ oder $y = \pm \sqrt{3x}$, dass jede mit der Ordinatenaxe YY' (Fig. 32) parallele, gegen die positiven x zu liegende Gerade, die Curve in zwei Puncten schneidet, also eine Secante sei. Bewegt sich aber diese Secante, stets mit YY' parallel bleibend, gegen diese Axe, wodurch x fortwährend abnimmt; so rücken die betreffenden Durchschnittspuncte $M''N''$ einander immer näher, und fallen endlich für $x = 0$, wofür $y = \pm 0$ wird und die Secante auf die Axe YY' fällt, im Ursprunge A zusammen, wodurch also diese Secante zur Tangente YY' im Puncte A wird. Fig. 32.

§. **431**. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve, $y = ax + b$ jene der Secante (beide auf dieselben Coordinatenaxen bezogen); so findet man die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der Curve, indem man diese beiden Gleichungen mit einander verbindet, und daraus die Werthe von x und y bestimmt. Drückt man ferner die Bedingung aus, dass diese Durchschnittspuncte in einen, und zwar mit dem Berührungspunct zusammenfallen sollen; so hat man

die Bedingungsgleichung für die Tangente selbst. Dabei kann noch verlangt werden, dass die Tangente durch einen ausserhalb oder in der Curve selbst liegenden Punct gehen soll. Wir wollen dieses zunächst auf den Kreis anwenden.

§. **432**. Um die Bedingung aufzufinden, unter welcher eine durch einen gegebenen Punct gehende Secante des Kreises zur Tangente wird, beziehen wir den Kreis auf rechtw. Coordinatenaxen, die sich im Mittelpuncte desselben schneiden, und dessen Gleichung also ist: (1) $x^2 + y^2 = r^2$. Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des gegebenen Punctes durch x', y'; so ist die Gleichung der Secante (§. 395) (2) $y - y' = a(x - x')$. Zur Verbindung dieser beiden Gleichungen (um die Coordinaten der Durchschnittspuncte zu erhalten) folgt aus (2), wenn man auch gleich quadrirt:

$$y^2 = a^2(x - x')^2 + y'^2 + 2ay'(x - x');$$

dieser Werth, in (1) substituirt, gibt:

$$(m)\quad (1 + a^2)x^2 - 2a(ax' - y')x = r^2 - a^2x'^2 - y'^2 + 2ax'y',$$

und wenn man diese Gleichung nach x auflöst:

$$(3)\quad x = \frac{a(ax' - y') \pm \sqrt{a^2(r^2 - x'^2) + 2ax'y' + r^2 - y'^2}}{1 + a^2}.$$

Anmerk. Dieser doppelte Werth von x, welcher in der Gleichung (2) auch zwei Werthe von y erzeugt, beweist, dass der Kreis von einer geraden Linie in zwei, aber auch nur in zwei Puncten geschnitten werden könne.

§. **433**. Gibt man der trigon. Tangente a nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man eine ganze Reihe von auf einander folgenden Secanten; soll aber eine davon Tangente werden, so muss der im §. 431 gegebenen Erklärung gemäss, a einen solchen Werth erhalten, dass beide Wurzeln x der Gleichung (3) einander gleich werden. Dazu muss man aber die Radicalgrösse dieser Gleichung, von welcher diese zwei ungleichen Werthe von x herrühren, Null setzen, und aus der dadurch gebildeten Bedingungsgleichung a bestimmen. Diess Alles ausgeführt, erhält man:

$$(4)\quad a = \frac{-x'y' \pm r\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2}.$$

Werden diese beiden Werthe für a in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man die Gleichungen der beiden durch x', y' gehenden Tangenten. Werden diese Werthe dagegen in der Gleichung (3), in welcher nun die Wurzelgrösse verschwindet, gesetzt, so erhält man die Abscissen, und damit aus (2) die Ordinaten der Berührungspuncte. (Wir finden diese Coordinaten weiter unten auf eine einfachere Weise.)

Anmerk. 1. Der doppelte Werth von a in (4) gibt zu erkennen, dass durch einen gegebenen Punct x', y' im Allgemeinen zwei Tangenten gezogen werden können; sie sind beide möglich, wenn $x'^2 + y'^2 > r^2$, d. i. der Punct x', y' ausserhalb des Kreises liegt. Für $x'^2 + y'^2 = r^2$, in welchem Falle x', y' ein Punct des Kreises selbst ist, verschwindet in (4) die Wurzelgrösse, und es reduciren sich beide Werthe von a auf einen, oder es ist durch diesen Punct x', y', welcher zugleich [da man aus (3) und (2) $x = x'$, $y = y'$ erhält] der Berührungspunct ist, nur eine Tangente möglich.

Anmerk. 2. Die Bedingungsgleichung (4) findet man noch einfacher unmittelbar aus der Gleichung (m), ohne diese erst nach x aufzulösen, wenn man bemerkt, dass in der allgemeinen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die beiden Wurzeln x nur dann einander gleich sind, wenn die Bedingung besteht:

$$(\alpha) \quad b^2 - 4ac = 0.$$

§. 434. Um das Problem der Tangenten noch in der Voraussetzung aufzulösen, dass der Berührungspunct gegeben ist, seien x', y', x'', y'' zwei Puncte des Kreises, von denen der erstere der Berührungspunct der Tangente werden soll; so ist die Gleichung der die beiden Puncte verbindenden Geraden: (1) $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$. Wird diese Gleichung mit den beiden folgenden (2) $x'^2 + y'^2 = r^2$ und (3) $x''^2 + y''^2 = r^2$, welche eben ausdrücken, dass die beiden Puncte dem Kreise angehören, verbunden; so erhält man ein System von Gleichungen für die durch die beiden genannten Puncte gehenden Secante. Die Gleichung (3), von jener (2) subtrahirt, gibt die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''},$$

welche eine der drei vorigen, z. B. jene (3) ersetzen kann. Wird sonach diese Gleichung (4) mit jener (1) verbunden,

so erhält man eigentlich für die in Rede stehende Secante das System der beiden Gleichungen:

$$y - y' = -\frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x')$$

und $x'^2 + y'^2 = r^2$. — Soll nun aber diese Secante im Puncte x', y' zur Tangente werden, so darf man nur (damit der zweite Punct x'', y'' mit jenem x', y' zusammenfällt) $x'' = x'$ und $y'' = y'$ setzen; man erhält dadurch aus den vorigen Gleichungen für die Gleichungen der Tangente:

(5) $y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$ und (6) $x'^2 + y'^2 = r^2$,

von denen jedoch die letztere, welche sofort ausdrückt, dass (was sich von selbst versteht) der Berührungspunct x', y' ein Punct des Kreises ist, nicht besonders aufgestellt, sondern immer stillschweigend verstanden wird; die Gleichung (5) ist demnach die Gleichung der Tangente, wobei x', y' die Coordinaten des Berührungspunctes sind. Zugleich nimmt diese Gleichung (5), mit Rücksicht auf jene (6), auch die bemerkenswerthe Form an: (7) $xx' + yy' = r^2$.

§. **435.** Soll die Tangente durch einen ausserhalb des Kreises liegenden Punct x'', y'' geführt, also der Berührungspunct x', y' gefunden werden, so muss man aus den [aus (6) und (7) folgenden] beiden Gleichungen $x'^2 + y'^2 = r^2$ und $x''x' + y''y' = r^2$ die Coordinaten x', y' bestimmen. Man erhält daraus ganz einfach:

$$x' = \frac{r^2 x'' \pm r y'' \sqrt{x''^2 + y''^2 - r^2}}{x''^2 + y''^2} \text{ und } y' = \frac{r^2 y'' \mp r x'' \sqrt{x''^2 + y''^2 - r^2}}{x''^2 + y''^2}.$$

Um den Punct x', y' geometrisch zu finden, dürfte man nur diese eben gefundenen Ausdrücke construiren. Weit einfacher jedoch wird dieser Berührungspunct gefunden, wenn man von den geometrischen Oertern Gebrauch macht. Die beiden Gleichungen nämlich, aus welchen die vorigen Werthe von x' und y' bestimmt wurden, sind (1) $y'y'' + x'x'' = r^2$ und (2) $y'^2 + x'^2 = r^2$; die erstere von der letzteren abgezogen, gibt auch (3) $y'^2 - y'y'' + x'^2 - x'x'' = 0$, welche Gleichung eine der beiden vorigen, z. B. jene (1), ersetzen kann. So wie aber durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) die vorigen Werthe x', y' gefunden wurden, so erhält man auch durch die Durchschnitte der beiden den Gleichungen (1) und (2) entsprechenden Oerter (§. 417) die gesuchten Berührungspuncte x', y'. Nun ist aber der Ort der Gleichung (2) ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunct im Ursprung liegt, also der gegebene Kreis

selbst. Der Ort der Gleichung (3), die wir statt jener (1) nehmen, und die sich auch unter der Form $(y'-\frac{1}{2}y'')^2+(x'-\frac{1}{2}x'')^2=\frac{1}{4}(y''^2+x''^2)$ darstellen lässt, ist (§. 402) ebenfalls ein Kreis, für welchen $p=\frac{1}{2}x''$, $q=\frac{1}{2}y''$ und $r'=\frac{1}{2}\sqrt{x''^2+y''^2}$ ist.

Ist also A (Fig. 42) der gegebene Punct x'', y'', so wie C der Mittelpunct des gegebenen Kreises, und zieht man AC und die Ordinate AQ; so ist $AC=\sqrt{x''^2+y''^2}=2r'$ gleich dem Durchmesser des zweiten Kreises. Wird ferner AC in C' halbirt und die Ordinate $C'Q'$ gezogen; so ist offenbar $CQ'=\frac{1}{2}x''=p$ und $C'Q'=\frac{1}{2}y''=q$, so, dass also in der That der über AC als Durchmesser construirte Kreis der Ort der Gleichung (3) ist. Die Durchschnittspuncte M, M' dieser beiden Kreise sind daher auch die gesuchten Berührungspuncte (x', y') für die beiden aus dem gegebenen Punct A (x'', y'') möglichen Tangenten AM und AM'. Fig. 42.

Anmerk. Man sieht, dass diese Construction genau dieselbe ist, welche man in den Elementen der Geometrie in diesem Falle angibt. [Eine zweite Construction nebst einer Folgerung daraus II, 104.]

§. **436.** Für Aufgaben, in welchen die Lage der Tangente gegeben, und der berührende Kreis gesucht wird, ist es bequemer, statt der einfachern, die allgemeine Gleichung (§. 402, 1.) des Kreises anzuwenden. — Nimmt man an, dass die Secante, welche in die Tangente übergehen soll, durch den Ursprung geht, was bei der nun allgemeinen Lage der Coordinatenaxen gegen den Kreis immer gestattet ist; so hat man für die Gleichung des Kreises und der Secante, beziehungsweise:

$$(1)\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \text{ und } (2)\ y=ax.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspuncte:

$$(3)\ x=\frac{aq+p\pm\sqrt{(r^2-p^2)a^2+2apq+r^2-q^2}}{1+a^2} \text{ und } y=ax.$$

Damit aber die Secante zur Tangente werde, muss in (3) wieder die Wurzelgrösse Null gesetzt werden, aus welcher Bedingungsgleichung man sofort

$$(4)\ a=\frac{-pq\pm r\sqrt{p^2+q^2-r^2}}{r^2-p^2}$$

erhält. Mit diesem Werthe von a findet man dann aus (2) die Gleichung der Tangente, und aus (3) die Coordinaten

des Berührungspunctes, und zwar, da die Wurzelgrösse verschwindet:

$$(5)\quad x = \frac{aq + p}{1 + a^2},\quad y = \frac{a(aq + p)}{1 + a^2}.$$

Sind daher ausser der Lage der Tangente noch 2 Bestimmungsstücke, wie z. B. der Berührungspunct $x = \alpha$, also $y = a\alpha$, und noch ein zweiter Punct x', y' gegeben, durch welchen der Kreis gehen soll; so darf man nur aus den 3 Gleichungen (1) (in welcher $x = x'$ und $y = y'$ zu setzen ist), (4) (in welcher a gegeben ist) und (5) (in deren ersten $x = \alpha$ ist) die Werthe von p, q, r bestimmen, um den gesuchten Kreis der Lage und Grösse nach zu erhalten.

In ganz ähnlicher Weise verfährt man, wenn zwei andere Bestimmungsstücke gegeben sind.

Bestimmte Aufgaben.

§. **437.** Aufgabe. Zwei Puncte und eine gerade Linie sind gegeben; man soll einen Kreis finden, welcher durch beide Puncte geht und die Gerade berührt.

Fig. 43. Auflösung. Nimmt man die gegebene Gerade AX (Fig. 43) zur Abscissenaxe, und den Punct A, in welchem diese von der Verbindungslinie $M'MA$ der beiden gegebenen Puncte M, M' geschnitten wird, zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, bezeichnet die Coordinaten der gegebenen Puncte durch x', y' und x'', y'', so wie jene des Mittelpunctes des gesuchten Kreises und dessen Halbmesser durch p, q, r; so ist die Gleichung der Geraden AM': (1) $y = ax$, und jene des gesuchten Kreises, mit Rücksicht der zweiten Bedingung der Aufgabe, zufolge welcher $q = r$ wird: (2) $x^2 + y^2 - 2px - 2ry + p^2 = 0$. Diese beiden Gleichungen, mit einander verbunden, geben, wenn man nach x ordnet:

$$x^2 - \frac{2(p + ar)}{1 + a^2}\,x + \frac{p^2}{1 + a^2} = 0,$$

welche Gleichung sofort die beiden Wurzeln $x = x'$ und $x = x''$ (als Abscissen der Durchschnittspuncte der Geraden AM' und des Kreises) besitzt; man hat also (§. 166):

$$x' + x'' = \frac{2(p + ar)}{1 + a^2} \quad \text{und} \quad x'x'' = \frac{p^2}{1 + a^2},$$

und aus diesen beiden Gleichungen:

$$p = \sqrt{x'x''(1 + a^2)} \quad \text{und} \quad r = \frac{(x' + x'')(1 + a^2) - 2p}{2a},$$

von welchen beiden Ausdrücken jedoch der letztere zur Construction selbst nicht gebraucht wird, indem es hinreicht, mittelst des erstern den Berührungspunct B zu bestimmen, und dann durch die drei Puncte M, M', B (§. 410) den gesuchten Kreis zu ziehen. Um aber zu diesem Ende aus dem erstern Ausdruck a zu eliminiren, hat man aus der Gleichung (1), da die entsprechende Gerade durch M und M' gehen soll, $y' = ax'$ und $y'' = ax''$, also $a = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$; mithin ist auch, wenn man für a den erstern Quotienten nimmt:

$$p = \sqrt{\frac{x''}{x'}(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{\frac{AP'}{AP} AM^2},$$

oder, wegen $\frac{AP'}{AP} = \frac{AM'}{AM}$, auch p oder $AB = \sqrt{AM \cdot AM'}$. Beschreibt man also über AM' als Durchmesser einen Halbkreis, errichtet in M auf AM' das Perpendikel MN, zieht die Sehne AN (§. 367, β) und überträgt dieselbe von A aus auf AX bis B; so ist B der gesuchte Berührungspunct.

Anmerk. In dem besondern Falle, in welchem die Verbindungslinie AMM' mit der Geraden AX parallel ist, gibt das im Halbirungspunct von MM' auf eine der beiden Geraden errichtete Perpendikel diesen Berührungspunct B.

§. **438.** Aufgabe. Von einem bestimmten Punct A (Fig. 44) an einen gegebenen Kreis C eine Secante $AM'M$ dergestalt zu ziehen, dass das vom Kreis abgeschnittene Stück MM' derselben einer gegebenen Geraden $2s$ gleich werde. Fig. 44.

Auflösung. Nimmt man den Mittelpunct C des gegebenen Kreises, dessen Halbmesser r sein soll, zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, und die Verbindungslinie dieses und des gegebenen Punctes A, was man zur Vereinfachung der Auflösung immerhin thun kann, zur Abscissenaxe, bezeichnet die Coordinaten des gegebenen

Punctes A mit x', y' und setzt endlich noch die Entfernung $AM = z$; so ist die Gleichung des Kreises: (1) $x^2 + y^2 = r^2$, jene der Secante, wegen $y' = 0$ (§. 395), (2) $y = a(x - x')$, so wie die Entfernung der beiden Puncte $A\,(x', y') = 0$) und $M(x, y)$: (3) $z^2 = (x - x')^2 + y^2$, in welcher letztern Gleichung x, y die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Secante mit dem Kreise, also jene Werthe bezeichnen, welche für x und y aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) hervorgehen. — Um nun aus diesen drei Gleichungen x und y zu eliminiren und den Werth von a zu bestimmen, wodurch unsere Aufgabe gelöst ist, folgt zuerst, wenn man den Werth von y aus (2) in (3) substituirt und dann x bestimmt: $x = x' + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}$, und damit aus (2): $y = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}$. Setzt man diese Werthe für x und y in die Gleichung (1), so erhält man (α) $z^2 + \frac{2x'}{\sqrt{1+a^2}} z = r^2 - x'^2$, und daraus:

$$z = \frac{-x' \pm \sqrt{a^2(r^2 - x'^2) + r^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Bezeichnet man diese beiden Werthe von z, nämlich die Abstände AM, AM' durch z', z''; so ist also, die Wurzelgrössen indess durch A und B bezeichnet: $z' = \frac{-x' + A}{B}$ und $z'' = \frac{-x' - A}{B}$, daher

$$z' - z'' = \frac{2A}{B} = \frac{2\sqrt{a^2(r^2 - x'^2) + r^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe soll aber auch $z' - z'' = 2s$ sein, folglich ist $s\sqrt{1+a^2} = \sqrt{a^2(r^2 - x'^2) + r^2}$, und daraus, wenn man Kürze halber $\sqrt{r^2 - s^2} = m$ setzt:

$$(\beta) \quad a = \frac{\pm m}{\sqrt{x'^2 - m^2}}.$$

Damit also die Aufgabe möglich sei, muss zuerst $r^2 \geqq s^2$, oder $2s \leqq 2r$, d. h. es darf die gegebene Gerade $2s = MM'$ **höchstens** dem Durchmesser des Kreises gleich sein. Ferner muss auch noch überdiess $x'^2 \geqq m^2$, d. i. (γ) $x' \geqq \sqrt{r^2 - s^2}$ sein. Liegt nun der gegebene Punct A **ausserhalb** des Kreises, so ist diese letztere Bedingung, wegen

$x' > r$ und $\sqrt{r^2 - s^2} < r$, immer erfüllt. Liegt hingegen dieser Punct A innerhalb des Kreises (Fig. 44') und errichtet man in diesem Puncte auf CX das Perpendikel GAG', so ist $GA = \sqrt{r^2 - x'^2}$, und da man die vorige Bedingung (γ) auch so stellen kann: $s \geqq \sqrt{r^2 - x'^2}$, so muss $2s \geqq 2GA$, d. h. es muss in diesem Falle die gegebene Linie $2s$ wenigstens so gross, als die Sehne GG' sein; welches auch in der That die kleinste Sehne ist, die man durch A ziehen kann. Fig. 44'.

Anmerk. Soll die Secante zur Tangente werden, was aber bloss im ersten Falle, in welchem A ausserhalb (oder höchstens in der Peripherie) des Kreises liegt, möglich ist; so darf man in der Gleichung (β) nur $s = 0$ setzen; dadurch findet man $m = r$, und daher

$$a = \frac{\pm r}{\sqrt{x'^2 - r^2}}.$$

Construction. In der Voraussetzung nun, dass die Aufgabe möglich ist, beschreibe man über $BC = r$ (Fig. 44 und 44') einen Halbkreis, und trage in diesen, von B aus, $BD = s$ als Sehne ein; so ist die andere Sehne $CD = \sqrt{r^2 - s^2} = m$. Ferner construire man über $AC = x'$ einen Halbkreis und durchschneide ihn aus C mit dem Halbmesser $CD = m$ in E, so sind die Geraden AEM und Am, wovon die erstere den gegebenen Punct A mit jenem E verbindet, und die letztere unterhalb der Axe CX mit AM symmetrisch liegt (und wozu man nur $Am = AM$ abschneiden darf), diejenigen, welche der Aufgabe Genüge leisten. Denn es folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke CEA sofort $AE = \sqrt{x'^2 - m^2}$, also Fig. 44 und 44'.

$$a = tang\,\alpha = tang(180 - \beta) = -tang\,\beta = -\frac{CE}{AE} = \frac{-m}{\sqrt{x'^2 - m^2}},$$

und

$$a = tang\,\alpha' = tang(180 + \beta) = tang\,\beta = \frac{+m}{\sqrt{x'^2 - m^2}}.$$ [II., 111 – 112.]

§. **439.** Aufgabe. Zwei Kreise C, C' (Fig. 45) sind der Grösse und Lage nach gegeben; man soll an diese eine gemeinschaftliche Secante dergestalt ziehen, dass von den beiden durch die Kreise abgeschnittenen Stücke MM', NN jedes einer gegebenen Linie $2s$ gleich werde. Fig. 45.

Auflösung. Nimmt man die Centrilinie CC' beider Kreise zur Abscissenaxe und den Mittelpunct C zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt $CC' = d$, den Halbmesser des Kreises C gleich r, jenen des Kreises C' gleich r' und die Abscisse des Punctes A, in welchem die

Abscissenaxe von der gesuchten Secante geschnitten wird, d. i. CA gleich x'; so kommt es bloss darauf an, diesen Werth von x', nämlich den Punct A zu finden, weil man dann nur noch aus diesem Punct an einen der beiden Kreise, nach dem vorigen §. eine Secante so zu ziehen hat, dass das vom Kreis abgeschnittene Stück gleich $2s$ wird.

Wird die trig. Tangente des Winkels MAC, in so ferne die Secante AM an den Kreis C der gemachten Bedingung entspricht, durch a, und in so ferne dieselbe Gerade als Secante AN an den Kreis C' diese Bedingung erfüllt, durch a', und endlich noch der Kürze wegen, das Stück der Abscissenaxe $C'A = x' - d$ durch x'' bezeichnet; so ist, zufolge der vorigen Aufgabe, Gleichung (β), für $m = \sqrt{r^2 - s^2}$ und $m' = \sqrt{r'^2 - s^2}$, sofort:

$$a = \frac{\pm m}{\sqrt{x'^2 - m^2}} \text{ und } a' = \frac{\pm m'}{\sqrt{x''^2 - m'^2}}.$$

Da nun nach dem Sinne der Aufgabe die Secanten AM und AN eine einzige gerade Linie ausmachen sollen, so wird $a' = a$, d. i., wenn man substituirt, quadrirt und die Nenner wegschafft: $m^2(x''^2 - m'^2) = m'^2(x'^2 - m^2)$ oder $mx'' = \pm m'x'$, und wenn man für x'' seinen Werth $x' - d$ setzt, und hierauf aus dieser Gleichung x' bestimmt:

$$(1)\quad x' = \frac{md}{m \mp m'} = \frac{d\sqrt{r^2 - s^2}}{\sqrt{r^2 - s^2} \mp \sqrt{r'^2 - s^2}}.$$

Dieser doppelte Werth von x' beweist, dass es im Allgemeinen zwei Puncte A, A' gibt, von welchen aus die gesuchten Secanten möglich sind. Da ferner, zufolge des vorigen §., aus jedem dieser Puncte zwei Secanten von der verlangten Eigenschaft gezogen werden können; so lässt also die gegenwärtige Aufgabe vier Auflösungen zu. — Die Construction betreffend, so kann diese nach jener der vorigen, noch einfacher aber nach jener der folgenden Aufgabe ausgeführt werden.

§. **440.** Aufgabe. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Auflösung. Setzt man in der vorigen Aufgabe $s = 0$, so wird dadurch die Bedingung ausgedrückt, dass die Se-

cante ANM (Fig. 45) zur gemeinschaftlichen Tangente der Kreise C und C' wird; man erhält aber dafür aus der Gleichung (1) des vorigen §.: $x' = \frac{rd}{r \mp r'}$. Fig. 45.

Construction. Um diese beiden Werthe von x' zu construiren, hat man für das obere Zeichen $r - r' : r = d : x'$, und für das untere $r + r' : r = d : x'$. Man ziehe daher durch C (Fig. 46) unter einem beliebigen Winkel mit CX die Gerade CK, welche den Kreis C in D durchschneidet, schneide darauf $DE = DE' = r'$ (= dem Halbmesser des Kreises C') ab, ziehe die Verbindungslinien EC', $E'C'$ und mit diesen parallel aus D die Geraden DA und DA'; so schneiden diese die verlängerte Centrilinie in den gesuchten Puncten A, A', durch deren erstern die beiden äussern AM, Am, und letztern die innern Tangenten $M'A'N'$ und $m'A'n'$ gehen. Denn man hat, dieser Construction zufolge (wenn der Halbmesser des Kreises C wieder r heisst), $CE = CD - DE = r - r'$ und $CE' = CD + DE' = r + r'$; ferner $CE : CD = CC' : CA$, d. i. $r - r' : r = d : CA = x'$ (als ersten Werth) und $CE' : CD = CC' : CA'$, d. i. $r + r' : r = d : CA' = x'$ (als zweiten Werth). Fig. 46.

Nachdem auf diese Weise die Puncte A, A' gefunden worden, darf man nur aus ihnen an einen der beiden Kreise, nach §. 435, die Tangenten ziehen, so berühren diese zugleich auch den zweiten Kreis.

Anmerk. Die Construction der vorigen Aufgabe wird nun einfach folgende sein. In die beiden gegebenen Kreise trage man die bestimmte Linie $2s$ (oder wenn beide Abschnitte von einander verschieden sein sollen, jeden in den betreffenden Kreis) als Sehne ein, fälle in jedem Kreise aus dem Mittelpunct C, C' auf diese ein Perpendikel, und beschreibe mit diesem als Halbmesser beziehungsweise aus C und C' die Kreise; so sind die an diese letztern gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten zugleich die gesuchten Secanten.

Unbestimmte Aufgaben.

§. 441. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Puncten A, B (Fig. 47) einen dritten Punct M von solcher Beschaffenheit zu finden, dass die Differenz der Quadrate der Verbindungslinien AM, BM einem gegebenen Quadrate m^2 gleich werde. Fig. 47.

Auflösung. Nimmt man die Verbindungslinie AB zur Abscissenaxe und den Punct C, in welchem AB halbirt wird, zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt $CB = CA = a$, und bezeichnet die Coordinaten des gesuch-

ten Punctes M durch x, y; so hat man (§. 390), oder auch aus den rechtwinkeligen Dreiecken AMP und BMP: $AM^2 = (a+x)^2 + y^2$ und $BM^2 = (a-x)^2 + y^2$, folglich nach der Bedingung der Aufgabe: $AM^2 - BM^2$, d. i. $(a+x)^2 - (a-x)^2 = m^2$, oder wenn man entwickelt; $4ax = m^2$, und daraus $x = \frac{m^2}{4a}$. — Da nun diess (§. 394, 7.) die Gleichung einer Geraden KL ist, welche mit der Ordinatenaxe YY' in dem Abstand $+\frac{m^2}{4a}$ parallel läuft; so ist diese Gerade sofort der geometrische Ort aller der Aufgabe Genüge leistenden Puncte M. Soll überhaupt immer nur das kleinere Quadrat von dem grössern abgezogen werden, so dass für $BM > AM$ sofort $BM^2 - AM^2 = m^2$ sein soll; so gibt es auch noch in demselben Abstand von YY' auf der Seite der negativen x zu eine mit YY' parallele Gerade KL' als Ort der gesuchten Puncte.

Construction. Man schneide auf den Axen CX, CY' von C aus die Stücke $CE = CD = \frac{1}{2}m$ ab, verbinde B mit D, und ziehe zu dieser Verbindungslinie durch E die Parallele EF; so ist $CB : CE = CD : CF$ oder $a : \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m : CF$, also $CF = \frac{m^2}{4a} = x$. Durchschneidet man demnach aus C mit dem Halbmesser CF die Axe AX in den Puncten P, P', wodurch $CP = CP' = x$ wird, und zieht durch diese Puncte mit YY' parallel die Geraden KPL und $K'P'L'$; so bilden diese den geometrischen Ort der Gleichung $x = \pm\frac{m^2}{4a}$ oder der gesuchten Puncte M der Aufgabe.

Anmerk. Diese Aufgabe ist für alle Werthe von m, von $m = 0$ (wofür beide Geraden KL, $K'L'$ mit YY' zusammen fallen) angefangen bis $m = \infty$ möglich.

§. **442**. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Puncten A,
Fig. 48. B (Fig. 48) einen dritten Punct M von solcher Beschaffenheit zu finden, dass die Summe der Quadrate der Verbindungslinien AM und BM einem gegebenen Quadrate m^2 gleich werde.

Auflös. Nimmt man wieder die Gerade AB, welche die Puncte A, B verbindet, zur Abscissenaxe, und den Halbirungspunct C der AB zum Ursprung der rechtwinke-

ligen Coordinaten, setzt $CA = CB = a$, und bezeichnet die Coordinaten des gesuchten Punctes M durch x, y; so ist wie im vorigen §. $AM^2 = (a+x)^2 + y^2$ und $BM^2 = (a-x)^2 + y^2$, folglich der gegebenen Bedingung gemäss: $(a+x)^2 + (a-x)^2 + 2y^2 = m^2$, oder, wenn man entwickelt:

$$x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}(2a^2 - m^2) = 0.$$

Diese Gleichung, die einzige, welche man zwischen den beiden Unbekannten x, y erhält, zeigt, dass der Ort aller der unzähligen Puncte M, welche der Aufgabe Genüge leisten (§. 406), ein Kreis vom Halbmesser

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(m^2 - 2a^2)}$$

ist, dessen Mittelpunct im Ursprung C liegt.

Construction. Um aber diesen Halbmesser und damit den Kreis, als geometrischen Ort der gefundenen Gleichung zu construiren, errichte man über $CB = a$ das Quadrat BE, und ziehe in diesem die Diagonale CD; so ist $CD^2 = 2a^2$. Errichtet man ferner in C auf CD das Perpendikel CL, und durchschneidet dasselbe aus D mit dem Halbmesser $DF = m$ in F; so ist im rechtwinkeligen Dreiecke CDF sofort $CF^2 = DF^2 - CD^2 = m^2 - 2a^2$. Vollendet man das Quadrat $CFGH$ und zieht die Diagonale CG, so ist $CG^2 = 2\,CF^2 = 2(m^2 - 2a^2)$, also $CG = \sqrt{2(m^2 - 2a^2)}$. Wird daher endlich CG in I halbirt, so ist $CI = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(m^2 - 2a^2)} = r$ der gesuchte Halbmesser, mit welchem man nur aus C den Kreis beschreiben darf, um sofort den geometrischen Ort aller die Aufgabe auflösenden Puncte M zu haben.

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, dass der kleinste Werth von m, für welchen die Aufgabe noch möglich wird, $= a\sqrt{2}$ ist. Für $m < a\sqrt{2}$ wird r imaginär, was sich in der Construction dadurch verräth, dass der erwähnte Durchschnitt F des Perpendikels CL aus D nicht möglich wird. — Für $m = a\sqrt{2}$ fällt F auf C, und es reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunct C, welches dann der einzige Punct ist, der die Aufgabe (die nun eine bestimmte ist) auflöst. Für $m = 2a$ wird $r = a = CA = CB$, so, dass AB der Durchmesser des gesuchten Kreises oder Ortes wird.

§. **443.** Aufgabe. Zwei Puncte A, B (Fig. 49) sind gegeben, man soll einen dritten Punct M von solcher Beschaffenheit finden, dass die Verbindungslinien MA, MB einen gegebenen Winkel $AMB = v$ einschliessen. Fig. 49.

Auflös. Nimmt man die Gerade AB, welche die beiden gegebenen Puncte verbindet, zur Abscissenaxe und A zum Anfangspuncte der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt $AB = a$, $tang\, v = m$, und bezeichnet endlich die Coordinaten des gesuchten Punctes M durch x', y'; so sind die Gleichungen der Verbindungslinien AM und BM beziehungsweise (§. 396):

$$(1)\quad y = \frac{y'}{x'} x \quad \text{und} \quad (2)\quad y = \frac{y'}{x'-a}(x-a).$$

Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels ieser beiden Geraden (1) und (2) ist daher (§. 399), wenn man gleich reducirt: $\frac{ay'}{x'(x'-a)+y'^2}$, welcher Quotient sofoı der Bedingung der Aufgabe zufolge $= m$ sein soll; man hat daher aus dieser Bedingungsgleichung, wenn man den Nenner wegbringt:

$$(3)\quad x'^2 + y'^2 - ax' - \frac{a}{m} y' = 0.$$

Da man nun wieder nur diese einzige Gleichung zwischen den beiden Unbekannten x', y' erhält; so gibt es auch hier unzählige Puncte M, welche die Aufgabe auflösen; der Ort dieser Puncte oder der Gleichung (3) ist (§. 404) ein durch den Ursprung A gehender Kreis, für welchen $p = \frac{1}{2}a$, $q = \frac{a}{2m}$ und $r = \frac{a}{2m}\sqrt{1+m^2}$ die Coordinaten des Mittelpunctes und der Halbmesser sind.

Construction. Um diesen Kreis zu construiren, ziehe man durch A die Gerade AE unter dem Winkel $XAE = v$, errichte in A auf AE das Perpendikel AG, ferner auf AB im Halbirungspuncte D das Perpendikel DC; so gibt der Durchschnitt C dieser beiden Perpendikeln den gesuchten Mittelpunct des Kreises. Beschreibt man daher diesen Kreis aus C mit dem Halbmesser $CA = CB$, so ist derselbe sofort der gesuchte Ort der Gleichung (3); denn es ist dieser Construction zufolge

$$AD = \tfrac{1}{2}a = p \quad \text{und}$$

$$CD = AD\, tang\, CAD = AD \cot EAD = \frac{AD}{tang\, v} = \frac{a}{2m} = q.$$

Anmerk. Ist der gegebene Winkel $v < 90^\circ$, so ist m, folglich auch q positiv, und der Mittelpunct C liegt oberhalb der AB; das Gegentheil findet Statt für $v > 90^\circ$. Für $v = 90^\circ$ endlich wird $m = \infty$ und $q = 0$, was sofort anzeigt, dass in diesem Falle AB

zum Durchmesser des Kreises wird. — Da ferner in der Gleichung (3) y' nicht negativ genommen werden kann, ohne dadurch das Zeichen in q, also jene Lage des Mittelpunctes C in Bezug auf AB zu ändern, welche er nach der Construction erhalten hat; so gelten für die gesuchte Auflösung nur die oberhalb der AB liegenden Puncte M des Kreises, d. i. die Puncte des Bogens AMB. Und da endlich dadurch, dass man y' negativ nimmt, die Gleichung (3) genau so verändert wird, als wenn y' positiv bliebe, dagegen m negativ, d. i. statt v, $180^0 - v$ gesetzt würde; so entsprechen die Puncte des unterhalb der AB liegenden Kreisbogens $AM'B$ dem Supplementswinkel von v, oder es schliessen die Sehnen AM', BM' an irgend einem Punct M' dieses untern Bogens den Winkel $AM'B = 180^0 - v$ ein.

§. **444.** Aufgabe. Eine Anzahl von Puncten ist gegeben, man soll eine gerade Linie so ziehen, dass die algebraische Summe der aus den gegebenen Puncten auf diese Gerade gefällten Perpendikel gleich Null wird.

Auflösung. Bezeichnet man die Coordinaten der gegebenen Puncte, deren Anzahl gleich n sein soll, auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem bezogen, der Reihe nach durch x', y', x'', y'' u. s. w., und die Gleichung der gesuchten Geraden durch (1) $y = ax + b$; so sind (§. 401) die aus den Puncten x', y', x'', y'' etc. auf diese Gerade (1) gefällten Lothe oder Perpendikel der Reihe nach, wenn man $\sqrt{1 + a^2} = N$ setzt:

$$P' = \frac{y' - ax' - b}{N}, \quad P'' = \frac{y'' - ax'' - b}{N} \text{ u. s. w.}$$

Man hat also nach der Bedingung der Aufgabe: $P' + P'' + P''' + \ldots = 0$, oder wenn man substituirt, der Kürze wegen $y' + y'' + y''' + \ldots = \Sigma(y')$, $x' + x'' + x''' + \ldots = \Sigma(x')$ setzt und sogleich die ganze Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner $N = \sqrt{1 + a^2}$ multiplicirt, sofort:

$$(2) \quad \Sigma(y') - a\Sigma(x') - nb = 0.$$

Da man nun für die unbestimmten Grössen a, b nur diese einzige Gleichung (2) hat; so ist die gegebene Aufgabe wieder unbestimmt, und es gibt sonach unendlich viele gerade Linien von der verlangten Eigenschaft. Sucht man unter diesen (als einfachsten Fall) diejenige, welche durch den Ursprung der Coordinaten geht, wofür also $b = 0$

wird; so hat man aus (2): $a = \frac{\Sigma(y')}{\Sigma(x')}$, und daher [Gleich. (1)] die Gleichung dieser Geraden: $y = \left(\frac{y' + y'' + y''' + \ldots}{x' + x'' + x''' + \ldots}\right) x$, welche sofort leicht nach §. 414 construirt werden kann.

§. **445.** Aufgabe. Es sind wieder n Puncte gegeben, man soll zu diesen einen neuen Punct von solcher Beschaffenheit finden, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punctes von allen gegebenen, einem gegebenen Quadrat m^2 gleich werde.

Auflös. Bezeichnet man die Coordinaten der gegebenen Puncte, auf irgend ein rechtwinkeliges Axensystem bezogen, durch x', y', x'', y'' etc., und jene des gesuchten Punctes durch x, y; so sind die Quadrate der Entfernungen dieses letztern von den erstern Puncten (§. 390) der Reihe nach: $d'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, $d''^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2$ u. s. w. Man hat also nach der Bedingung der Aufgabe: $d'^2 + d''^2 + d'''^2 + \ldots = m^2$, oder wenn man substituirt und Kürze halber $x' + x'' + \ldots = \Sigma(x')$, $y' + y'' + \ldots = \Sigma(y')$, $x'^2 + x''^2 + \ldots = \Sigma(x')^2$, $y'^2 + y''^2 + \ldots = \Sigma(y')^2$ setzt, nach einer ganz einfachen Reduction:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{n}\Sigma(x').x - \frac{2}{n}\Sigma(y').y + \frac{1}{n}[\Sigma(x')^2 + \Sigma(y')^2 - m^2] = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Aufgabe wieder unzählig viele Puncte entsprechen, und dass diese sämmtlich in der Peripherie eines Kreises liegen, für welchen (§. 402) die Coordinaten des Mittelpunctes und der Halbmesser die Werthe haben: $p = \frac{1}{n}\Sigma(x')$, $q = \frac{1}{n}\Sigma(y')$ und

$$r = \frac{1}{n}\sqrt{[\Sigma(x')]^2 + [\Sigma(y')]^2 + n[m^2 - \Sigma(x')^2 - \Sigma(y')^2}.$$

Anmerk. Man sieht, dass die obige Aufgabe in § 442 nur ein besonderer Fall der gegenwärtigen ist.

Fünftes Capitel.

Transformation der Coordinaten.

§. **446**. Schon bei den wenigen bisherigen Untersuchungen konnte man bemerken, welch bedeutenden Einfluss die Lage der Coordinatenaxen auf die grössere oder geringere Einfachheit der Entwickelung der Sätze und Auflösung der Aufgaben habe. Aber nicht bloss dadurch, dass man den Anfangspunct der Coordinaten, so wie die Lage der rechtwinkeligen Axen, deren wir uns bisher ausschliessend bedient haben, auf eine passende Weise gegen die gegebenen Puncte und Linien annimmt, sondern auch dadurch wird der Gang der Untersuchung öfter vereinfacht, dass man statt dem rechtwinkeligen irgend ein schiefwinkeliges Coordinaten-System wählt. Ist nun aber z. B. die Gleichung irgend einer Linie in Bezug auf ein bestimmtes Coordinaten-System entwickelt, und findet man, dass durch ein anderes System gewisse weitere Untersuchungen vereinfacht werden können; so wird es, um die Gleichung dieser Linie nicht wieder ganz von vorne in Bezug auf das neue Axensystem entwickeln zu müssen, nothwendig, die bereits abgeleitete Gleichung durch eine blosse Umwandlung oder Transformation auf das neue System zu bringen. Ja selbst für die blosse Discussion der Gleichungen ist es manchmal wichtig, über die Wahl der Coordinatenaxen disponiren, und sie gewissen Bedingungen unterwerfen zu können.

Wir haben also hier die Aufgabe aufzulösen: von irgend einem vorhandenen (alten) auf irgend ein anderes (neues) Coordinaten-System überzugehen.

Anmerk. So mannigfaltig übrigens auch die Aufgaben über die Transformation der Coordinaten gedacht werden können, so reduciren sich diese für uns doch nur auf jene beiden: von einem schiefwinkeligen Coordinaten-System wieder auf ein anderes schiefwinkeliges, in welchem der Ursprung und die Lage der Axen vom erstern verschieden sind, und ferner, von einem Parallel-Coordinaten-System auf ein Polar-Coordinaten-System (§. 452) und umgekehrt überzugehen.

Fig. 50. §. 447. Es seien AX, AY (Fig. 50) die ursprünglichen oder alten Coordinatenaxen, auf welche bereits irgend eine Linie KML bezogen ist; $A'X'$, $A'Y'$ die neuen Axen, auf welche dieselbe Linie jetzt bezogen werden soll; $YAX = \varphi$ der alte und $Y'A'X' = \varphi'$ der neue Coordinatenwinkel. Bezeichnet man für irgend einen Punct M dieser Linie KML die alten Coordinaten AP, PM (wobei also PM mit AY parallel ist) durch x, y, und die neuen $A'P'$, $P'M$ (wo $P'M$ mit $A'Y'$ parallel ist) durch x', y'; so kommt es nur darauf an, die alten Coordinaten x, y durch die neuen x', y' und jene Grössen auszudrücken, welche die Lage der neuen gegen die alten Coordinatenaxen bestimmen. Dazu führe man durch den neuen Ursprung A' mit den ursprünglichen Axen parallel die Geraden $CA'X_1$ und $BA'Y_1$, setze die Coordinaten des neuen Ursprungs $AB = d$, $AC = \delta$, und die Winkel $X_1A'X' = \alpha$ und $X_1A'Y' = \alpha'$; so sind die Grössen d, δ, α, α', welche die Lage der neuen gegen die alten Coordinatenaxen bestimmen, als gegeben oder bekannt anzusehen. Zieht man endlich noch durch P' die Geraden $P'R$, $P'S$ beziehungsweise mit AX, AY parallel; so erhält man $x = AP = AB + A'S + P'R$ und $y = PM = AC + SP' + RM$. Um aber diese Linien auszudrücken, folgt aus dem Dreiecke $A'SP'$ sofort: $A'P' : A'S : SP' = \sin A'SP' : \sin A'P'S : \sin SA'P'$, oder $x' : A'S : SP' = \sin\varphi : \sin(\varphi - \alpha) : \sin\alpha$, und aus dem Dreiecke $MP'R$: $P'M : P'R : RM = \sin P'RM : \sin P'MR : \sin MP'R$ oder

$$y' : P'R : RM = \sin\varphi : \sin(\varphi - \alpha) : \sin\alpha'.$$

Aus diesen Proportionen folgt nun aber:

$$A'S = \frac{x' \sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi},\quad SP' = \frac{x' \sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$P'R = \frac{y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin\varphi} \text{ und } RM = \frac{y' \sin\alpha'}{\sin\varphi};$$

es ist daher, wenn diese Werthe substituirt werden:

$$(p)\quad \begin{cases} x = d + \dfrac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin\varphi}, \\ y = \delta + \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\varphi}, \end{cases}$$

oder wenn man die Winkel φ, α u. s. w., welche beziehungsweise die Axen der x und y, der x' und x u. s. f. ein-

schliessen, symbolisch durch $(x.y)$, $(x'.x)$ u. s. w. bezeichnet, auch:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x = d + \dfrac{x' \sin(x'.y) + y' \sin(y'.y)}{\sin(x.y)}, \\ y = \delta + \dfrac{x' \sin(x'.x) + y' \sin(y'.x)}{\sin(x.y)}. \end{cases}$$

Ist also $F(x, y) = 0$ die Gleichung irgend einer Linie auf das alte Coordinaten-System bezogen, und setzt man in diese für x und y die hier gefundenen Werthe; so erhält man eine Gleichung $F'(x', y') = 0$, als gesuchte Gleichung derselben Linie auf das neue System bezogen.

§. **448**. Um des künftigen Gebrauches willen sollen gleich hier die am häufigsten bei dieser Umwandlung der Coordinaten vorkommenden besondern Fälle erwähnt werden.

Bleiben erstens die neuen Axen den alten parallel, und wird nur der Ursprung verändert, so hat man $\alpha = 0$ und $\alpha' = \varphi$; also aus (p): $x = d + x'$, $y = \delta + y'$.

§. **449**. Geht man von einem rechtwinkeligen wieder auf ein rechtwinkeliges System über, so ist $\varphi = 90^0$, $\varphi' = \alpha' - \alpha = 90$, oder $\alpha' = 90 + \alpha$; folglich $\sin\varphi = 1$, $\sin(\varphi - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\varphi - \alpha') = -\sin\alpha$ und $\sin\alpha' = \cos\alpha$, mithin endlich:

$$x = d + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = d + x' \cos(x'.x) - y' \sin(x'.x),$$
$$y = \delta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \delta + x' \sin(x'.x) + y' \cos(x'.x).$$

§. **450**. Um von einem rechtwinkeligen auf ein schiefwinkeliges Coordinaten-System überzugehen, ist $\varphi = 90^0$, also $\sin\varphi = 1$, $\sin(\varphi - \alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(\varphi - \alpha') = \cos\alpha'$ zu setzen; folglich wird:

$$x = d + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' = d + x' \cos(x'.x) + y' \cos(y'.x),$$
$$y = \delta + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' = \delta + x' \sin(x'.x) + y' \sin(y'.x).$$

§. **451**. Um von einem schiefwinkeligen auf ein rechtwinkeliges System überzugehen, hat man

$$\varphi' = \alpha' - \alpha = 90, \text{ oder } \alpha' = 90 + \alpha; \text{ also}$$
$$\sin(\varphi - \alpha') = -\cos(\varphi - \alpha),\ \sin\alpha' = \cos\alpha.$$

und daher:

$$x = d + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) - y' \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$$
$$= d + \frac{x' \sin(x'.y) - y' \cos(x'.y)}{\sin(x.y)},$$
$$y = \delta + \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \varphi}$$
$$= \delta + \frac{x' \sin(x.x') + y' \cos(x.x')}{\sin(x.y)}.$$

In allen diesen Fällen ist, wenn der Ursprung ungeändert bleibt, $d = 0$ und $\delta = 0$.

Anmerk. Bei Anwendung dieser Formeln werden die neuen von den alten Coordinaten nicht besonders mehr unterschieden, und man lässt daher die Accente von x und y weg; man setzt also z. B. in dem ersten Falle (§. 448) $x = d + x$ und $y = \delta + y$, oder vielmehr, man schreibt in der ursprünglichen Gleichung statt x und y beziehungsweise $d + x$ und $\delta + y$.

Polar-Coordinaten.

§. **452**. Ausser dem recht- (orthogonalen) und schiefwinkeligen, also überhaupt dem Parallel-Coordinaten-Systeme, ist noch eines, das Polarsystem, allgemein im Gebrauche, und verdient in gewissen Fällen vor dem erstern den Vorzug. Dieses System besteht darin, die auf einander folgenden Puncte einer Linie auf einen gegebenen festen Punct zu beziehen, d. i. die Entfernungen derselben von diesem letztern, so wie auch noch die Winkel anzugeben, welche die betreffenden Verbindungslinien mit einer ebenfalls festen, durch diesen fixen Punct gehenden
Fig. 51. Geraden bilden. — Ist z. B. RS (Fig. 51) irgend eine Curve, OB eine in ihrer Ebene liegende feste Gerade, O ein bestimmter Punct derselben, und zieht man von diesem Puncte (dem Pol) an irgend einen Punct M der Curve die Gerade OM (den Leitstrahl oder Radiusvector); so ist offenbar dieser Punct M bestimmt, wenn der Leitstrahl OM und der Winkel MOB desselben mit der festen Geraden OB (der Axe) gegeben sind.

§. **453**. Bezeichnet man den Leitstrahl OM durch u, den Winkel MOB durch v; so wird offenbar die Curve oder Linie RS vollkommen bestimmt oder charakterisirt

sein, wenn man auf irgend eine Art zu einer Relation zwischen u und v gelangen kann, welche für die sämmtlichen Puncte der Curve, aber auch nur für diese Curve gilt. Denn setzt man in der gefundenen Relation $\varphi(u, v) = 0$ oder (wenn man sich die Gleichung nach u aufgelöst denkt) $u = f(v)$, in welcher v und u wieder veränderliche Grössen sind (und beiläufig das bedeuten, was im Parallelsystem x und y), für v nach und nach die Werthe v', v'', ..., und erhält man daraus für u der Reihe nach die Werthe u', u'', ..; so darf man nur durch O die Geraden ON, ON'.. gegen OB so ziehen, dass $NOB = v'$, $N'OB = v''$.. wird, und auf diesen der Reihe nach die Stücke $OM = u'$, $OM' = u''$ u. s. w. abschneiden, um dadurch die der Curve RS angehörigen Puncte M, M', ... zu erhalten. — Die veränderlichen Grössen u, v, von denen in der Regel die erstere als die Function der letztern angesehen wird, werden Polar-Coordinaten, ihre Relation

$$F(u, v) = 0 \text{ oder } u = f(v)$$

aber wird Polargleichung der Curve RS genannt.

§. 454. Da es nun häufig vorkommt, dass man für eine gegebene Gerade, als Axe, und einen in ihr liegenden bestimmten Punct, als Pol, die Polargleichung einer Curve nicht von vorne entwickeln, sondern diese durch blosse Umwandlung einer schon vorhandenen, auf irgend ein Parallel-Coordinaten-System sich beziehenden Gleichung erhalten will; so wollen wir sofort im nächsten Paragraphe die zu diesem Zwecke nöthigen Formeln ableiten.

§. 455. Es seien AX, AY (Fig. 51) die Axen des ursprünglichen Coordinaten-Systems mit dem Coordinatenwinkel $XAY = \varphi$, für welches die Gleichung einer Curve $F(x, y) = 0$ bereits entwickelt ist, und welche Gleichung nun für ein bestimmtes Polar-System umgewandelt werden soll; OB sei dafür die Axe und O der Pol. Führt man durch O mit AX und AY beziehungsweise parallel die Geraden OX', OY', setzt den Winkel der neuen Axe mit der Abscissen- Fig. 51.

axe $BOX' = \alpha$, und die Coordinaten des Poles $AC = d$, $AD = \delta$; so ist, wie aus der Figur zu ersehen:

$$AP = AC + OQ \text{ und } PM = AD + QM,$$

oder, da aus dem Dreiecke MOQ sofort $OM : OQ : QM = \sin OQM : \sin OMQ : \sin MOQ$, d. i.

$$u : OQ : QM = \sin\varphi : \sin(\varphi - \alpha - v) : \sin(\alpha + v),$$

und daraus $OQ = \frac{u \sin(\varphi - \alpha - v)}{\sin\varphi}$ und $QM = \frac{u \sin(\alpha + v)}{\sin\varphi}$ folgt, auch:

$$\text{II. } x = d + \frac{u \sin(\varphi - \alpha - v)}{\sin\varphi} \text{ und } y = \delta + \frac{u \sin(\alpha + v)}{\sin\varphi}.$$

§. **456**. Ist das Parallel-Coordinaten-System, wie gewöhnlich, rechtwinkelig, also $\varphi = 90$; so ist wegen $\sin\varphi = 1$ und $\sin(\varphi - \alpha - v) = \cos(\alpha + v)$ sofort:

$$x = d + u\cos(\alpha + v),\ y = \delta + u\sin(\alpha + v).$$

§. **457**. Fällt dabei noch die feste Gerade oder Axe mit der Abscissenaxe, und der Pol mit dem Anfangspuncte des ursprünglichen Systems zusammen; so wird noch $d = 0$, $\delta = 0$ und $\alpha = 0$, mithin:

$$x = u\cos v \text{ und } y = u\sin v.$$

§. 458. Substituirt man also in der ursprünglichen Gleichung $F(x, y) = 0$, welche sich auf das System AX, AY bezieht, für x und y die Werthe aus den eben entwickelten betreffenden Formeln; so erhält man eine Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ derselben Curve, auf das Polarsystem O und OB bezogen. — Um dagegen umgekehrt von dem Polarsystem auf das Parallelsystem überzugehen, muss man aus den vorigen Relationen u und v durch x, y etc. ausdrücken, und in der Polargleichung $\varphi(u, v) = 0$ substituiren. Für den einfachsten Fall im vorigen §. z. B. hat man

$$u^2 = x^2 + y^2,\ \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ also}$$

$$v = arc \sin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = arc \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sechstes Capitel.

Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Die Ellipse.

§. **459.** Erklärung. Die Ellipse ist eine ebene Curve von solcher Beschaffenheit, dass für jeden ihrer Puncte M die Summe der Abstände MF, MF' von zwei festen Puncten F, F' einer bestimmten Geraden $2a$ gleich ist. Die beiden festen Puncte F, F' heissen Brennpuncte, und jede Gerade FM oder $F'M$, welche einen dieser Brennpuncte mit einem Puncte der Curve verbindet, wird Leitstrahl oder Radiusvector genannt.

§. **460.** Dieser Erklärung zufolge ist es leicht, so viele Puncte in der Ellipse zu bestimmen, als man nur immer will, d. i. die Curve mittelst Puncte zu construiren. Denn verbindet man die beiden Brennpuncte F, F' (Fig. 52) durch eine Gerade von unbestimmter Länge, halbirt FF' in C, und schneidet auf dieser Geraden $CA = CA' = a$ ab; so sind A und A' Puncte der Ellipse, weil wegen $CF = CF'$, sowohl $AF + AF' = a - CF + a + CF' = 2a$, als auch $A'F' + A'F = a - CF' + a + CF = 2a$ ist. — Beschreibt man ferner aus F und F' mit den Halbmessern $CA = CA' = a$ Kreisbögen, die sich in B und B' schneiden; so sind auch B und B' Puncte dieser Curve, weil offenbar $FB + F'B = FB' + F'B' = a + a = 2a$ ist. — Nimmt man endlich in der begrenzten Geraden FF' einen beliebigen Punct S, und beschreibt aus F und F' beziehungsweise mit den Radien AS, $A'S$ Kreisbögen, die sich in M und m durchschneiden; so sind auch diese Durchschnittspuncte Puncte der Ellipse; denn es ist dieser Construction zufolge für den Punct M, $FM + F'M = AS + A'S = AA' = 2a$. Dasselbe gilt auch für den Punct m. Verwechselt man in Bezug auf diese Halbmesser die Puncte F und F', be-

Fig. 52.

schreibt also mit AS und $A'S$ die Bögen aus F' und F; so geben ihre Durchschnittspuncte ebenfalls 2, und zwar mit den beiden vorigen gegen AA' symmetrisch liegende Puncte der Ellipse. Indem man nun für S immer neue Puncte der Geraden FF' wählt, kann man auf diese Weise so viele Puncte der Ellipse bestimmen, als nöthig sind, um, diese mit einander verbindend, die Curve durch eine ununterbrochene Linie zu erhalten.

Anmerk. Diese Construction ist nur möglich, wenn $F'M + FM$, d. i. $2a > FF'$ und zugleich (§. 425) $F'M - FM < FF'$ ist. Diese letztere Bedingung schliesst aber jene in sich, dass der Punct S nicht über die Puncte F, F' hinaus falle. Denn so wäre z. B. für einen zwischen F' und A' liegenden Punct S', $AS' > AF'$ und $A'S' < A'F'$, daher $AS' - A'S' > AF' - A'F$, oder wegen $A'F' = AF$ auch $AS' - A'S' > AF' - AF = FF'$; es kann also nicht $AS' = FM$ und $A'S' = F'M$ genommen werden, weil sonst $FM - F'M > FF'$ wäre, was der obigen Bedingung entgegen ist.

§. **461.** Werden dagegen die beiden Enden eines vollkommen biegsamen, undehnbaren Fadens, dessen Länge der gegebenen Geraden $AA' = 2a$ gleich ist, in den Brennpuncten F, F' befestiget (oder werden, was für die Beschreibung der ganzen Ellipse bequemer ist, die beiden Enden eines solchen Fadens von der Länge $2a + FF'$ zu einer Schleife verbunden, und diese über zwei in den Brennpuncten befestigte Stifte oder Nadeln gelegt), an diesen ein Zeichenstift angelegt und so herumgeführt, dass dabei die Fadenstücke immer straff gespannt bleiben; so wird durch diesen Stift die Ellipse in einer stetigen oder ununterbrochenen Bewegung beschrieben oder erzeugt; denn es ist bei dieser Bewegung in jeder Lage des Stiftes M die Summe der Fadenstücke, welche dabei die Leitstrahlen vorstellen, der ganzen Fadenlänge $AA' = 2a$ gleich.

§. **462.** Um eine Gleichung der Ellipse zu entwickeln, ist es am einfachsten, die beiden Geraden AA', BB', welche sich in C rechtwinkelig schneiden, und in Bezug auf welche, der obigen Construction zufolge, die Puncte der Curve symmetrisch liegen, als Coordinatenaxen zu nehmen. Es sei daher XX' die Abscissenaxe und C der Anfangspunct der

rechtwinkeligen Coordinaten, $CF = CF' = c$, und für einen beliebigen Punct M der Curve $CP = x$, $PM = y$, so wie endlich noch $FM = u$ und $F'M = u'$; so gelten für den Punct M, als Durchschnittspunct zweier Kreise, von den Halbmessern u und u' (was übrigens auch aus den Dreiecken FMP und $F'MP$ folgt) die beiden Gleichungen:

(1) $(x - c)^2 + y^2 = u^2$ und (2) $(x + c)^2 + y^2 = u'^2$;

so wie auch noch die Bedingung Statt findet:

$$(3) \quad u + u' = 2a.$$

Die Elimination von u und u' aus diesen drei Gleichungen gibt sofort die gesuchte Gleichung der Curve in x, y. Nun erhält man aus den beiden ersten Gleichungen durch Addition und Subtraction: (4) $2(x^2 + y^2 + c^2) = u'^2 + u^2$ und $4cx = u'^2 - u^2 = (u' + u)(u' - u)$, oder mit Rücksicht auf Gleichung (3): $4cx = 2a(u' - u)$, und daraus folgt $u' - u = \frac{2cx}{a}$, so, dass also (wegen $u' + u = 2a$) (5) $u' = a + \frac{cx}{a}$ und $u = a - \frac{cx}{a}$ ist. Diese Werthe in (4) substituirt, geben $a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$, oder, wenn man, da nach §. 460 (Anmerk.) $FF' < FM + F'M$, d. i. $2c < 2a$, also $c^2 < a^2$, daher $a^2 - c^2 > 0$, oder wesentlich positiv ist, (m) $a^2 - c^2 = b^2$ setzt, auch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder auch

$$\text{I.} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

welches sofort die (einfachste) Gleichung der Ellipse ist.

§. **463.** Aendert man den Anfangspunct der Coordinaten, lässt aber die neuen Axen den vorigen parallel, und bezeichnet, auf die neuen Axen bezogen, die Coordinaten des alten Anfangspunctes C durch p, q; so erhält man nach §. 448 (wegen $d = -p$, $\delta = -q$) aus der vorigen Gleichung I. die allgemeinere: I'. $a^2(y - q)^2 + b^2(x - p)^2 = a^2b^2$.

§. **464.** Aus der obigen Gleichung (m) (§. 462) folgt $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = CF = CF'$, und diese Entfernung c eines Brennpunctes F oder F' vom Mittelpuncte C heisst Excentricität.

Anmerk. Häufig, besonders in der Astronomie, versteht man auch unter der Excentricität den Quotienten $\frac{c}{a}$.

§. **465.** Löst man die Gleichung I. des §. 462 nach y auf, so findet man (1) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, und durch Discussion dieser Gleichung erhält man (wie in §. 408 beim Kreise) selbst, wenn die Construction dieser Curve nicht vorausgegangen ist, ein deutliches Bild von der Ellipse. Diese Gleichung zeigt nämlich:

1. Dass die Ellipse in Beziehung auf beide Coordinatenaxen symmetrisch ist. [Die Verwechslung der beiden Axen unter einander gibt (1′) $y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ als Gleichung der Ellipse.]

Fig. 51. 2. Die Axen XX', YY' werden in den Puncten A, A', für welche $x = CA = +a$ und $= CA' = -a$ ist, ferner in B, B', wofür $y = CB = +b$ und $= CB' = -b$ ist, geschnitten.

3. Da für $x = \pm a$ sofort $y = \pm 0$, und für $y = \pm b$, $x = \pm 0$ wird; so kann man (§. 430, Anmerk.) schliessen, dass die Curve in A, A' und B, B' von den Geraden DAE, $D'A'E'$ und DBD', $EB'E'$, welche beziehungsweise mit YY' und XX' parallel laufen, berührt werde.

4. Da für Werthe von $x > a$, y, und für Werthe von $y > b$ (Gl. 1′) x imaginär ausfällt; so folgt, dass die Curve von dem durch die vorigen vier Puncte A, A', B, B' construirten Rechteck $DEE'D'$ gänzlich eingeschlossen wird.

5. Die Entfernung eines Punctes $M(x, y)$ der Ellipse vom Ursprunge C ist: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder, wenn man für y^2 den aus der Gleichung (1) folgenden Werth substituirt:

$$d = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2}.$$

Da nun dieser Ausdruck seinen kleinsten Werth bei $x = 0$ erreicht, so ist der kleinste dieser Abstände: $d = \sqrt{b^2} = \pm b = CB = CB'$. Nimmt x zu, so wächst auch d, und erreicht den grössten Werth, wenn man für x den grössten Werth, d. i. (4) $x = \pm a$ setzt; dafür hat man aber, als grössten dieser Abstände: $d = \sqrt{b^2 + a^2 - b^2} = \pm a = CA = CA'$. Hieraus folgt auch, dass unter allen durch C möglichen Sehnen der Curve jene AA' die grösste und BB' die kleinste ist. Zugleich ist aber auch AA' grösser als jede andere, wie immer gezogene Sehne überhaupt; denn zieht man die beliebige Sehne GH, und verbindet ihre Endpuncte G und H mit C; so ist im Dreiecke GCH sofort $GH < GC + CH$, und wegen $GC + CH < A'C + CA = AA'$, um so mehr $GH < AA'$

6. Von den Geraden AA' und BB' halbirt jede die mit der andern parallelen Sehnen und schneidet sie rechtwinkelig; aus diesem Grunde heissen diese beiden Geraden Axen der Ellipse, und zwar wird AA' die erste oder grosse, und BB' die zweite oder kleine Axe genannt. Ihre Endpuncte A, A', B, B' heissen Scheiteln der Ellipse.

7. Alle durch C gehenden Sehnen werden in diesem Puncte halbirt. Denn verbindet man mit der obigen Gleichung I. der Ellipse die Gleichung irgend einer durch C (als Ursprung) gehenden Geraden HH', nämlich (α) $y = Ax$; so erhält man aus der entstehenden Gleichung sofort: $x = \frac{\pm ab}{\sqrt{A^2a^2+b^2}}$, und damit aus (α): $y = \frac{\pm Aab}{\sqrt{A^2a^2+b^2}}$ als Coordinaten der Durchschnittspuncte H, H', wobei die obern Zeichen dem Puncte H, die untern jenem H' entsprechen. Da nun die numerischen Werthe sowohl von x, als auch von y, d. i. Ch, Ch' und hH, $h'H'$ unter sich gleich sind; so sind es auch (wie aus den rechtwinkeligen Dreiecken CHh, $CH'h'$ folgt) die Stücke CH und CH', oder es wird HH in C halbirt. — Dieser angeführten Eigenschaft wegen heisst der Punct C der Mittelpunct, und jede durch denselben gezogene Sehne, wie HH', ein Durchmesser der Ellipse.

8. Für $b = a$ wird, §. 464, $c = 0$, und die Gleichung I. geht über in jene $x^2 + y^2 = a^2$, nämlich (§. 406) in die Gleichung des Kreises vom Halbmesser a, dessen Mittelpunct im Ursprung liegt; der Kreis kann daher als eine Ellipse angesehen werden, deren beide Axen einander gleich sind und deren Excentricität also Null ist.

§. **466**. Ist man bei der Auflösung irgend einer Aufgabe und der Voraussetzung eines rechtwinkeligen Coordinatensystems auf die Gleichung (r) $Ay^2 + Bx^2 = C$ gekommen; so darf man diese nur auf die Form $\frac{A}{C}y^2 + \frac{B}{C}x^2 = 1$ bringen, und mit jener $\frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{a^2}x^2 = 1$ (§. 462) vergleichen, um zu erkennen, dass sie die Gleichung einer Ellipse von den Halbaxen $a = \sqrt{\left(\frac{C}{B}\right)}$ und $b = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)}$ ist.. Hat man daher die Axen AA', BB' (Fig. 52) dieser Ellipse, Fig. 52.
als Ort der Gleichung (r), construirt, so ist auch durch die Gleichung $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (§. 464) ihre Excentricität gegeben, und man findet sofort die beiden Brennpuncte dieser Ellipse, wenn man aus dem einen Endpunct B der kleinen Axe mit dem Halbmesser $CA = a$ die grosse Axe AA'

in den Puncten F, F' durchschneidet; denn es ist $CF = CF' = \sqrt{BF^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$, also in der That $CF = CF' = c$, woraus sofort folgt, dass F und F' die gesuchten Brennpuncte sind.

Anmerk. Da bei der Ellipse (vor. §. 5.) immer $a > b$ sein muss, so muss auch $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$, d. i. $A > B$ sein. Fände daher in der vorliegenden Gleichung (r) das Umgekehrte Statt, und wäre $B > A$, so dürfte man darin nur x und y mit einander vertauschen, um dadurch die Gleichung $By^2 + Ax^2 = C$ zu erhalten, in welcher nun die erwähnte Bedingung vorhanden ist [indem jetzt $a = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)}$ und $b = \sqrt{\left(\frac{C}{B}\right)}$ ist]; bei der Construction der Curve muss man jedoch auch die Coordinatenaxen mit einander verwechseln, und auf die Abscissenaxe die kleine Axe der Ellipse auftragen. [II., 141.]

Als Beispiele können die Gleichungen dienen:

$$3y^2 + 2x^2 = 5,\quad \tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 = 1,\quad 4y^2 + 4x^2 = 3.$$

Erstere entspricht einer Ellipse, wobei $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{5}{3}}$; die zweite einer Ellipse, wobei $a = \sqrt{3}$ auf der Ordinaten-, und $b = \sqrt{2}$ auf der Abscissenaxe liegt; die letztere einer Ellipse, wobei $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, also einem Kreise vom Halbmesser $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. [II., 141 — 142.]

§. **467.** Um endlich noch die (häufig vorkommende) Gleichung der Ellipse zu entwickeln, bei welcher der Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten im Scheitel A' liegt, und die Abscissen auf der grossen Axe AA' gezählt werden, wollen wir diese, anstatt von vorne zu entwickeln, durch blosse Umwandlung der Coordinaten aus der obigen Gleichung I. (§. 462) herleiten. Da nun der Ursprung von C nach A' verlegt werden, die Abscissenaxe dieselbe, also die neue Ordinatenaxe mit der alten parallel bleiben soll; so darf man (da in §. 448 $d = -a$ und $\delta = 0$ wird) in der genannten Gleichung I. oder in jener (1) (§. 465) bloss $x - a$ statt x setzen, und y ungeändert lassen. Dadurch erhält man aber für die gesuchte Gleichung:

$$(2)\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}.$$

Die Hyperbel.

§. **468.** Erklärung. Die Hyperbel ist eine Curve von der Eigenschaft, dass für jeden Punct M derselben die Dif-

ferenz der Abstände MF, MF' (der Leitstrahlen) von zwei festen Puncten F, F' (den Brennpuncten) einer gegebenen Geraden $2a$ gleich ist.

§. **469**. Mittelst Puncte lässt sich demnach die Hyperbel auf folgende Weise construiren. Zuerst verbinde man die beiden gegebenen Puncte F, F' (Fig. 53) durch die Gerade XX', welche unbestimmt verlängert wird, halbire FF' in C, und schneide von diesem Puncte aus $CA = CA' = a$ ab, so sind A, A' die ersten Puncte der Curve; denn es ist sofort $AF = A'F$, also für den Punct A: Fig. 53.

$$F'A - FA = F'A' + A'A - FA = AA' = 2a,$$

und für jenen A':

$$FA' - F'A' = FA + AA' - F'A' = AA' = 2a.$$

Um irgend einen andern Punct M der Hyperbel zu finden, nehme man auf der Geraden AX einen beliebigen Punct S, und beschreibe aus F' und F beziehungsweise mit den Halbmessern $A'S$, AS Kreisbögen, welche sich sofort in M und m schneiden werden; ferner beschreibe man solche Bögen mit den nämlichen Halbmessern $A'S$, AS respective aus F und F', die sich sofort in M' und m' schneiden sollen; so sind diese vier Puncte, von denen M, m und M', m' in Bezug auf XX', so wie M, M' und m, m' in Beziehung auf die durch C auf XX' perpendiculäre Gerade YY' symmetrisch liegen, Puncte der Curve. Denn es ist z. B. für den Punct M:

$$F'M - FM = A'S - AS = AA' = 2a;$$

dasselbe gilt auch für die drei übrigen Puncte M', m, m'. Indem man nun für S immer neue Puncte der unbegrenzten Geraden AX annimmt, lassen sich durch dasselbe fortgesetzte Verfahren so viele Puncte der Curve bestimmen, als man nöthig findet, um durch sie die continuirlichen Linien $LMAmK$ und $L'M'A'm'K'$, welche zusammen eben die Hyperbel bilden, möglichst genau ziehen zu können.

Anmerk. Da $F'M - FM$, d. i. $2a < FF'$ ist, so folgt, dass bei dieser Curve die Puncte A, A' immer zwischen jenen F, F' liegen.

§. **470**. Durch eine stetige Bewegung kann die Hyperbel beschrieben werden, wenn man ein Lineal in dem

einen Brennpuncte F so anbringt, dass sich dieses um denselben drehen lässt, während zugleich die eine Kante desselben durch diesen Drehungspunct geht; ferner das eine Ende eines Fadens, welcher um die gegebene Gerade $2a = AA'$ länger als das Lineal (vom Drehungspunct bis zum Endpunct der erwähnten Kante gezählt) ist, an den Endpunct des Lineals, das andere Ende aber in den zweiten Brennpunct F' befestiget, und endlich mittelst eines Zeichenstifts den Faden an die Kante des Lineals dergestalt anhält und längs derselben hinführt, dass bei der dadurch gleichzeitig bewirkten Drehung des Lineals, das Fadenstück MF immer straff angespannt bleibt. Auf diese Weise wird der Stift einen Theil, nämlich ein Stück des Astes LMA der Hyperbel beschreiben, welcher auch, durch gehöriges Umwenden des Lineals, unterhalb der XX', nach AmK hin, fortgesetzt werden kann. Endlich wird man durch die Verwechslung der beiden Brennpuncte, in Bezug auf dieses Verfahren, durch die nämliche organische Beschreibung auch den zweiten Zweig $L'M'A'm'K'$ bis zu einer gewissen Grenze (welche durch die Länge des Lineals bedingt wird) erhalten. Es ist nämlich nach diesem Verfahren in jeder Lage des Stifs M die Länge des Fadens $= F'M + MG$, und da diese zufolge der Voraussetzung auch $= FG + 2a$ $= FM + MG + 2a$ ist; so folgt $F'M + MG = FM + MG$ $+ 2a$ oder $F'M - FM = 2a$.

Anmerk. Obschon beide Zweige $LMAmK$ und $L'M'A'm'K'$ zusammen erst die Hyperbel ausmachen, so pflegt man doch gewöhnlich schon jedem dieser beiden Zweige für sich diese Benennung beizulegen, und nennt in dieser Beziehung die beiden Zweige entgegengesetzte Hyperbeln.

§. 471. Um für die Hyperbel eine einfache Gleichung zu finden, nehmen wir wieder die beiden Geraden XX', YY', welche sich in C rechtwinkelig schneiden, und gegen welche, wie die vorige Construction gezeigt, die Puncte der Curve symmetrisch liegen, als Coordinatenaxen; setzen FF' $= 2c$, also $CF = CF' = c$, und bezeichnen die Coordinaten irgend eines Punctes M der Curve durch x, y, so wie endlich die Leitstrahlen FM, $F'M$ durch u und u'. Diess vor-

ausgesetzt, gelten für den Punct M, als Durchschnittspunct zweier Kreise, deren Halbmesser u, u' und Mittelpuncte F, F' sind, die Gleichungen (§. 402) (1) $(x-c)^2+y^2=u^2$ und (2) $(x+c)^2+y^2=u'^2$, so wie auch noch aus der Natur der Curve die folgende (3) $u'-u=2a$. — Die Elimination von u, u' aus diesen drei Gleichungen führt zur gesuchten Gleichung zwischen x und y. Werden zu diesem Ende die Gleichungen (1) und (2) addirt und subtrahirt, so erhält man (4) $2(x^2+y^2+c^2)=u'^2+u^2$ und $4cx=u'^2-u^2=(u'+u)(u'-u)$, oder, mit Rücksicht auf Gleichung (3): $4cx=2a(u'+u)$, woraus $u'+u=\frac{2cx}{a}$, also mit Rücksicht auf die Differenz (3), sofort (5) $u'=\frac{cx}{a}+a$ und $u=\frac{cx}{a}-a$ folgt. Diese Werthe von u und u' in (4) substituirt, geben $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$, oder, wenn man, da (Anmerk., §. 469) $CF>CA$, d. i. $c>a$ sein muss, also $a^2-c^2<0$ oder wesentlich negativ ist, $a^2-c^2=-b^2$ oder (m) $c^2-a^2=b^2$ setzt, auch:

$$\text{II.} \quad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

welches sofort die gesuchte Gleichung der Hyperbel ist.

§. **472**. Für ein dem vorigen paralleles Coordinatensystem, auf welches bezogen p, q die rechtwinkeligen Coordinaten des vorigen Anfangspunctes C sind, hat man:

$$\text{II}'. \quad a^2(y-q)^2-b^2(x-p)^2=-a^2b^2$$

als allgemeinere Gleichung der Hyperbel.

§. **473**. Aus der vorigen Gleichung (m) erhält man für die Excentricität der Hyperbel:

$$c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=CF=CF'.$$

Anmerk. Die Gleichung II. der Hyperbel mit jener I., §. 462, der Ellipse verglichen, zeigt, dass man aus der Gleichung der Ellipse ganz einfach jene der Hyperbel erhält, indem man in der erstern $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Aus diesem Grunde müssen sich auch durch diese Substitution alle für die Ellipse geltenden Relationen auf die Hyperbel übertragen lassen; so erhält man z. B. aus dem Ausdrucke der Excentricität der Ellipse $c=\sqrt{a^2-b^2}$, dadurch in der That

jenen für die Hyperbel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, und so in allen übrigen Fällen. Diese Bemerkung ist wesentlich, und wird uns der meisten Entwickelungen für die Hyperbel, sobald diese nur für die Ellipse durchgeführt sind, entheben.

§. **474**. Die obige Gleichung II., nach y aufgelöst, gibt (1) $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, und durch Discutirung dieser Gleichung findet man für die Hyperbel folgende Haupteigenschaften:

1. Die Puncte dieser Curve liegen in Bezug auf die beiden Axen XX', YY' symmetrisch. [Die Verwechselung der beiden Coordinatenaxen gibt, wenn man in II. x und y mit einander vertauscht und dann y bestimmt:

$$(1') \quad y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2}.]$$

2. Für $x = \pm a$ folgt (für jedes Zeichen) $y = \pm 0$, also wird die Abscissenaxe von der Hyperbel in den Puncten A, A', für welche $CA = CA' = \pm a$ ist, geschnitten, und die durch diese Puncte mit YY' parallel gezogenen Geraden berühren die Curve (§. 430, Anmerk.).

3. Für $x = 0$ wird $y = \pm b\sqrt{-1}$, zum Zeichen, dass die Ordinatenaxe YY' von der Hyperbel nicht geschnitten wird; und da es überhaupt für keinen Werth von $x < a$ einen reellen Werth von y gibt, so kann zwischen den beiden in 2. erwähnten, durch A, A' mit YY' parallelen Geraden, kein Punct der Curve liegen Dagegen erstreckt sich die Curve von da aus beziehungsweise gegen die rechte und linke Seite hin bis ins Unendliche, oder sie besteht aus vier unendlichen Aesten, die sich immer decken, man mag sich die Curve um die Abscissen- oder Ordinatenaxe umgeschlagen denken. (Vergl. Anmerk. in §. 470.)

4. Die mit der Ordinatenaxe YY' parallelen Sehnen, wie Mm, werden von der Abscissenaxe XX', und umgekehrt, die mit dieser letztern parallelen Sehnen, wie MM', von der Ordinatenaxe halbirt und perpendiculär geschnitten. Da man ferner mit der Ellipse analog, auf der Ordinatenaxe zwei Puncte B, B' abschneidet, für welche $CB = CB' = b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (m), §. 471, ist, und welche man sofort erhält, indem man YY' aus A oder A' mit dem Halbmesser $FC = c$ in B und B' durchschneidet; so werden auch hier AA' und BB' Axen der Hyperbel genannt, und zwar heisst AA' die erste, oder Haupt-, auch Quer-Axe, und jene BB' (die also nur, da ihre Endpuncte nicht in der Curve liegen, eine eingebildete Axe ist) die zweite oder conjugirte Axe. Eben so heissen auch hier die Endpuncte A, A' der ersten Axe, da sie zugleich Puncte der Curve sind, Scheiteln der Hyperbel.

5. Jede durch den Punct C gezogene Sehne HH' wird in demselben halbirt. Denn verbindet man mit der Gleichung II. der Hyperbel

jene der Secante HH', nämlich $y = Ax$ (oder kürzer, setzt man — Anmerk., §. 473 — in den analogen Ausdrücken der Ellipse, in 7., §. 465, $b\sqrt{-1}$ statt b), so erhält man als Coordinaten der Durchschnittspuncte H, H':

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - A^2 a^2}} \text{ und } y = \frac{\pm Aab}{\sqrt{b^2 - A^2 a^2}},$$

woraus wieder (wie bei der Ellipse) die Congruenz der beiden rechtwinkeligen Dreiecke ChH, $Ch'H'$, also die Gleichheit von CH und CH' folgt. Es heisst daher auch hier dieser Punct C der Mittelpunct, und jede durch denselben gezogene Sehne HH' Durchmesser oder Diameter der Hyperbel.

6. Die beiden vorigen Gleichungen zeigen, dass die Durchschnittspuncte H, H' des Durchmessers HH' nur möglich sind, so lange $b > Aa$ oder $A < \frac{b}{a}$ ist. Für $A > \frac{b}{a}$ erhält der Durchmesser eine solche Neigung gegen die Abscissenaxe, also überhaupt eine solche Lage UU' gegen die Curve, dass er diese nicht treffen kann, und sonach imaginär wird.

7. Für $A^2 a^2 = b^2$ oder $A = \pm \frac{b}{a}$ werden die Coordinaten dieser Durchschnittspuncte H, H' Unendlich. Zieht man daher einen Diameter, welcher gegen XX' so geneigt ist, dass die Tangente des Neigungswinkels den Werth $A = + \frac{b}{a}$ oder $- \frac{b}{a}$ erhält; so trifft diese die Hyperbel auf beiden Seiten erst in unendlicher Entfernung. Diese beiden merkwürdigen Durchmesser werden aber construirt, indem man in dem einen Scheitelpuncte, z. B. A, auf XX' ein Perpendikel errichtet, darauf auf- und abwärts die Stücke $AQ = AQ' = b$ abschneidet, und die Puncte Q Q' mit dem Mittelpuncte C verbindet; denn man hat für diese Verbindungslinien QCq und $Q'Cq'$ sofort:

$$tang\, QCA = + \frac{b}{a} \text{ und } tang\, Q'CA = - \frac{b}{a}.$$

Für irgend eine Abscisse $CP = x$ ist, wenn man die zugehörige Ordinate PM der Curve durch y und jene PN der eben genannten Geraden CQ durch y' bezeichnet: $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$ (Gleichung II.) und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$ (quadrirte Gleichung der Geraden CQ); es ist also auch, wenn man abzieht: $y'^2 - y^2 = b^2$ oder $(y' + y)(y' - y) = b^2$, und daraus $y' - y$, d. i. $NM = \frac{b^2}{y' + y}$. Da nun zufolge der Gleichungen der Hyperbel und der Geraden CQ, y und y' mit x fortwährend zunehmen; so nimmt, während x über alle Grenzen hinaus wächst, NM unendlich ab und verschwindet für $x = \infty$ gänzlich. Diese beiden Geraden QCq und $Q'Cq'$ besitzen also die merkwürdige Eigenschaft, dass sich ihnen

die Aeste der Hyperbel immer mehr und mehr nähern, ohne von diesen jemals erreicht zu werden; aus diesem Grunde werden sie Asymptoten und der von ihnen eingeschlossene Winkel Asymptotenwinkel genannt.

8. Aus 6. folgt, dass diese Asymptoten zugleich die Grenzen zwischen den reellen und imaginären Durchmessern der Hyperbel bilden.

9. Für $b = a$ wird die Hyperbel gleichseitig genannt; ihre Gleichung ist: $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$. Der Asymptotenwinkel ist ein Rechter; denn man hat $tang\, QCA = \frac{b}{a} = 1$, also $QCA = 45^0$ und $QCQ' = 2\,QCA = 90^0$.

§. 475. Hat man bei Auflösung einer Aufgabe und der Anwendung rechtwinkeliger Coordinaten die Gleichung (r) $Ay^2 - Bx^2 = -C$ erhalten, so ist ihr geometrischer Ort, wie die Vergleichung dieser, mit der Gleichung II. (§. 471) [wenn man beide auf die Form bringt: $\frac{A}{C}y^2 - \frac{B}{C}x^2 = -1$ und $\frac{1}{b^2}y^2 - \frac{1}{a^2}x^2 = -1$] zeigt, eine Hyperbel, für welche die Halbaxen die Werthe haben:

$$a = \sqrt{\left(\frac{C}{B}\right)},\quad b = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)}.$$

Sind nun die beiden Axen $AA' = 2a$ und $BB' = 2b$
Fig. 53. (Fig. 53) aufgetragen, so findet man zufolge der Gleichung $c = CF = CF' = \sqrt{a^2 + b^2}$ (§. 473) die Brennpuncte, indem man aus C mit der Entfernung $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ die Abscissenaxe in den Puncten F und F' durchschneidet.

Anmerk. Da in der Hyperbel $a >, =$ oder $< b$ sein kann; so kann auch in der Gleichung (r) hinsichtlich der Grösse, A gegen B wie immer beschaffen sein.

Wäre aber C negativ, also die Gleichung von der Form $Ay^2 - Bx^2 = C$; so dürfte man nur x und y mit einander vertauschen, um dadurch $-By^2 + Ax^2 = C$ oder $By^2 - Ax^2 = -C$, also abermals die Gleichung einer Hyperbel zu erhalten, mit dem einzigen Unterschiede, dass nun die Abscissen auf der zweiten Axe gezählt werden, also bei der Construction dieser Hyperbel, ihre erste Axe auf die Ordinaten- und zweite Axe auf die Abscissenaxe aufzutragen kommt; dabei ist nun

$$a = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)} \text{ und } b = \sqrt{\left(\frac{C}{B}\right)}.$$

Als Beispiele können die Gleichungen dienen: $2y^2 - 4x^2 = -7$ und $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^2 = 2$, deren geometrische Oerter sofort Hyperbeln

sind, bei welchen beziehungsweise die 1. und 2. Axe $\sqrt{7}$ und $\sqrt{14}$ auf die Abscissen- und Ordinatenaxe, dann 4 und $2\sqrt{6}$ auf die Ordinaten- und Abscissenaxe fallen [II., 153].

§. **476**. Um endlich noch für die Hyperbel die Gleichung zu entwickeln, bei welcher der Ursprung der Coordinaten in einem der Scheiteln A' oder A liegt, darf man wieder nur in der obigen Gleichung II. (§. 471) statt x, im erstern Falle $x-a$ und im letztern $x+a$ setzen. Man erhält in diesen beiden Fällen, wenn man die Gleichung immer gleich nach y auflöst, beziehungsweise:

$$(2)\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - 2ax} \quad \text{und} \quad (2')\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + 2ax}.$$

[Auch wird jene (2) unmittelbar aus ihrer analogen der Ellipse (2), §. 467 durch die in §. 473 bemerkte Substitution von $b\sqrt{-1}$ statt b erhalten.]

Die Parabel.

§. **477**. Erklärung. Die Parabel ist eine Curve von solcher Beschaffenheit, dass jeder ihrer Puncte M (Fig. 54) Fig. 54.
von einer festen Geraden CC' eben so weit, als von einem bestimmten fixen Punct F absteht, also die Relation besteht: $MD = MF$. Dieser feste Punct F wird wieder Brennpunct, jede aus demselben an die Curve gezogene Gerade FM Leitstrahl (Radiusvector), so wie endlich die feste Gerade CC' Leitlinie (Directrix) genannt.

§. **478**. Die Parabel kann demnach mittelst Puncte auf folgende Art construirt werden: durch den Brennpunct F ziehe man auf die gegebene Leitlinie CC' das Perpendikel BFX von unbestimmter Länge und halbire das Stück BF in A; so ist fürs Erste A ein Punct der Curve, weil $AF = AB$ ist.

Um ferner irgend einen andern Punct der Parabel zu erhalten, errichte man in einem beliebigen Puncte P der von B über F hinaus verlängerten Geraden AX, auf diese ein Perpendikel LPL' und durchschneide dasselbe aus F

mit dem Halbmesser BP in M und m; so sind dieses 2 neue, und zwar gegen die Gerade AX symmetrisch liegende Puncte der Curve; denn man hat $MF = PB = MD$, oder es steht M von F eben so weit als von CC' ab; dasselbe gilt auch vom Puncte m. — Errichtet man nun diese Perpendikel in immer neuen Puncten der AX, und verfährt mit jedem auf die eben beschriebene Weise; so erhält man eine Reihe von Puncten, welche (wenn sie einander hinlänglich nahe liegen), durch eine ununterbrochene Linie verbunden, die Curve $KMAmK'$ oder die Parabel geben.

§. **479**. Durch eine stetige Bewegung kann jeder der beiden Aeste der Parabel beschrieben werden, wenn man die Einrichtung trifft, dass von einem (rechtwinkeligen) Winkelhaken GDH, der eine Schenkel DG an der Leitlinie CC' hingleitet, während an einem Faden von der Länge des zweiten Schenkels DH, dessen eines Ende im Brennpuncte F, das andere in H (als Endpunct des letztern Schenkels) befestigt ist, ein Zeichenstift angelegt und längs der Kante dieses Schenkels HD so geführt wird, dass dabei das Fadenstück FM immer straff angespannt bleibt Denn es ist dann in jeder Lage des Winkelhakens, in welcher der beschreibende Stift in M ist, die Fadenlänge $FM + MH = DM + MH$, also immer $MF = MD$.

Durch gehöriges Umkehren des Winkelhakens erhält man eben so den unter der AX liegenden Ast der Curve.

§. **480**. Um für die Parabel eine einfache Gleichung zu finden, nehmen wir die Gerade AX, gegen welche sofort je zwei Puncte der Curve, wie M und m, symmetrisch liegen, zur Abscissenaxe, und den Punct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; setzen die gegebene Entfernung $AF = AB = \frac{1}{2}BF = c$, und bezeichnen die Coordinaten eines beliebigen Punctes M der Curve durch x, y, so wie endlich den zugehörigen Leitstrahl FM durch u. Diess vorausgesetzt, ist die Gleichung des Perpendikels LPL', als einer mit der Ordinatenaxe in dem Abstand

$u - c$ parallelen Geraden [indem $AP = BP - AB = u - c$ ist, §. 394, (7)]: $x = u - c$; ferner die Gleichung des aus F mit dem Halbmesser u beschriebenen Kreisbogens (mit welchem das vorige Perpendikel durchschnitten wurde, §. 402): $(x-c)^2 + y^2 = u^2$. Die Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen gibt, wegen $u = c + x$, sofort $(x-c)^2 - (c+x)^2 + y^2 = 0$, d. i. $y^2 = 4cx$, oder, wenn man $4c = p$ setzt, wodurch (m) $c = AF = \frac{1}{4}p$ und (n) $u = x + \frac{1}{4}p$ wird, auch III. $y^2 = px$, als Gleichung der Parabel, bezogen auf die Coordinatenaxen AX, YAY'.

§. **481.** Für ein dem eben genannten paralleles Axensystem, auf welches bezogen der vorige Anfangspunct A die Coordinaten d und δ besitzt, erhält man als allgemeinere Gleichung der Parabel: III'. $(y-\delta)^2 = p(x-d)$.

§. **482.** Die Gleichung III., nach y aufgelöst, erhält man: (1) $y = \pm\sqrt{px}$, welche letztere Gleichung sofort ganz einfach folgende Haupteigenschaften der Parabel zu erkennen gibt:

1. Die Curve besteht aus zwei gegen die Abscissenaxe symmetrische Aeste, welche sich nur nach der Seite der positiven x, und zwar bis ins Unendliche erstrecken. Die Gerade AX, welche sonach die mit der Ordinatenaxe YY' parallelen Sehnen, wie Mm, perpendiculär halbirt, heisst wieder Axe der Parabel.

2. Da für $x = 0$, $y = \pm 0$ wird; so wird die Curve im Scheitel A von der Ordinatenaxe berührt (§. 430, Anmerkung).

3. Für $x = \frac{1}{4}p$, welches sofort der Abstand des Brennpunctes F vom Scheitel A ist [§. 480, (m)], wird $y = \pm\frac{1}{2}p$; die im Brennpuncte errichtete Sehne ist also, als doppelte Ordinate $2y$, sofort $= p$, aus welchem Grunde auch diese Sehne p der Parameter der Parabel genannt wird.

§. **483.** Ist man bei Auflösung einer Aufgabe auf die Gleichung $y^2 = Ax$ gekommen, so ist ihr Ort, wie aus der Gleichung III. (§. 480) folgt, eine Parabel vom Parameter A, deren Axe auf der Abscissenaxe in der Richtung der positiven x und Scheitel im Ursprunge der rechtwinkeligen Coordinaten liegt. Trägt man also auf der Abscissenaxe vom Ursprunge A aus, die Abscisse $\frac{1}{4}A$ auf; so hat man

den Brennpunct, und dadurch auch das Mittel, die Parabel nach §. 478 oder §. 479 construiren zu können.

Anmerk. Wäre A negativ, so würde die Axe der Parabel auf der Seite der negativen x liegen. Hätte man hingegen die Gleichung $x^2 = \pm Ay$, so würde die Axe der entsprechenden Parabel in der Ordinatenaxe, und zwar beziehungsweise in der Richtung der positiven oder negativen y liegen.

Als Beispiele können die Gleichungen dienen: $y^2 = 8x$, $y^2 = -\frac{2}{3}x$ und $x^2 = 3y$; sie entsprechen Parabeln, deren Axen beziehungsweise auf der Abscissenaxe nach der Seite der positiven, dann der negativen x und endlich auf der Ordinatenaxe in der Richtung der positiven y liegen, und die Parameter 8, $\frac{2}{3}$ und 3 besitzen. [II., 158.]

§. 484. Um die wechselseitige Beziehung ersichtlich zu machen, welche zwischen den eben abgehandelten 3 Curven besteht, wollen wir in den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel [§. 467 und §. 476, (2), wenn man quadrirt] $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax)$ sofort (s) $\frac{2b^2}{a} = p$, also $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$ setzen; dadurch erhält man für die genannten Gleichungen: $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ und $y^2 = -\frac{p}{2a}(2ax - x^2)$. Lässt man nun in der erstern a immerfort zunehmen, während p ungeändert bleiben soll [was nach (s) bei gehöriger Annahme von b immer möglich ist], so wird endlich für $a = \infty$ der Quotient $\frac{px^2}{2a} = 0$, und die Gleichung der Ellipse verwandelt sich in die der Parabel $y^2 = px$, so, dass man also die Parabel als eine Ellipse ansehen kann, deren erste Axe unendlich gross ist, und Mittelpunct daher vom Scheitel ebenfalls unendlich weit absteht.

Es lassen sich demnach diese 3 Curven durch die einzige Gleichung $y^2 = \pm \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ darstellen, in welcher das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, und in welcher für die Parabel $2a = \infty$ mit dem obern Zeichen (wenn nämlich ihre Axe in der Richtung der positiven x liegen soll) zu nehmen ist.

§. **485.** Die im Brennpuncte F oder F' errichtete Ordinate ist in der Ellipse [dazu darf man in (1), §. 465, nur $x = \pm c$, also $x^2 = c^2 = a^2 - b^2$ setzen]:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b^2}{a},$$

und in der Hyperbel [eben so in (1), §. 474, $x = \pm c$, also $x^2 = c^2 = a^2 + b^2$ gesetzt]:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Es ist also in beiden Curven die im Brennpuncte errichtete perpendiculäre Sehne oder doppelte Ordinate gleich $\frac{2b^2}{a} = p$ [Gl. (s), §. 484], und da diese Sehne, wie in der Parabel, auch hier Parameter genannt wird; so folgt, da man aus der vorigen Gleichung die Proportion $2a : 2b = 2b : p$ hat, dass in der Ellipse und Hyperbel der Parameter eine dritte Proportionallinie zur ersten und zweiten Axe ist.

§. **486.** Schliesslich folgt, dass die genannten 3 Curven durch die Gleichung (A) $y^2 = px + qx^2$ dargestellt werden können, in welcher p für alle 3 Curven den Parameter oder die im Brennpuncte auf die erste Axe perpendiculäre Sehne bezeichnet, und wobei für die Parabel $q = 0$, für die Ellipse $q = -\frac{p}{2a} = -\frac{b^2}{a^2}$, negativ, und für die Hyperbel $q = +\frac{p}{2a} = +\frac{b^2}{a^2}$, posisiv ist. [II., 160.]



Siebentes Capitel.

Ueber die Linien der zweiten Ordnung oder die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

Eintheilung der krummen Linien in verschiedene Ordnungen.

§. 487. Da die im §. 447 zur Transformation der Coordinaten entwickelten Formeln (1) vom ersten Grade sind, so kann der Grad einer Gleichung zwischen x und y, bei dem Uebergange von einem Parallel-Coordinatensystem auf ein ähnliches, durchaus nicht geändert werden. Denn ist z. B. die ursprüngliche Gleichung vom n^{ten} Grad, enthält sie also Glieder wie Ax^n, By^n und $Cx^p y^q$, wo $p + q$ höchstens $= n$ ist; so entstehen durch die Substitution der Werthe von x und y aus den genannten Gleichungen (I) offenbar wieder Glieder von der Form $A'x'^n$, $B'y'^n$ und $C'x'^p y'^q$, und es bleibt sonach die transformirte Gleichung in x', y' ebenfalls wieder vom n^{ten} Grad. (Vergl. §. 393, Anmerk. und §. 402, Anmerk. 2.)

§. 488. Da also der Grad der Gleichung einer regelmässigen, d. i. nach irgend einem Gesetze gebildeten Curve keineswegs von dem willkürlich gewählten Coordinatensystem, sondern wesentlich von der Natur dieser krummen Linie selbst abhängt; so kann man alle solche Curven sehr passend und charakteristisch nach dem Grade ihrer entsprechenden Gleichungen eintheilen. Es werden auch in der That die Linien, je nachdem die entsprechende algebraische, auf eine rationale Form gebrachte Gleichung vom 1., 2., ... n^{ten} Grad ist, in Linien der 1., 2.,... n^{ten} Ordnung getheilt; es gehören sonach die gerade Linie zu den Linien der ersten, der Kreis, die Ellipse, Hyperbel und Parabel zu den Linien der zweiten Ordnung.

Anmerk. Linien, denen transcendente Gleichungen entsprechen, heissen transcendente Curven.

§. **489**. Aus dieser Eintheilung folgt unmittelbar, dass eine Linie der n^{ten} Ordnung von einer geraden Linie höchstens in n Puncten geschnitten werden kann. Denn nimmt man die schneidende Gerade zur Abscissenaxe, setzt also in der gegebenen Gleichung, die sofort zwischen x und y vom n^{ten} Grad ist, um die Durchschnittspuncte zu erhalten, $y=0$; so erhält man eine Gleichung in x, die sonach höchstens vom n^{ten} Grad sein, also für x höchstens n Werthe liefern kann; und da jeder derselben, wenn er reell ist, (als entsprechende Abscisse) einen Durchschnittspunct dieser Geraden mit der Curve anzeigt, so kann es in der That nicht mehr als n Durchschnittspuncte geben. Weniger als n Durchschnittspuncte (wenn in der Gleichung der Curve x wirklich mit dem höchsten Exponenten n erscheint) finden Statt, wenn die Gleichung in x auch imaginäre Wurzeln (die sofort, §. 164, immer paarweise vorkommen müssen) besitzt, oder, wenn die Abscissenaxe als schneidende Gerade, eine solche Lage hat, dass einer oder mehrere dieser Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, oder dafür $x=\infty$ wird, also diese Durchschnitte eigentlich gar nicht Statt finden.

§. **490**. Da die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen x und y die Form hat: $Ay+Bx+C=0$, dieses aber (§. 414) die Gleichung einer geraden Linie ist; so folgt, dass zu den Linien der ersten Ordnung nur die Gerade gehört.

§. **491**. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y ist von der Form:

(1) $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$

und diese Gleichung, in welcher wir die sämmtlichen Coefficienten als reelle Grössen voraussetzen, ist es, deren geometrische Bedeutung wir in diesem Capitel erörtern wollen; folglich sind es die Linien zweiter Ordnung, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben.

In Absicht auf die folgenden Transformationen wird es gut sein, gleich im Voraus zu bemerken, dass wir darauf ausgehen zu zeigen,

dass sich diese allgemeine Gleichung (1) durch passende Transformationen immer auf eine der beiden folgenden: $My^2 + Nx^2 = P$ und $y^2 = Qx$, von denen (§§. 462, 471, 480) die erstere einer Ellipse oder Hyperbel und die letztere einer Parabel angehört, reduciren lasse: dass also diese 3 Curven mit Einschluss ihrer Varietäten den Inbegriff der Linien der zweiten Ordnung ausmachen.

Vereinfachung der vorigen Gleichung (1) durch Transformation der Coordinaten.

§. **492.** Man kann immerhin annehmen, dass sich die Curve oder Gleichung (1) auf rechtwinkelige Coordinaten bezieht [indem beim Uebergange von schiefwinkeligen auf rechtwinkelige Coordinaten die Form dieser Gleichung (1) die nämliche bleibt], und diese, um das Glied in xy hinauszuschaffen, für ein neues rechtwinkeliges Axensystem, welches den nämlichen Ursprung besitzt, transformiren. Dazu darf man nur in dieser Gleichung (1) für x und y die Werthe aus §. 449, d. i. $x \cos\alpha - y \sin\alpha$ und $x \sin\alpha + y \cos\alpha$, wobei für unsern Zweck α eine willkürliche, noch unbestimmte Grösse ist (vergl. §. 446), substituiren, wodurch man, wenn Kürze halber

$$A \cos\alpha^2 - B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin\alpha^2 = M,$$
$$A \sin\alpha^2 + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos\alpha^2 = N,$$
$$2A \sin\alpha \cos\alpha - B \sin\alpha^2 + B \cos\alpha^2 - 2C \sin\alpha \cos\alpha = L,$$
$$D \cos\alpha - E \sin\alpha = R \quad \text{und} \quad D \sin\alpha + E \cos\alpha = S$$

gesetzt wird, die Gleichung erhält:

$$My^2 + Lxy + Nx^2 + Ry + Sx + F = 0.$$

Um nun daraus das Glied in xy wegzuschaffen, darf man bloss die unbestimmte Grösse α aus der Bedingungsgleichung $L = 0$ bestimmen. Diese Gleichung ist aber, wenn man substituirt und berücksichtigt, dass $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ und $\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = \cos 2\alpha$ ist, sofort $(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0$, und daraus folgt: (n) $\tang 2\alpha = -\frac{B}{A - C}$.

Da aber die Tangente jeden reellen positiven oder negativen Werth von Null bis Unendlich annehmen kann, so gibt es, die (reellen) Coefficienten A, B, C mögen wie im-

mer beschaffen sein, immer einen Winkel α, wofür diese Bedingungsgleichung besteht, also aus der vorigen Gleichung das Glied in xy verschwindet und sofort die Form:
(2) $My^2 + Nx^2 + Ry + Sx + F = 0$ erhält.

Da in den Coefficienten M, N, R, S dieser Gleichung, wie die vorigen Ausdrücke zeigen, von α bloss der Sinus und Cosinus vorkommt, ferner (§. 24) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)}$ und (§. 18) $\sin 2\alpha = \frac{\tang 2\alpha}{\sqrt{1 + \tang 2\alpha^2}}$, $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang 2\alpha^2}}$, also, wenn man aus ($n$) substituirt:

(p) $\sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$ und $\cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$

ist; so können diese genannten Coefficienten leicht bestimmt werden.

§. **493**. Um ferner aus der vorigen Gleichung (2) auch noch die Glieder in x und y wegzuschaffen, nehmen wir zu einer neuen Transformation unsere Zuflucht, bei welcher nur der Ursprung verändert, die neuen Axen aber den alten parallel bleiben sollen. Dazu wird man also in der genannten Gleichung (2) (§. 448) statt x und y, $x + d$ und $y + \delta$ setzen; dadurch erhält man:

$$(3)\quad My^2 + Nx^2 + (2M\delta + R)y + (2Nd + S)x + M\delta^2 + Nd^2 + R\delta + Sd + F = 0.$$

Um aber aus dieser Gleichung die genannten Glieder in x und y zu eliminiren, muss man die hier noch unbestimmten Grössen d und δ aus den beiden Bedingungsgleichungen $2Nd + S = 0$ und $2M\delta + R = 0$ bestimmen, wodurch man erhält: (q) $d = -\frac{S}{2N}$ und $\delta = -\frac{R}{2M}$.

In Bezug auf diese Werthe von d und δ lassen sich jedoch die nachstehenden 3 Hypothesen aufstellen.

§. **494**. 1) M und N sind von Null verschieden, d. i. es fehlt in der Gleichung (2) (§. 492) weder das Glied in y^2 noch jenes in x^2.

In diesem Falle sind d und δ reelle endliche Grössen, und die Gleichung (3) erhält die einfache Form:

$$(4)\quad My^2 + Nx^2 = P.$$

§. **495**. 2) Es ist entweder M oder N Null, d. h. es fehlt in der Gleichung (2) entweder das Glied in y^2 oder jenes in x^2.

In diesem Falle wird, wenn z. B. $N = 0$ ist, hingegen M, R, S oder wenigstens M und S nicht Null sind, δ reell und endlich, dagegen $d = \infty$, zum Beweis, dass die beabsichtigte Transformation in diesem Falle nicht vorgenommen werden kann. Dagegen kann man jetzt nebst dem Gliede in y auch jenes ohne x und y wegschaffen; denn dazu darf man die Grössen d und δ nur aus den Gleichungen $2M\delta + R = 0$ und $M\delta^2 + R\delta + Sd + F = 0$ bestimmen, wodurch man

$$\delta = -\frac{R}{2M} \text{ und } d = -\frac{M\delta^2 + R\delta + F}{S}$$

(welche Werthe, der Annahme zufolge, sofort reell und endlich sind), und damit aus (3) die Gleichung $My^2 + Sx = 0$, oder für $-\frac{S}{M} = Q$, jene (4') $y^2 = Qx$ erhält, in welche nun die obige Gleichung (2) übergeht. — Wäre dagegen $M = 0$ und N, R, S oder wenigstens N und R von Null verschieden, wodurch dann in (q) (§. 493) $\delta = \infty$ würde; so liesse sich auf die nämliche Art die Gleichung (2) auf die Form $Nx^2 + Ry = 0$, oder, wenn man $-\frac{R}{N} = Q'$ setzt, auf jene $x^2 = Q'y$ bringen, eine Gleichung jedoch, welche schon in der vorigen (4') enthalten ist, indem man darin nur x und y, d. i. die beiden Coordinatenaxen mit einander vertauschen darf.

Anmerk. Die Hypothese von $M = 0$ und $N = 0$, nach welcher in der obigen Gleichung (2) die Glieder in y^2 und x^2 gleichzeitig wegfielen, kann hier nicht Statt haben; denn setzt man in diesen beiden Gleichungen für M und N die Werthe aus §. 492, so erhält man ganz einfach daraus $A + C = 0$ und $tang\, 2\alpha = \frac{A - C}{B}$, welcher Werth mit jenem (n) (desselben Paragraphes) verglichen, auf die Gleichung $(A - C)^2 + B^2 = 0$ führt, und da diese nur für $A - C = 0$ und $B = 0$ bestehen kann; so folgt $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, und es würde diese Hypothese die allgemeine Gleichung (1) beschränken und auf einen speciellen Fall (auf jenen der geraden Linie) reduciren.

§. **496**. 3) Es ist $N=0$ und $S=0$, oder auch $M=0$ und $R=0$, so, dass durch das Wegschaffen des Gliedes in xy aus der Gleichung (1), zugleich auch die Glieder in x^2 und x oder y^2 und y wegfallen.

Im erstern Falle erhält δ (§. 493, q) einen reellen endlichen Werth $= -\frac{R}{2M}$ und d erscheint in der Form $\frac{0}{0}$. Um die Bedeutung dieses letzteren Werthes zu finden, gehen wir auf die Gleichung (2) zurück; diese verwandelt sich für die gegenwärtige Hypothese in jene (5) $My^2+Ry+F=0$, und es folgt daraus $y=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4MF}}{2M}$, also (§. 394, 5) die Gleichung eines Systemes zweier mit der Abscissenaxe parallelen Geraden. Die Gleichung (5) stellt also eigentlich keine Curve, sondern diese beiden parallelen Geraden dar, welche sofort als Varietät in der allgemeinen Gleichung der Linien zweiter Ordnung enthalten sind.

Im 2. Falle findet ganz dasselbe Statt, nur dass dabei x und y, folglich auch die beiden Axen, mit einander zu verwechseln sind; man hat nämlich $d=-\frac{S}{2N}$, $\delta=\frac{0}{0}$, und die Gleichung (2) geht jetzt in jene (5′) $Nx^2+Sx+F=0$, nämlich in die Gleichung eines Systemes zweier mit der Ordinatenaxe parallelen Geraden über.

§. **497**. Aus diesen Untersuchungen geht also hervor, dass die allgemeine Gleichung (1) des 2. Grades zwischen x und y durch eine zweimalige Transformation immer auf eine der beiden Gleichungen: $My^2+Nx^2=P$ und $y^2=Qx$, die wir sogleich weiter discutiren werden, gebracht werden könne, den ganz besondern Fall ausgenommen, in welchem durch das Hinausschaffen des Gliedes in xy aus der ursprünglichen Gleichung (1), zugleich auch die beiden Glieder mit der 2. und 1. Potenz von x oder y verschwinden, in welchem Falle sich dann die Curve auf ein System von zwei parallelen Geraden reducirt.

§. **498**. Discussion der Gleichung

(1) $My^2+Nx^2=P$.

Da man in dieser Gleichung den Coefficienten M immer als positiv voraussetzen kann (weil, wenn M negativ ist, nur die Zeichen der ganzen Gleichung geändert werden dürfen); so haben wir nur noch in Betreff der Grössen N und P folgende Hypothesen aufzustellen:

1. Es sind auch N und P positiv. In diesem Falle entspricht diese Gleichung (1) (§. 462) einer Ellipse, welche noch als specielle Fälle folgende Varietäten darbietet: *a*) wenn $M = N$, so geht (§. 406) die Ellipse in einen Kreis über. *b*) Wäre zwar N positiv, dagegen (gegen die vorige Annahme) P negativ; so würde in (1) y, folglich auch die ganze Curve, imaginär. *c*) Wenn (immer für N positiv) $P = 0$ ist, so zerfällt die Gleichung (1) in die beiden folgenden: $My^2 = 0$ und $Nx^2 = 0$, d. i. (weil M und N von Null verschieden) in $y = 0$, $x = 0$, und es reducirt sich sofort (§. 387) die Curve auf einen Punct (hier auf den Anfangspunct der Coordinaten).
2. Wenn N und P negativ sind. In diesem Falle stellt die Gleichung (1) eine Hyperbel dar, bei welcher (§. 471) die Abscissen auf der ersten oder Hauptaxe gezählt werden.
3. Wenn N negativ und P positiv ist. In diesem Falle gehört die Gleichung (1) (§. 475, Anmerk.) einer Hyperbel an, bei welcher die Abscissen auf der 2. oder conjugirten Axe gezählt werden. Als Varietäten der Hyperbel können angesehen werden: *a*) wenn $N = -M$, wofür die Hyperbel gleichseitig wird; *b*) wenn $P = 0$ ist, wodurch $My^2 - Nx^2 = 0$ oder $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{N}{M}\right)}$, also die Curve in ein System zweier im Ursprunge sich schneidender Geraden übergeht.

Anmerk. Noch kürzer und bestimmter lassen sich diese Fälle in folgender Weise unterscheiden:

1. Hypothese: N positiv, dabei ist P entweder *a*) positiv, oder *b*) Null, oder endlich *c*) negativ; diese Hypothese entspricht der Ellipse.

2. Hypothese: N negativ, dabei ist P entweder *a*) negativ, *b*) positiv und *c*) Null; entspricht der Hyperbel.
3. Hypothese: N Null; dieser Hypothese entspricht die Parabel.

§. **499.** Discussion der Gleichung

$$(2)\quad y^2 = Qx.$$

1. Ist Q positiv, so ist (§. 480) der Ort dieser Gleichung (2) eine Parabel vom Parameter Q, deren Axe in der Richtung der positiven x liegt.
2. Ist Q negativ, so stellt diese Gleichung eine Parabel vom Parameter Q dar, deren Axe wieder auf der Abscissenaxe, aber in der Richtung der negativen x liegt.

Als Varietäten der Parabel sind die geometrischen Grössen anzusehen, welche in der oben in §. 496 für ($N = 0$ ist der allgemeine Charakter dieser Curve) $N = 0$ und $S = 0$ gefundenen Gleichung $y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4MF}}{2M}$ enthalten sind, nämlich, je nachdem $R^2 - 4MF$ positiv, Null oder negativ ist: *a*) ein System zweier parallelen Geraden, *b*) eine einzige (mit der Abscissenaxe parallele) Gerade und *c*) zwei imaginäre gerade Linien.

§. **500.** Aus den Discussionen dieser beiden §§. geht also endlich hervor, dass die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Grössen x, y geometrisch nichts anderes bedeuten könne, als: die Ellipse mit dem Kreise, dem Puncte und einer imaginären Curve als Varietäten; die Hyperbel mit der gleichseitigen und dem Systeme zweier sich schneidender Geraden als Varietäten, und endlich die Parabel mit dem Systeme zweier parallelen Geraden, einer Geraden und zweier imaginären gerader Linien als Varietäten.

Anmerk. Da aus den Relationen für M und N in §. 492 ganz einfach folgt: $M + N = A + C$ und $M - N = (A - C)\cos 2\alpha - B \sin 2\alpha$, oder wenn man für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ die Werthe aus (p) desselben §. setzt und reducirt, $M - N = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$, sofort also $M = \frac{1}{2}(A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2})$ und $N = \frac{1}{2}(A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2})$,

also $MN = \frac{4AC - B^2}{4}$ ist; so kann man auch sagen, dass die allgemeine Gleichung $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ den Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln entspricht, je nachdem die Differenz $B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder Null ist.

§. **501.** Die oben in §. 492 angegebenen Werthe von M und N verhelfen uns zugleich zu einem einfachen und charakteristischen Kennzeichen für diese drei erörterten Curven. Addirt man nämlich die beiden genannten Gleichungen von M und N, so erhält man, wegen $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$, sofort $M + N = A + C$. Dagegen erhält man durch Subtraction dieser Gleichungen, wegen $\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = \cos 2\alpha$ und $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, sofort $M - N = (A - C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha$, oder, wenn man für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ die oben in (p) (§. 492) aufgestellten Werthe setzt und reducirt, auch

$$M - N = \sqrt{(A - C)^2 + B^2}.$$

Da man nun von M und N die Summe und den Unterschied kennt, so ist $M = \frac{1}{2}[A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}]$ und $N = \frac{1}{2}[A + C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}]$, mithin

$$MN = \tfrac{1}{4}(4AC - B^2).$$

Aus dieser letztern Gleichung folgt aber, dass M und N einerlei Zeichen besitzen, wenn $4AC - B^2$ positiv, oder, was dasselbe ist, $B^2 - 4AC$ negativ, dagegen verschiedene Zeichen haben, wenn diese Differenz $B^2 - 4AC$ positiv, und dass endlich M oder N Null ist, wenn $B^2 - 4AC = 0$ ist. Diese Ergebnisse mit denen der beiden vorigen §. zusammengehalten, geben sofort für diese drei Curven folgende Kennzeichen: die allgemeine Gleichung (1) $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \ldots = 0$ gehört einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel mit Einschluss ihrer Varietäten an, je nachdem $B^2 - 4AC <, >$ oder $=$ Null ist.

Der Mittelpunct der Linien zweiter Ordnung.

§. **502**. Wir wollen ferner noch, ebenfalls durch eine passende Transformation der Coordinaten, untersuchen, welche von den Linien zweiter Ordnung einen Mittelpunct, d. h. einen solchen Punct besitzen, in welchem alle Sehnen der

Curve halbirt werden. Dazu verändern wir den Ursprung und setzen in der allgemeinen Gleichung (1), §. 491, $x+d$ statt x und $y+\delta$ statt y; so entsteht die Gleichung (2) $Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0$, in welcher A, B, C noch die nämlichen Coefficienten der ursprünglichen Gleichung sind, dagegen, wie man sehr leicht findet,

$$D'=2A\delta+Bd+D,\quad E'=2Cd+B\delta+E \text{ und}$$
$$F'=A\delta^2+Bd\delta+Cd^2+D\delta+Ed+F \text{ ist.}$$

Man bestimme nun zuerst die hier noch unbestimmten Grössen d und δ so, dass die Glieder in x und y verschwinden, bestimme diese also aus den Gleichungen:

$$2A\delta+Bd+D=0 \text{ und } 2Cd+B\delta+E=0;$$

so erhält man:

$$(3)\ d=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC} \text{ und } \delta=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}.$$

Nach dieser Transformation ist aber die Gleichung der Linien zweiter Ordnung: (4) $Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0$, und da man darin ohne Aenderung $-x$ und $-y$ statt $+x$ und $+y$ setzen kann; so folgt, dass jedem Puncte $x=+\alpha$, $y=+\beta$ der Curve ein zweiter $x=-\alpha$, $y=-\beta$ entspricht, welcher mit dem erstern und dem Ursprung in gerader Linie liegt, und dass diese beiden Puncte $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$ vom Ursprunge gleich weit, jedoch nach entgegengesetzten Richtungen genommen, abstehen; es werden demnach alle durch den neuen, der Gleichung (4) zum Grunde liegenden Anfangspuncte gezogenen Sehnen der Curve in diesem halbirt, folglich ist dieser Punct zugleich der Mittelpunct der Curve. Nun zeigen aber die Ausdrücke (3) für die Coordinaten dieses Mittelpunctes (oder neuen Ursprunges), dass die angezeigte Transformation nur für die Ellipse und Hyperbel, keineswegs aber auch für die Parabel, für welche d und δ, wegen (§. 501) $B^2-4AC=0$, Unendlich werden, möglich ist: also haben auch bloss die Ellipse und Hyperbel einen Mittelpunct (man müsste sich denn einen solchen Punct für die Parabel in unendlicher Entfernung denken wollen).

Achtes Capitel.

Ueber die Identität der Linien zweiter Ordnung mit den Kegelschnittslinien.

Fig. 55. §. **503.** Es sei $OKQLR$ (Fig. 55) ein gerader oder schiefer Kegel von kreisförmiger Basis, dessen Spitze in O ist, und dessen krumme Oberfläche man sich der nöthigen Allgemeinheit wegen durch die Bewegung einer unbegrenzten geraden Linie, welche beständig durch einen fixen Punct O (die Spitze) gehend, mit einem ihrer Puncte K nach und nach die Kreisperipherie $KQLRK$ (der Basis) durchläuft, entstanden denken muss. Ferner seien, nachdem der Kegel durch eine Ebene beliebig geschnitten worden, IH die Richtung des Durchschnittes dieser, mit der verlängerten Ebene der Basis, und $AMBM'A$ die Durchschnittslinie dieser schneidenden Ebene mit der Kegelfläche, nämlich der Kegelschnitt. Um die Gleichung desselben zu finden, fälle man in der Ebene der Basis, aus dem Mittelpuncte C auf IH das Perpendikel CG, und lege durch dasselbe und die Axe des Kegels OC eine Ebene; so hat man einen Haupt- oder Axenschnitt des Kegels, welcher zugleich die Ebene des Kegelschnittes nach der Geraden BAG schneidet, die beim geraden Kegel, dessen Axe OC auf der Basis perpendiculär steht, immer auf IH senkrecht, hingegen beim schiefen K., eine einzige Lage (in welcher die Ebene OCG durch das aus O auf die Basis gefällte Perpendikel geht) ausgenommen, auf dieser Geraden schief steht.

§. **504.** Wir nehmen nun diese Gerade GAB zur Abscissen-, und die durch A (in der Ebene des Kegelschnittes) mit IH parallele Gerade YY' zur Ordinatenaxe, so, dass wir also bei einem geraden K. immer ein rechtwinkeliges, und bei einem schiefen K. im Allgemeinen ein schiefwinkeliges Coordinaten-System erhalten. Man lege ferner durch einen beliebigen Punct P der Geraden AB eine Ebene parallel mit der Basis des K., so ist bekanntlich

der entstehende Schnitt $DMEM'D$ ein Kreis. Diese Ebene schneidet die Axen-Ebene nach der Geraden DPE, welche mit KL parallel ist, und zugleich die Ebene des Kegelschnittes in der Geraden MPM', die mit der Durchschnittslinie HI, also auch mit YY' parallel ist, mithin auf der Geraden DE (wegen $MPE = HGC = 90^0$), und wenn der K. ein gerader ist, überdiess noch auf der Geraden AB perpendiculär steht. Man setze $OA = d$, W. $OAB = \alpha$, $KOL = \beta$, $OKL = \gamma$, $AP = x$ und $PM = y$.

Da MP in der Kreis-Ebene auf dem Durchmesser DE perpendiculär steht, so ist (§. 408, Anmerk.) (m) $PM^2 = DP \,.\, PE$. Um aber DP und PE durch die angenommenen Grössen auszudrücken, hat man aus dem Dreiecke APD sofort $AP : DP = \sin ADP : \sin DAP$, oder $x : DP = \sin\gamma : \sin\alpha$, also $DP = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma}$. Aus dem Dreiecke AOB folgt ferner $AO : AB = \sin ABO : \sin AOB$, oder $d : AB = \sin(\alpha + \beta) : \sin\beta$, und daraus (n) $AB = \frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Es ist also

$$PB = AB - AP = \frac{d \sin\beta - x \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

und daher endlich aus dem Dreiecke BPE sofort $PB : PE = \sin PEB : \sin PBE = \sin(\beta + \gamma) : \sin(\alpha + \beta)$ oder

$$PE = \frac{PB \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \gamma)},$$

und wenn man für PB substituirt:

$$PE = \frac{d \sin\beta - x \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Diese für DP und PE gefundenen Werthe in der obigen Gleichung (m) substituirt, erhält man für die gesuchte Gleichung des Kegelschnittes:

$$(1)\ y^2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\left[\frac{x\, d \sin\beta - x^2 \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \gamma)}\right].$$

§. 505. Discussion dieser Gleichung (1).

Da diese Gleichung zwischen x und y vom zweiten Grad ist, so folgt fürs erste, dass alle Kegelschnittslinien zu den Linien zweiter Ordnung gehören; es kann also kein Kegelschnitt eine andere Linie sein, als die wir im vorigen Capitel

untersucht haben. — Vergleicht man nun diese Gleichung (1) mit jener der genannten Linien, d. i. mit $y^2 = px + qx^2$, welches die Gleichung der Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist [die Abscissen wie in (1) vom Scheitel gezählt], je nachdem q negativ, Null oder positiv ist; so folgt, dass dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein wird, je nachdem der Bruch

$$\sin\alpha \sin(\alpha+\beta) : \sin\gamma \sin(\beta+\gamma),$$

oder da der Nenner (indem γ und $\beta+\gamma$ immer $< 180^0$), so wie auch $\sin\alpha$ (da man α nicht $> 180^0$ zu nehmen braucht) immer positiv sind, bloss der Factor $\sin(\alpha+\beta)$ positiv, Null oder negativ ist. Diess vorausgeschickt, lasse man die schneidende Ebene sich um die Axe YY' drehen, bis sie dadurch nach und nach alle möglichen Lagen angenommen hat; dabei kann aber α folgende Werthe erhalten:

1. Für $\alpha = 0$ berührt die Ebene den Kegel nach der Linie KO, und es folgt in der That für diesen Werth von α aus (1): $y = 0$, als Gleichung der Abscissenaxe GB (§. 394, 6), die in diesem Falle mit der Seite KO des Kegels zusammenfällt.
2. Nimmt der W. α zu, so durchschneidet zuerst die Gerade GB beide Seiten OK, OL des K. nach derselben Seite von O aus gerechnet. In diesem Falle ist $\alpha + \beta < 180$, also $\sin(\alpha+\beta)$ positiv, und der Kegelschnitt eine Ellipse.

a) Erhält dabei die Gerade GB eine mit der KL parallele Lage AF, so wird $\alpha = \gamma$ und daher $\frac{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma \sin(\beta+\gamma)} = 1$; es reducirt sich also die Gleichung (1) auf jene $y^2 = \frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} x - x^2$ oder $y^2 = 2rx - x^2$, wenn man berücksichtigt, dass (aus dem Dreiecke AOF) $d \sin\beta : \sin(\alpha+\beta) = AF$ ist und AF (als nunmehriger Werth von AB) $= 2r$ gesetzt wird; diese Gleichung ist aber (§. 405) die Gleichung des Kreises.

b) Wird $\alpha = OLK = 180 - (\beta+\gamma)$, also $\alpha + \beta = 180 - \gamma$; so wird der vorhin genannte Bruch ebenfalls $= 1$, also der Schnitt abermals ein Kreis. Aus einem schiefen Kegel lässt sich daher der Kreis durch zwei verschiedene Schnitte: dem gewöhnlichen, mit der Basis parallelen, für welchen nämlich $\alpha = K$, und dem sogenannten antiparalle-

len Schnitt, für-welchen $\alpha = L$ ist, erhalten; im geraden Kegel fallen diese beiden Schnitte, wegen $L = K$, in einen zusammen. [II, 181. Anm.]

3. Kommt bei der weitern Drehung die Gerade AB in die mit der Seite OL parallele Lage GAG' (Fig. 56), so wird $180 - \alpha = \beta$ oder $\alpha + \beta = 180^0$, folglich $\sin(\alpha + \beta) = 0$, und der Kegelschnitt eine Parabel. Fig. 56.
4. Wächst α noch mehr, so schneidet die Gerade $GBAG'$ (Fig. 57) die Seite LO des Kegels oberhalb der Spitze O, so, dass jetzt die beiden Seitenlinien des (vollständigen) Kegels von O aus gerechnet, nach entgegengesetzten Richtungen geschnitten werden. In diesem Falle ist $180 - \alpha < \beta$ oder $\alpha + \beta > 180^0$, daher $\sin(\alpha + \beta)$ negativ, und der Kegelschnitt eine Hyperbel (jeder der beiden entgegengesetzten Kegeln liefert eine der sogenannten entgegengesetzten Hyperbeln; vergl. §. 470, Anmerkung). Fig. 57.
5. Für $\alpha = 180^0$ fällt die Gerade $G'AG$ (Fig. 55) wieder (wie bei $\alpha = 0$) mit der Seite KO des K. zusammen, und die schneidende wird zur berührenden Ebene. Es geht auch in der That die Gleichung (1), wegen $\sin\alpha = 0$, in die Gleichung der Abscissenaxe $y = 0$ über. Fig. 55.
6. Für $\alpha > 180^0$ erhält die gegen BA verlängerte Gerade nach und nach wieder dieselben Lagen, welche sie bereits bei frühern Werthen von $\alpha < 180^0$ gehabt, und es ist daher hinreichend, α bloss von 0 bis 180^0 zu nehmen.
7. Lässt man, um noch einige besondere Schnitte zu erhalten, die schneidende Ebene durch die Spitze O gehen; so wird $d = 0$, und die Gleichung (1) geht über in jene (2) $y^2 = -\frac{\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin\gamma \sin(\beta + \gamma)} x^2$.

a) Ist dabei $\alpha + \beta < 180^0$, so ist $\sin(\alpha + \beta)$ positiv, und es kann dann dieser Gleichung nur für $x = 0$ und $y = 0$ Genüge geleistet werden (indem sonst y imaginär würde); diess sind aber die Coordinaten eines Punctes (des Ursprunges), welcher auch in der That (§. 498, 1, *c*) eine Varietät der Ellipse bildet. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gerade AB (Fig. 55) eine Lage OB' annimmt, die innerhalb des Winkels $K'OL$ fällt; denn dabei ist offenbar $K'OB' + L'OK'$, d. i. $\alpha + \beta < 180$. Fig. 55.

b) Für $\alpha + \beta = 180$ wird $sin(\alpha + \beta) = 0$ und die Gleichung (2) geht über in $y = 0$, als Gleichung einer geraden Linie (der Abscis-
Fig. 56. senaxe) OL (Fig. 56), die sofort (vergl. §. 499, 2.) eine Varietät der Parabel bildet.

c) Ist aber $\alpha + \beta > 180^\circ$, so wird $sin(\alpha + \beta)$ negativ, und der Coefficient in (2), den wir durch A bezeichnen wollen, positiv; also $y^2 = Ax^2$ oder $y = \pm \sqrt{A} . x$, welches sofort die Gleichung eines Systemes zweier sich (im Ursprung) schneidender Geraden ist. —
Fig. 57. Dieser Fall tritt ein, wenn die durch O gehende Gerade OG'' (Fig. 57) jene KL zwischen K und L trifft; denn es ist sodann $K'OG'' + L'OK'$, d. i. $\alpha + \beta > 180$, und die schneidende Ebene erzeugt mit der Kegelfläche die zwei geraden Linien OQ und OR als Varietät der Hyperbel (vergl. § 498, 3).

Aus allem zusammen folgt also, dass man aus dem Durchschnitte eines (geraden oder schiefen) Kegels mit einer Ebene alle Linien der zweiten Ordnung, und zwar sammt ihren Varietäten (die beiden parallelen Geraden als zweite Varietät der Parabel im folgenden §.), aber auch nichts weiter als diese Linien erhalten könne.

Cylinderschnitt.

Fig. 55. §. **506**. Setzt man Kürze halber in Fig. 55 $AB = 2a$, so folgt (aus dem Dreiecke AOB) $2a = d\, sin\, \beta : sin(\alpha + \beta)$, und die allgemeine Gleichung (1) (§. 504) geht über in

$$y^2 = \frac{sin\, \alpha\, sin\,(\alpha + \beta)}{sin\, \gamma\, sin\,(\beta + \gamma)}\,(2ax - x^2).$$

Ist nun a unveränderlich, so geht für $\beta = 0$ der Kegel
Fig. 58. in einen Cylinder KL' (Fig. 58) über, und man erhält aus der letzten Gleichung für die Gleichung des Cylinderschnittes $AMBMA$ sofort $y^2 = \frac{sin\, \alpha^2}{sin\, \gamma^2}(2ax - x^2)$, oder da aus dem Dreiecke ABF, $\frac{AB}{AF} = \frac{sin\, \gamma}{sin\, \alpha}$, also AB oder $2a = \frac{2r\, sin\, \gamma}{sin\, \alpha}$ folgt, wenn man den Halbmesser der Basis durch r bezeichnet, auch

$$(3)\quad y^2 = \frac{2r\, sin\, \alpha}{sin\, \gamma}\, x - \frac{sin\, \alpha^2}{sin\, \gamma^2}\, x^2.$$

Anmerk. Geht man vom geraden K. aus, so ist der betrachtete Cylinder ein senkrechter, und es wird in dieser Gleichung, wegen $\gamma = 90^\circ$, noch $sin\, \gamma = 1$.

§. **507**. Discussion dieser Gleichung (3).

1. Da der Coefficient von x^2 weder Null (weil sonst auch das Glied in x wegfiele) noch negativ werden kann, so kann auch (m. s. §. 505) aus dem Cylinder bloss die Ellipse (den Kreis als Varietät mit inbegriffen) geschnitten werden. Diese Gleichung (3) mit jener der Ellipse (§. 467) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ verglichen, zeigt, dass $2a = \frac{2r \sin\gamma}{\sin\alpha}$ und $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin\gamma^2}$, also $a = \frac{r \sin\gamma}{\sin\alpha}$ und $b = r$, also die kleine Axe sämmtlicher aus dem nämlichen Cylinder möglichen Ellipsen constant und gleich dem Durchmesser desselben sei.
2. Für $\alpha = \gamma$ wird der Schnitt parallel mit der Basis, und man erhält aus (3), wie es sein soll: $y^2 = 2rx - x^2$, die Gleichung eines mit der Basis congruenten Kreises.
3. Für $\alpha = 0$ wird auch $y = 0$, als Gleichung der Geraden KK'.
4. Nimmt man in der Geraden GAB statt A irgend einen andern Punct G (Fig. 59) als Drehungspunct an, so, dass nun auch dieser Punct der Ursprung, also die Gerade IGH die Ordinatenaxe wird, setzt $CG = c$, $CK = r$; so wird $KG = r - c$ und $AG : KG = \sin\gamma : \sin\alpha$, also $AG = \frac{(r-c)\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Setzt man daher in der obigen Gleichung (3), um den Ursprung von A nach G zu verlegen, $x + AG$ statt x, und für AG den vorigen Werth; so erhält man als Gleichung des Cylinderschnittes, auf die Abscissenaxe AGB und den Ursprung G bezogen, nach einer leichten Reduction: Fig. 59.

$$y^2 = (r^2 - c^2) + \frac{2c \sin\alpha}{\sin\gamma} x - \frac{\sin\alpha^2}{\sin\gamma^2} x^2.$$

a) Für $\alpha = 0$ folgt daraus $y^2 = r^2 - c^2$ oder $y = \pm\sqrt{r^2 - c^2}$, nämlich die Gleichung eines Systems zweier (mit der Abscissenaxe) parallelen Geraden RR', SS'. Diese sind nur möglich, wenn $c < r$, d. i. wenn der Punct G zwischen K und L liegt, und werden imaginär, wenn dieser Drehungspunct G (Fig. 58) in die Verlängerung von LK fällt. — Dieses System der beiden reellen oder imaginären Geraden bildet sofort die noch fehlende Varietät der Parabel des §. 499. Fig. 58.

Neuntes Capitel.

Ueber die besondern Eigenschaften der Kegelschnitte oder Linien der zweiten Ordnung.

I.

In Bezug auf ihre Hauptaxen.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel*.

§. **508**. Um fürs Erste die Bedingung auszudrücken, unter welcher irgend ein Punct in der Ellipse selbst, inner- oder ausserhalb derselben liegt, haben wir für jeden Fig. 60 Punct M (Fig. 60) der Curve selbst (§. 462) die Relation: (1) $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$. Für einen Punct n innerhalb der Curve ist die Ordinate Pn kleiner als die derselben Abscisse CP entsprechende Ordinate PM der Curve, also auch $a^2.Pn^2 < a^2.PM^2$, d. i. ($Pn = y$ gesetzt) (2) $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 < 0$. — Für einen ausserhalb der Ellipse liegenden Punct N ist $PN > PM$, also auch $a^2.PN^2 > a^2.PM^2$, d. i. (für $PN = y$) (3) $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0$. Noch mehr gilt diese Relation (3) für einen Punct wie N'; denn ist CQ, d. i. $x > a$, so ist $b^2x^2 > a^2b^2$, also um so mehr $a^2y^2 + b^2x^2 > a^2b^2$, woraus die Relation (3) folgt.

§. **509**. Ein zweites Kennzeichen folgt aus der Definition der Ellipse; es ist nämlich für jeden Punct M der Curve (§. 459) $FM + F'M = 2a$. Für einen Punct r innerhalb der Curve ist $Fr + F'r < FM + F'M$, d. i. $Fr + F'r < 2a$, und eben so für einen Punct R ausserhalb derselben: $FR + F'R > 2a$.

Eben so findet man für die Hyperbel [man darf (§. 473) in den vorigen Relationen nur $-b^2$ statt $+b^2$ setzen], dass ein Punct (dessen Coordinaten x, y sind) in der Curve selbst inner- oder ausserhalb derselben liegt, je nachdem für diesen Punct $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 =, <$ oder > 0 ist; oder auch, dass in diesen 3 Fällen, wenn M

ein Punct der Curve, r inner- und R ausserhalb derselben liegt, $F'M - FM = 2a$ (§. 468), $F'r - Fr > 2a$ [wegen (Fig 53) $F'r = F'M + Mr$ und $Fr < FM + Mr$] und $F'R - FR < 2a$ (wegen $F'R = F'M - MR$ und $FR > FM - MR$) sei. Fig. 53.

§. **510.** Aus der Gleichung I. (§. 462) der Ellipse folgt $y^2 : (a + x)(a - x) = b^2 : a^2$, oder mit Rücksicht auf die Figur (Fig. 52) $PM^2 : A'P . AP = b^2 : a^2$. Für einen Fig. 52.
2. Punct derselben Ellipse hat man eben so $P'M'^2 : A'P' . AP' = b^2 : a^2$; es ist also $PM^2 : P'M'^2 = A'P . AP : A'P' . AP'$. Für $b = a$ oder den Kreis folgt $PM^2 : A'P . AP = 1 : 1$, also $PM^2 = A'P . AP$ (vergl. §. 408, Anmerk.).

Dieselben Proportionen und daraus folgenden Sätze gelten sofort auch für die Hyperbel.

§. **511.** Beschreibt man über der grossen Axe AA' (Fig. 61) der Ellipse als Durchmesser einen Kreis, und Fig. 61.
bezeichnet für einerlei Abscissen die Ordinaten des Kreises durch y', und jene der Ellipse durch y; so hat man $y'^2 = a^2 - x^2$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, folglich $y'^2 : y^2 = a^2 : b^2$ oder $y' : y = a : b$. Wird der Kreis über der kleinen Axe beschrieben, so erhält man $y' : y = b : a$.

Diese Eigenschaft liefert zur Construction der Ellipse mittelst Puncte auch noch folgendes Verfahren: Man beschreibe über beiden Axen AA', BB' der zu construirenden Ellipse Kreise, errichte in einem beliebigen Puncte P der ersten Axe, bis zum äussern Kreis, die Ordinate PN, und führe durch den Punct L, in welchem der Halbmesser CN den innern Kreis schneidet, zu AA' die Parallele LM; so ist der mit der Ordinate dadurch entstehende Durchschnitt M ein Punct der Ellipse. Denn es ist dieser Construction zufolge $PN : PM = CN : CL$ oder $y' : PM = a : b$, also ist $PM = y$ die entsprechende Ordinate der Ellipse. — Dass übrigens mit diesem Puncte M leicht noch die drei symmetrischen m, M', m', und überhaupt durch gehöriges Weiterrücken des Punctes P jede beliebige Anzahl von Puncten der Ellipse gefunden werden könne, ist für sich klar.

Die Supplementarsehnen.

§. **512.** Erklärung. Verbindet man die Endpuncte A, A' der grossen Axe mit irgend einem Puncte M der El-

Fig. 62. lipse (Fig. 62); so heissen diese Verbindungslinien AM, $A'M$ Supplementarsehnen der ersten Axe.

§. **513**. Die Gleichung der Sehne AM (als einer durch den Punct $x=a$, $y=0$ gehenden Geraden) ist (§. 395) $y=A(x-a)$, und jene der (durch den Punct $x=-a$, $y=0$ gehenden) Sehne $A'M$, $y=A'(x+a)$. Für den Durchschnittspunct M dieser Sehnen gilt ausser diesen beiden Gleichungen, da er zugleich auch der Curve angehört, noch die Gleichung $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ (3) Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $A=\frac{y}{x-a}$, $A'=\frac{y}{x+a}$, also $AA'=\frac{-y^2}{a^2-x^2}$, und wenn man für y^2 den Werth aus der 3. Gleichung setzt: (1) $AA'=-\frac{b^2}{a^2}$. Für den Kreis ist, wegen $b=a$, sofort $AA'=-1$, zum Beweis, dass (§. 399, 2.) die auf den Endpuncten des Durchmessers stehenden Sehnen unter sich einen rechten Winkel einschliessen.

Für die Hyperbel hat man eben so: $AA'=\frac{b^2}{a^2}$, woraus sofort
Fig. 63. folgt, dass die Winkel MAX und $MA'X$ (Fig 63) oder $M'AX$ und $M'A'X$ immer von einerlei Art, d. i. zusammen spitz oder stumpf sind.

§. **514**. Zur Bestimmung der trigonometrischen Tangente t des von beiden Sehnen eingeschlossenen Winkels AMA' hat man (§. 399) $t=\frac{A-A'}{1+AA'}$, oder, wenn man für A und A' die Werthe aus dem vorigen §. substituirt und reducirt: $t=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$, oder endlich wegen $x^2-a^2=-\frac{a^2}{b^2}y^2$ (aus der Gleichung der Ellipse) auch (2) $t=\frac{-2ab^2}{(a^2-b^2)y}$. Dieser Ausdruck zeigt, dass der von ein paar Supplementar-Sehnen der ersten Axe eingeschlossene Winkel immer stumpf ist, und für $y=b$ (den grössten Werth von y), d. i. wenn die beiden Sehnen in einem Endpuncte der kleinen Axe zusammen laufen, sein Maximum erreicht.

§. **515.** Stehen hingegen die beiden Sehnen auf den Endpuncten B, B' der kleinen Axe auf, so darf man, um die Tangente t' des von ihnen eingeschlossenen Winkels zu finden, in dem Ausdrucke (2) nur a und b mit einander vertauschen, und man erhält $t' = \frac{2a^2 b}{(a^2 - b^2) y}$ (wobei aber diese Verwechslung auch in y vorzunehmen ist). Diese Relation zeigt, dass der von zwei Supplementar-Sehnen der zweiten Axe eingeschlossene Winkel immer spitz, und für $y = a$ (als grössten Werth von y), d. i. wenn die beiden Sehnen in einem Endpuncte der grossen Axe zusammen laufen, am kleinsten ist.

Für die Hyperbel folgt aus (2) (wenn man wieder $-b^2$ statt $+b^2$ schreibt) $t = \frac{2ab^2}{(a^2+b^2)y}$, und daraus, dass der Winkel der beiden Supplementar-Sehnen der ersten Axe immer spitz und um so kleiner ist, je grösser y wird.

b) Für die *Parabel*.

§. **516.** Betrachten wir auch hier 3 Puncte n, M, N des Perpendikels PN (Fig. 64), welche beziehungsweise Fig. 64.
innerhalb, in der Curve selbst und ausserhalb derselben liegen; so hat man für den Punct M der Curve (§. 478) $y^2 - px = 0$; für den Punct n innerhalb der Curve (wegen $Pn < PM$ und $Pn = y$ gesetzt) $y^2 - px < 0$, so wie endlich für den Punct N ausserhalb derselben (wegen $PN > PM$ und $PN = y$) $y^2 - px > 0$.

§. **517.** Nach der Definition der Parabel (§. 477) hat man ferner für einen Punct M der Curve: $MF = MD$. Ist R ein Punct ausser- und r ein Punct innerhalb dieser Curve, und zieht man durch diese Puncte mit der Axe parallel die Geraden ERM', $GM''r$ und die Geraden FM', FM''; so ist für den Punct r innerhalb der Curve: $rF < M''F + M''r = GM'' + M''r$, d. i. $rF < rG$, und für den Punct R ausserhalb derselben: $RF > FM' - RM' = EM' - RM'$, d. i. $RF > RE$.

§. **518.** Für zwei Puncte x, y und x', y' derselben Parabel hat man $y^2 = px$ und $y'^2 = px'$, also $x : x' = y^2 : y'^2$,

d. h. es verhalten sich in dieser Curve die Abscissen wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten.

§. **519.** Um den Brennpunct F zu finden, wenn der Parameter p gegeben ist, bemerke man, dass (§. 482, 3.) die durch diesen Punct gezogene Ordinate $y = \frac{1}{2}p$ ist; setzt man daher diesen Werth für y in der Gleichung der Parabel, so erhält man $\frac{1}{4}p^2 = px$, also $x = \frac{1}{4}p$ als Abscisse des Brennpunctes F.

II.

Die Durchmesser oder Diameter.

§. **520.** Erklärung. Jede gerade oder krumme Linie, welche ein System paralleler Sehnen einer Curve halbirt, heisst Diameter oder Durchmesser dieser Curve. Diess vorausgesetzt, wollen wir sofort die Durchmesser in den 3 in Untersuchung stehenden Curven aufsuchen.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel*.

§. **521.** Verbindet man mit der Gleichung der Ellipse (1) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ jene irgend einer Sehne MM'
Fig. 65. (Fig. 65) (2) $y = Ax + B$, so erhält man zur Bestimmung der Abscissen der Durchschnittspuncte M, M' die Gleichung (3) $(a^2A^2 + b^2)x^2 + 2a^2ABx + a^2(B^2 - b^2) = 0$. Bezeichnet man daher die Coordinaten dieser Puncte durch x', y' und x'', y''; so sind $\frac{1}{2}(x' + x'') = \alpha$, $\frac{1}{2}(y' + y'') = \beta$ die Coordinaten des Halbirungspunctes O der Sehne MM', und es ist, da (§. 166) der 2. Coefficient aus der Summe der Wurzeln, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, besteht, aus der Gleichung (3), wenn man gleich halbirt: $\frac{x' + x''}{2}$, d. i. $\alpha = \frac{-a^2AB}{a^2A^2 + b^2}$. Zur Bestimmung von β hat man, da O ein Punct der Geraden (2) ist, also in der Gleichung

(2) $y=\beta$ sein muss, für $x=\alpha$ sofort $\beta=A\alpha+B=\frac{Bb^2}{a^2A^2+b^2}$ (wenn man nämlich für α substituirt), also auch $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{b^2}{Aa^2}$. Da nun dieser Quotient von der Grösse B [als Ordinate des Durchschnittspunctes der Geraden (2) mit der Ordinatenaxe] unabhängig ist, so bleibt er für alle übrigen mit dieser Sehne (2) oder MM' parallelen Sehnen (weil dafür A ungeändert bleibt) derselbe, oder man hat für alle Halbirungspuncte $O, O', O'', \ldots$ $(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \ldots)$ dieser parallelen Sehnen: $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{b^2}{Aa^2}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{b^2}{Aa^2}$ u. s. w., so, dass wenn allgemein x, y die Coordinaten dieser Halbirungspuncte bezeichnen (also nach und nach in $\alpha, \alpha', \ldots \beta, \beta', \ldots$ übergehen), sofort $\frac{y}{x}=-\frac{b^2}{Aa^2}$ oder (m) $y=-\frac{b^2}{Aa^2}x$ ist; daraus folgt aber, dass der geometrische Ort aller dieser Halbirungspuncte eine durch den Mittelpunct der Ellipse als Ursprung der Coordinaten gezogene Gerade, mithin diese letztere zugleich (§. 520) ein Durchmesser der Curve sei. Da ferner das eben Bewiesene für jedes System paralleler Sehnen gilt, so folgt endlich, dass alle Durchmesser der Ellipse gerade Linien sind, welche durch den Mittelpunct dieser Curve gehen. Ist die Lage der Sehne MM', folglich auch die des ganzen Systems der mit dieser parallelen Sehnen gegeben; so kennt man A und hat zur Bestimmung des diesem Systeme zukommenden Durchmessers die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels dieses Diameters mit der ersten Axe der Ellipse (als Abscissenaxe) sofort [Gleichung (m)] (n) $A'=-\frac{b^2}{Aa^2}$. Ist aber umgekehrt $y=A'x$ die Gleichung einer beliebigen, durch den Mittelpunct der Ellipse gehenden Geraden, und A' bekannt; so darf man nur $A'=-\frac{b^2}{Aa^2}$ setzen, um daraus $A=-\frac{b^2}{A'a^2}$, als trigonometrische Tangente des Winkels jenes Systems paralleler Sehnen, also (r) $y=-\frac{b^2}{A'a^2}x$ als Gleichung einer

dieser Sehnen zu erhalten, welches von dieser Geraden, als Durchmesser, halbirt wird.

Für die Hyperbel bleibt wieder Alles dasselbe, indem man $y = \frac{b^2}{Aa^2}x$ als Gleichung der durch den Mittelpunct der Curve gehenden Geraden hat, welche die Sehne $y = Ax + B$, und mit ihr das ganze System paralleler Sehnen halbirt; es ist nämlich auch hier jede durch den Mittelpunct gehende Sehne ein Durchmesser der Curve.

b) Für die *Parabel*.

§. **522.** Die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ mit jener
Fig. 66. einer beliebigen Sehne MM' (Fig. 66) $y = Ax + B$ verbunden, gibt (wenn man x eliminirt) $y^2 - \frac{p}{A}y + \frac{Bp}{A} = 0$. Bezeichnet man die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch y', y'', und die Coordinaten des Halbirungspunctes O der Sehne MM' wieder mit α, β; so hat man, wie im vorigen §., wenn man gleich halbirt: $\frac{1}{2}(y' + y'')$, d. i. $\beta = \frac{p}{2A}$. Da nun auch hier die Ordinate β von B unabhängig, also für alle Halbirungspuncte der mit MM' parallelen Sehnen dieselbe ist; so wird auch hier, wenn y die veränderliche Ordinate aller dieser Puncte bezeichnet, überhaupt $y = \frac{p}{2A}$, und es ist sonach der Ort aller dieser Halbirungspuncte (§. 394, 5.) eine mit der Abscissenaxe in dem Abstand $\frac{p}{2A}$ parallele Gerade. Da ferner diese Gerade zufolge der Definition ein Durchmesser ist, und die Sehne MM' ganz willkürlich gezogen worden; so folgt, dass alle Durchmesser der Parabel mit der Axe parallel laufende gerade Linien sind. — Umgekehrt folgt auch wieder, dass jede mit der Axe der Parabel parallele Gerade ein Durchmesser dieser Curve ist; denn ist $y = A'$ die Gleichung irgend einer solchen Geraden, so darf man nur $A' = \frac{p}{2A}$ setzen, um daraus $A = \frac{p}{2A'}$, und damit die Lage jenes Systems pa-

ralleler Sehnen zu erhalten, welches von dieser Geraden halbirt wird.

Anmerk. Wie man sieht, gehören bei diesen 3 Curven die Axen ebenfalls zu den Durchmessern; es findet jedoch dabei der besondere Fall Statt, dass das betreffende Sehnensystem von diesen rechtwinkelig halbirt oder geschnitten wird, eine Eigenschaft, welche man überhaupt bei der Definition der Axen aller Curven zum Grunde legt.

Die *conjugirten* Diameter.

a) In der *Ellipse* und *Hyperbel.*

§. **523.** Die aus der Gleichung (*n*), §. 521 folgende Relation (*α*) $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$ führt in der Ellipse auf nachstehende wichtige Folgerungen:

1. Zieht man in dieser Curve (Fig. 65) einen beliebigen Durchmesser aa', und ist $y = A'x$ dessen Gleichung; so ist die Gleichung des Diameters bb', welcher mit der Sehne MM', die vom erstern aa' halbirt wird, parallel läuft [Gl. (*r*), §. 521 und §. 399, 1.]: $y = -\frac{b^2}{A'a^2}x = Ax$ [vermöge Relation (*α*)]. Betrachtet man dagegen den Durchmesser bb', und ist dessen Gleichung $y = Ax$; so ist die Gleichung des mit einer der von bb' halbirt werdenden Sehnen parallelen Diameters [ebenfalls Gleichung (*r*), §. 521]: $y = -\frac{b^2}{Aa^2} = A'x$ [Relat. (*α*)], so, dass demnach dieser Durchmesser kein anderer als der zuerst genannte aa' ($y = A'x$) ist. — Von diesen beiden Durchmessern aa' und bb' halbirt also jeder die mit dem andern parallelen Sehnen, wesshalb sie conjugirte Diameter genannt werden; der von ihnen eingeschlossene Winkel heisst Conjugationswinkel. Fig. 65.

2. Da der erste Durchmesser aa' ganz willkürlich gezogen wurde, so folgt, dass es in der Ellipse unendlich viele Systeme von conjugirten Diametern gibt.

3. Zu jedem Durchmesser bb' findet man den zugehörigen oder conjugirten, indem man mit bb' paral-

lel die Sehne MM' zieht, diese in O halbirt, und O mit dem Mittelpunct C verbindet.

4. Aus der obigen Gleichung (α) folgt für $A'=0$ sofort $A=\infty$, zum Beweis, dass wenn der eine Diameter auf der Abscissenaxe liegt, der andere sofort mit der Ordinatenaxe zusammen fällt; es bilden daher auch die beiden Axen der Ellipse ein System conjugirter Diameter, und zwar insbesondere ein rechtwinkeliges.

5. Ausser diesem eben genannten gibt es keines mehr, dessen Conjugationswinkel ein Rechter wäre; denn die Bedingung hiezu ist (da $y=Ax$ und $y=A'x$ die Gleichungen zweier conjug. Diameter sind, §. 399, 2.) $AA'=-1$, oder mit Berücksichtigung der obigen Gleich. (α): $\frac{b^2}{a^2}=1$, eine Gleichung, welche (wegen $a>b$) in der Ellipse nicht bestehen kann.

6. Dagegen wird diese Bedingungsgleichung für den Kreis, wofür $b=a$ ist, immer erfüllt, zum Zeichen, dass sich hier alle Systeme conjug. Diameter rechtwinkelig durchschneiden.

Fig. 62. 7. Zieht man zwei Durchmesser aa', bb' (Fig. 62) beziehungsweise mit ein paar Supplementarsehnen der ersten Axe $A'M$, AM parallel; so besteht zwischen den Winkeln, welche diese mit der Abscissenaxe bilden, dieselbe Relation, wie für jene der Supplementarsehnen selbst, nämlich [§. 513, (1)] die Relation $AA'=-\frac{b^2}{a^2}$. Da dieses aber [Gl. (α)] genau auch die Relation für die Winkel von ein paar conjugirter Diameter ist, so folgt, dass diese beiden Diameter aa', bb' einander conjugirt sind. Diese Eigenschaft bietet offenbar ein sehr einfaches Mittel dar, zu einem gegebenen Durchmesser aa' den conjugirten bb' zu construiren. Auch folgt daraus, dass der Conjugationswinkel $aCb=AMA'$ (§. 514) immer grösser als ein Rechter ist, aber auch höchstens nur die Grösse des Winkels ABA' erreichen kann.

Für die Hyperbel gelten mit geringer Aenderung dieselben Folgerungen, jedoch ergeben sich für diese Curve noch insbesondere nachstehende, bemerkenswerthe Eigenschaften:

α. Die zwischen den trigon. Tangenten der Winkel der conjugirten Diameter mit der ersten Axe bestehende Relation $AA' = \frac{b^2}{a^2}$ zeigt, dass wenn man (Fig. 63) einen Durchmesser aa' so zieht, dass er die Curve überhaupt, z. B. in a und a' trifft, und wenn $A' = tang\, A\, Ca$ ist. also (§. 474, 6.) die Bedingung $A' < \frac{b}{a}$ Statt findet, gerade dadurch $A > \frac{b}{a}$ sei, und demnach (a. a. O.) der conjugirte Diameter bb' (wofür $tang\, A\, Cb = A$) die Curve nicht trifft, und umgekehrt. Ist also von zwei conjugirten Diametern der eine reell, so ist der andere immer imaginär (wie diess auch für die beiden Axen, §. 474, 4. gilt). Fig. 63.

β. Da zufolge derselben Relation $AA' = \frac{b^2}{a^2}$ die beiden Tangenten A, A' immer einerlei Zeichen besitzen; so sind die beiden Winkel aCA und bCA zugleich entweder spitz oder stumpf, und es kann sonach die Differenz dieser beiden Winkel, d. i. der Conjugationswinkel bCa nicht anders ein Rechter werden, als indem A oder A', z. B. $A' = 0$, also $A = \infty$ wird, in welchem Falle aber die beiden Durchmesser mit den Axen der Hyperbel zusammen fallen.

γ. Für $b = a$ folgt $AA' = 1$, folglich sind in der gleichseitigen Hyperbel die beiden genannten Winkel aCA und bCA immer Complemente zu einander.

b) Für die Parabel.

§. **524**. In der Parabel ist für einen beliebigen Punct a der Curve (Fig. 66), dessen Ordinate y' heissen mag, die durch diesen Punct mit der Axe parallele Gerade aa' (§. 522) der eine Durchmesser. Um die Lage der Geraden bb' zu finden, welche hier die Stelle des conjugirten Diameters vertritt, und mit welcher also die vom erstern halbirten Sehnen parallel laufen, hat man (§. 522) $y' = \frac{p}{2A}$, und daraus $A = \frac{p}{2y'}$ als trigonom. Tangente des Winkels baa' dieser Geraden mit der Axe der Parabel. Da nun mit dieser Geraden bb' (oder conjugirten Axe) jenes Sehnensystem parallel läuft, welches vom ersten Durchmesser aa' halbirt wird; so folgt (§. 430, Anmerk.), dass diese conjugirte Axe bb' zugleich die Parabel in a berühre. — Da ferner für ein System rechtwinkeliger conjugirter Axen $A = \frac{p}{2y'} = \infty$ sein muss, was nur für $y' = 0$, also für den Scheitel A der Parabel Statt Fig. 66.

findet; so folgt, dass unter den unzähligen Systemen von conjugirten Axen nur jenes der beiden Axen AX, AY rechtwinkelig ist.

Die Supplementarsehnen der Diameter.

Für die *Ellipse* und *Hyperbel.*

§. **525.** Zieht man aus den Endpuncten a, a' irgend
Fig. 65. eines Durchmessers aa' der Ellipse (Fig. 65) an einen beliebigen Punct m derselben die Sehnen am, $a'm$, und bezeichnet die Coordinaten des Punctes a durch x', y', wodurch also die des Punctes a' gleich $-x'$, $-y'$ werden; so hat man für die Sehnen am, $a'm$ beziehungsweise die Gleichungen $y-y'=A(x-x')$ und $y+y'=A'(x+x')$, welche zusammen genommen für den Durchschnittspunct m (x, y) gelten, so dass man dafür hat: $AA'=\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}$. Da aber die Puncte $m(x, y)$ und $a(x', y')$ zugleich auch Puncte der Ellipse sind, für welche also die Gleichungen $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ und $y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$ gelten und woraus $\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}=-\frac{b^2}{a^2}$ folgt; so hat man auch $AA'=-\frac{b^2}{a^2}$, also dieselbe Relation, welche wir oben (§. 513) für die Supplementarsehnen der ersten Axe fanden.

Eben so findet man auch in der Hyperbel für die Supplementarsehnen irgend eines Durchmessers die oben (§. 513) für die Supplementarsehnen der ersten Axe erwähnte Relation $AA'=\frac{b^2}{a^2}$.

III.

Von den Tangenten auf die Hauptaxen bezogen.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel.*

§. **526.** Um die Gleichung der aus einem bestimmten Puncte $x'\ y'$ an die Ellipse gezogenen Tangente zu entwickeln, befolgen wir genau wieder das im §. 432 angewendete Verfahren. Es ist nämlich die Gleichung der Ellipse, die Abscissen vom Mittelpunct gezählt: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. und die einer durch den Punct x', y' gehenden Secante: $y - y' = A(x - x')$. Substituirt man nun, zur Verbindung dieser beiden Gleichungen, den Werth von y aus der letztern in die erstere Gleichung; so erhält man, nach x geordnet:

$$\frac{1}{a^2}(A^2a^2 + b^2)x^2 + 2A(y' - Ax')x$$
$$+ y'^2 + A^2x'^2 - 2Ax'y' - b^2 = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln sofort die Abscissen der Durchschnittspuncte der Secante mit der Ellipse sind. Da aber die Secante zur Tangente werden soll, also beide Puncte zusammen fallen, d. i. beide Wurzeln einander gleich werden müssen; so hat man (§. 433, Anmerk. 2.) die Bedingungsgleichung:

$$4A^2(y' - Ax')^2 - \frac{4}{a^2}(A^2a^2+b^2)(y'^2+A^2x'^2-2Ax'y'-b^2) = 0,$$

und daraus $A = \frac{-x'y' \pm \sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}}{a^2 - x'^2}$ für die trigon. Tangente des Neigungswinkels der durch x', y' an die Ellipse gezogenen Tangente mit ihrer grossen Axe. Der doppelte Werth zeigt auch hier, dass im Allgemeinen aus einem Puncte $D(x', y')$ (Fig. 67) an die Ellipse zwei Tangenten Fig. 67.
DM, Dm gezogen werden können; diese sind jedoch nur möglich, wenn die Wurzelgrösse reell, d. i. $a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 > 0$, nämlich (§. 508) der Punct D ausserhalb der Curve liegt. Für $a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 = 0$ ist D oder x', y' ein Punct der Ellipse selbst, und es reduciren sich beide

Werthe von A auf einen: $A = \frac{-x'y'}{a^2 - x'^2}$, oder, da aus der Gleichung der Ellipse $a^2 - x'^2 = \frac{a^2 y'^2}{b^2}$ folgt:

$$(\alpha) \quad A = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}.$$

Die Gleichung der Tangente ist sonach (diesen Werth von A in der obigen Gleichung der Secante substituirt) sofort:

$$(1) \quad y - y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

wobei x, y die allgemeinen oder laufenden, und x', y' die bestimmten Coordinaten des Berührungspunctes sind. Verbindet man mit dieser Gleichung noch jene $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, welche ausdrückt, dass x', y' ein Punct der Ellipse ist; so erhält man für die Gleichung der Tangente auch:

$$(2) \quad a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

In der Hyperbel hat man eben so (α') $A = \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$, und für die Gleichung der Tangente im Puncte x', y':

$$(1') \quad y - y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x') \quad \text{oder} \quad (2') \quad a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Anmerk. Aus dieser letzten Gleichung (2') folgt $y = \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}x - \frac{b^2}{y'}$, wobei (da x', y' ein Punct der Hyperbel ist) $y' = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x'^2 - a^2}$ ist. Setzt man nun $x' = \infty$, so folgt daraus $y' = \pm\frac{b}{a}x'$ und (diesen Werth in der erstern Gleichung substituirt) $y = \pm\frac{b}{a}x \mp \frac{ab}{x'}$, oder, da $\frac{ab}{x'} = \frac{ab}{\infty}$ gegen $\frac{bx}{a}$ verschwindet: $y = \pm\frac{b}{a}x$; da aber dieses (§. 474, 7.) die Gleichung der Asymptoten der Hyperbel ist, so folgt, dass diese letztern als Tangenten der Hyperbel angesehen werden können, deren Berührungspuncte unendlich weit hinaus fallen.

b) Für die *Parabel*.

§. 527. Die Gleichung einer aus irgend einem Puncte x', y' an die Parabel gezogenen Secante ist $y - y' = A(x - x')$; diese mit der Gleichung der Parabel verbunden, gibt (durch Elimination von y):

$$A^2x^2 + (2Ay' - 2A^2x' - p)x + (y' - Ax')^2 = 0.$$

Setzt man wieder, damit die Secante zur Tangente wird (§. 433):

$$(2Ay' - 2A^2x' - p)^2 - 4A^2(y' - Ax')^2 = 0,$$

so erhält man aus dieser Bedingungsgleichung für die Tangente des Neigungswinkels der geometrischen Tangente mit der Axe der Parabel: $A = \frac{1}{2x'}(y' \pm \sqrt{y'^2 - px'})$. Es können demnach auch hier von einem Puncte m oder x', y' (Fig. 72) im Allgemeinen zwei Tangenten mM, mM' an Fig. 72. die Curve gezogen werden; diese sind jedoch nur möglich, wenn $y'^2 - px' > 0$, d. i. (§. 516) wenn der Punct x', y' ausserhalb der Parabel liegt. Liegt dieser Punct in der Curve selbst, so wird $y'^2 - px' = 0$ und $A = \frac{y'}{2x'} = \frac{y'^2}{2x'y'} = \frac{px'}{2x'y'}$, d. i. ($\alpha$) $A = \frac{p}{2y'}$; es fallen nämlich beide Tangenten in eine zusammen, deren Gleichung sofort [wenn man diesen Werth von A in der obigen Gleichung der Secante substituirt] (1) $y - y' = \frac{p}{2y'}(x - x')$, oder auch, wenn man damit noch jene $y'^2 = px'$, welche ausdrückt, dass x', y' der Berührungspunct (also ein Punct der Curve) ist, verbindet: (2) $yy' = \frac{1}{2}p(x + x')$.

Die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel*.

§. **528.** Erklärung. Wird die im Puncte $M(x', y')$ gezogene Tangente irgend einer Curve, also auch der Ellipse (Fig. 67) bis zum Durchschnitt T mit der Abscissenaxe ver- Fig. 67. längert, ferner in M auf die Tangente das Perpendikel MN wieder bis zum Durchschnitt mit dieser Axe gezogen; so heissen im engern Sinne das begrenzte Stück MT der Berührungslinie Tangente, das Stück MN des erwähnten Perpendikels Normale, die Stücke PT und PN aber Subtangente und Subnormale.

§. **529.** Um nun in der Ellipse die Subtangente zu bestimmen, wird man in der Gleichung (1), §. 526, $y = 0$ setzen, und daraus $x - x'$ ausdrücken; denn diese Differenz, in welcher x dem Werthe $y = 0$ in der Gleichung der MT entspricht, also $= CT$ ist, gibt sofort $CT - CP = PT$. Man erhält aber auf diese Weise:

Subtangente (3) $PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$.

Eben so ist auch in der Hyperbel die Subt. (3') $PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$.

Anmerk. Da PT in (3) von b unabhängig ist, so folgt, dass für alle auf ein und derselben Geraden $AA' = 2a$, als ersten Axe, construirten Ellipsen, die gleichen Abscissen entsprechenden Subtangenten einander gleich sind. Errichtet man daher in irgend einem Puncte P der gemeinschaftlichen Axe ein Perpendikel, welches die erwähnten Ellipsen in M, M', . . trifft; so müssen sich die sämmtlichen in diesen Puncten M, M' . . an die betreffenden Ellipsen gezogenen Tangenten in einem und dem nämlichen Puncte T der Axe schneiden. Da aber diese Eigenschaft auch noch für den über AA' construirten Kreis (als Schlussglied dieser Ellipsen-Reihe) gelten muss; so darf man nur, um im Puncte M an die Ellipse eine Tangente zu ziehen, durch diesen die Ordinate bis zum Durchschnitt L mit dem Kreis, und an diesen in L die Tangente LT ziehen, und endlich den Durchschnittspunct T dieser Geraden LT und der Axe mit M verbinden.

§. **530.** Die Gleichung der durch den Berührungspunct x', y' gehenden Normale MN der Ellipse ist [§. 400, 2. als einer Geraden, welche auf jener (1), §. 526, perpendiculär steht] (4) $y - y' = \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x')$.

Um nun die Subnormale PN zu erhalten, wird man wieder in dieser Gleichung $y = 0$ setzen, und dann $x - x'$ (welche Differenz $= CN - CP = -PN$ ist) bestimmen; man erhält dadurch die Subnormale (5) $PN = -\frac{b^2}{a^2}x$, und diese ist für eine positive Abscisse x' desshalb negativ, weil sie von P gegen N, also in der Richtung der negativen x gezählt wird.

Eben so erhält man auch in der Hyperbel die Gleichung der Normale: (4') $y - y' = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x')$, und die

Subnormale: (5') $PN = \frac{b^2}{a^2}x'$.

§. **531**. Aus den rechtw. Dreiecken MPT und MPN folgt endlich $MT = \sqrt{MP^2 + PT^2}$ und $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$, oder wenn man substituirt, für die Ellipse:

Tangente (6) $MT = \frac{y'}{bx'} \sqrt{a^4 - c^2x'^2}$ und

Normale (7) $MN = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - c^2x'^2}$.

Eben so findet man für die Hyperbel

(6') $MT = \frac{y'}{bx'} \sqrt{c^2x'^2 - a^4}$ und (7') $MN = \frac{b}{a^2} \sqrt{c^2x'^2 - a^4}$.

Anmerk. Nach dem beim Kreise §. 435 beobachteten Verfahren ist es auch hier leicht, die Berührungspuncte für die durch einen ausserhalb der Curve liegenden Punct geführten Tangenten zu finden [II., 220].

b) Für die *Parabel*.

§. **532**. Setzt man in der Gleichung (1), §. 527, der Tangente $y = 0$, und bestimmt dann $x - x'$; so erhält man auf dieselbe Art (wie in der Ellipse) die

Subtangente (3) $PT = -2x'$.

Da aus diesem Werthe $AT = AP$ folgt [auch aus Gleichung (2), §. 527, wird für $y = 0$ sofort $x + x' = 0$ oder $x = -x'$, d. i. $AT = AP$], so wird man, um an einen bestimmten Punct M der Parabel (Fig. 72) Fig. 72. eine Tangente zu ziehen, die Abscisse AP dieses Punctes von A auf der verlängerten Axe bis T auftragen, und T mit M verbinden.

§. **533**. Die Gleichung der im Puncte M errichteten Normale [als einer durch den Punct x', y' gehenden, auf der Geraden (1), §. 527, perpendiculären Geraden] ist

$$(4)\ y - y' = -\frac{2y'}{p}(x - x').$$

Setzt man in dieser wieder $y = 0$ und bestimmt dafür $x - x'$, so ist $x - x'$ oder die Subnormale (5) $PN = \frac{1}{2}p$.

§. **534**. Endlich folgt noch aus den rechtwinkeligen Dreiecken MPT und MPN, wenn man für PT und PN gleich die vorigen Werthe aus (3) und (5) substituirt:

Tangente (6) $MT = \sqrt{px' + 4x'^2}$,

Normale (7) $MN = \sqrt{px' + \frac{1}{4}p^2}$. [II., 219.]

IV.

Von den Tangenten auf die Durchmesser und Radienvectoren bezogen.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel.*

§. **535.** Es seien zu irgend einem Puncte M der El-
Fig. 68. lipse (Fig. 68) der Durchmesser Mm und die Tangente KMK' gezogen, so ist die trig. Tangente des Winkels der KK' mit der Abscissenaxe [(α), §. 526] $A = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$. Die Gleichung des Diameters Mm (als einer durch den Ursprung gehenden Geraden) hat die Form $y = A'x$, woraus auch, da diese Gerade durch den Punct $M(x', y')$ geht, $y' = A'x'$ oder $A' = \frac{y'}{x'}$ folgt. Diese beiden Werthe von A und A' geben also $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$. Bezeichnet man ferner die trig. Tangente des Winkels, welchen der mit Mm conjugirte Diameter $M'm'$ mit der Abscissenaxe bildet, durch A''; so ist auch (§. 523) $A'A'' = -\frac{b^2}{a^2}$, mithin $AA' = A'A''$ oder $A = A''$; es läuft also die Tangente KK' irgend eines Punctes M mit jenem Durchmesser $M'm'$ parallel, welcher zu dem durch diesen Punct M gezogenen Diameter conjugirt ist.

§. **536.** Folgerung. Zieht man in den Endpuncten M, m, M', m', zweier conjugirter Diameter Mm, $M'm'$ an die Ellipse die vier Tangenten; so bilden diese ein die Curve umschliessendes Parallelogramm.

Für die Hyperbel gilt ebenfalls der Satz des vorigen §. Auch lässt sich hier ein ähnliches Parallelogramm construiren, von welchem jedoch nur zwei Seiten wirklich Tangenten (und zwar in den Endpuncten M, m
Fig. 69. des ersten Diameters, Fig. 69) der Curve sind; die beiden übrigen laufen parallel mit dem ersten Diameter Mm. Uebrigens ist hier dieses Parallelogramm der Curve gleichsam eingeschrieben.

Wie lässt sich mittelst der im vorigen §. entwickelten Eigenschaft an einem gegebenen Puncte der Ellipse oder Hyperbel eine Tangente ziehen? [II., 225.]

§. **537.** Es seien an einen Punct M (Fig. 70) die Tangente MT und die Radienvectoren FM, $F'M$ gezogen; ferner sei W. $FMT = \alpha$, W. $F'MT = \alpha'$, $tang\, MFX = A$, $tang\, MF'X = A'$ und $tang\, MTX = A''$; so folgt unmittelbar aus der Figur:

$$(h)\ tang\,\alpha = \frac{A''-A}{1+AA''} \text{ und } tang\,\alpha' = \frac{A''-A'}{1+A'A''}.$$

Sind wieder x', y' die Coordinaten des Berührungspunctes M; so ist die Gleichung der durch die Puncte F ($x = c$, $y = 0$) und M (x', y') gehenden Geraden FM: $y = \frac{y'}{x'-c}(x-c)$, und jene der durch F' ($x = -c$, $y = 0$) und M gehenden Geraden $F'M$: $y = \frac{y'}{x'+c}(x+c)$; man hat daher

$$A = \frac{y'}{x'-c},\quad A' = \frac{y'}{x'+c} \text{ und (§. 526) } A'' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Diese Werthe in (h) substituirt geben, wenn man gleich die Brüche wegbringt: $tang\,\alpha = -\frac{b^2x'^2 - b^2cx' + a^2y'^2}{a^2x'y' - a^2cy' - b^2x'y'}$, oder wegen $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ und $a^2 - b^2 = c^2$, nach gehöriger Reduction: $tang\,\alpha = \frac{b^2}{cy'}$.

Der Werth von $tang\,\alpha'$ kann ganz eben so bestimmt werden; einfacher jedoch folgt er aus dem eben gefundenen, wenn man in diesem, der Natur der Sache gemäss [vergl. die Ausdrücke (h) und dann die Werthe von A und A'], $-c$ statt $+c$ schreibt; man erhält in jedem Falle $tang\,\alpha' = -\frac{b^2}{cy'}$.

Aus diesen Werthen von $tang\,\alpha$ und $tang\,\alpha'$ folgt aber, dass sich die Winkel α und α' gegenseitig zu 180^0 ergänzen, oder dass (mit Rücksicht auf die Natur der Sache) $FMT + F'TM = 180^0$ ist. Verlängert man daher die Tangente gegen t, so ist wegen $F'Mt + F'MT = 180^0$ sofort

$$(d)\quad \text{W. } F'Mt = \text{W. } FMT.$$

Zieht man die Normale MN, so folgt auch aus der Gleichheit der Winkel NMT und NMt in Verbindung der vorigen Relation (d), dass W. $NMF =$ W. NMF' ist.

Für die Hyperbel hat man eben so

$$tang\,\alpha = -\frac{b^2}{cy'},\; tang\,\alpha' = \frac{b^2}{cy'},$$

Fig. 71. und da hier die W. α und α' (Fig. 71) nicht wie bei der Ellipse von der Tangente aus nach einerlei, sondern nach entgegengesetzten Richtungen gezählt werden, wodurch α gegen α', oder umgekehrt, also auch $tang\,\alpha$ gegen $tang\,\alpha'$ negativ zu nehmen ist; so hat man $tang\,\alpha = tang\,\alpha'$, also auch $\alpha = \alpha'$, d. i. W. $TMF =$ W. TMF'. Die Normale MN hingegen halbirt den von dem einen Leitstrahl und der Verlängerung des andern gebildeten Winkel.

Fig. 70. Anmerk. Fahren aus dem einen Brennpuncte F der Ellipse $ABA'B'$ (Fig. 70), welche einen durch die Axe der durch Umdrehung der halben Ellipse ABA' um AA' erzeugten concaven elliptischen Spiegelfläche entstehenden Schnitt darstellt, Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen aus; so wird jeder solcher Strahl FM, zufolge des bekannten physikalischen Gesetzes, dass der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist, nach MF', also so zurückgeworfen, dass dieser zurückgeworfene Strahl durch den zweiten Brennpunct F' geht. Da nun dasselbe auch von allen übrigen durch die Axe des Ellipsoids geführten ebenen Schnitten (die mit diesem erstern sämmtlich congruent sind) gilt, so vereinigen sich die sämmtlichen Strahlen (bei ihrem Durchgange) in F', und vermögen (bei Wärmestrahlen) dadurch einen in diesem Puncte befindlichen brennbaren Körper zu entzünden. Umgekehrt können die aus F' ausfahrenden Wärmestrahlen auf einen in F befindlichen Körper eine ähnliche Wirkung hervorbringen, und diess ist der Grund, warum diese beiden Puncte Brennpuncte genannt worden sind. Dass dagegen in
Fig. 71. der Hyperbel (Fig. 71) die Puncte F und F' keine materiellen Brennpuncte sind, sondern nur der Analogie mit jenen der Ellipse wegen so genannt werden, wird man von selbst bemerken können.

§. 538. Die im vorigen §. entwickelte Eigenschaft der
Fig. 70. Gleichheit der Winkel liefert unter allen Methoden die einfachste, um an die Ellipse durch einen gegebenen Punct, dieser mag in der Curve selbst oder ausserhalb liegen, eine Tangente zu ziehen. Im erstern Falle zieht man nämlich an diesen Punct M die beiden Leitstrahlen FM, $F'M$, verlängert den letztern um das Stück $Mf = MF$, zieht Ff und auf diese Verbindungslinie aus M die Gerade MGT perpendiculär; so ist diese die gesuchte Tangente. Denn es halbirt dieser Construction zufolge diese Gerade MGT, wie es für die Tangente sein soll, den Winkel FMf.

Liegt dagegen der gegebene Punct m ausserhalb der Curve, so berücksichtige man, dass es sich bloss um die Bestimmung des Punctes f handelt, welcher mit F' verbunden, den gesuchten Berührungspunct M abschneidet. Nun ist aber $F'f = F'M + MF = 2a$, und wegen $MF = Mf$, und da mMG auf Ff nach dem vorigen perpendiculär ist, auch $mf = mF$; man erhält also diesen Punct f, indem man aus dem gegebenen Puncte m mit seinem Abstande vom ersten Brennpunct F als Halbmesser einen Kreisbogen beschreibt, und diesen aus dem zweiten Brennpuncte F' mit dem Halbmesser $AA' = 2a$ durchschneidet. — Verwechselt man bei diesem Verfahren die Brennpuncte, und macht den zweiten zum ersten und umgekehrt; so erhält man in Uebereinstimmung mit §. 526 noch einen zweiten, mit f analogen Punct f', welcher mit F verbunden, sofort den zweiten Berührungspunct M' abschneidet, dergestalt, dass dann aus m die beiden Tangenten mMT und $mM'T'$ gezogen werden können. (Auch kann man, wenn es nicht an Raum gebricht, die zuerst genannten beiden Kreisbögen sogleich bis zu ihrem 2. Durchschnitt f'' verlängern, und diesen Punct f'' ebenfalls mit dem 2. Brennpuncte F' verbinden, um dadurch unter einem auch den 2. Berührungspunct M' zu erhalten.)

Eben so wird man in der Hyperbel (Fig. 71) an den gegebenen Punct M der Curve die beiden Leitstrahlen FM, $F'M$ ziehen, und den Winkel FMF' durch die Gerade MT halbiren, um die Tangente MT an diesem Puncte zu erhalten. — Für einen Punct m ausserhalb der Curve wird man aus m mit dem Halbmesser mF einen Bogen beschreiben, diesen mit dem Halbmesser $AA' = 2a$ aus dem zweiten Brennpuncte F' in f und f'' durchschneiden, und diese Durchschnittspuncte mit F' verbinden, um dadurch die beiden Berührungspuncte M, M' auf der Hyperbel abzuschneiden, und die beiden aus m möglichen Tangenten ziehen zu können. Denn es ist z. B. für den Punct M, nach dieser Construction: $F'f = 2a = F'M - Mf$, also, da auch (§. 468) $F'M - FM = 2a$, sofort $Mf = MF$; da ferner auch $mf = mF$, so folgt, dass die Verbindungslinie mMT in der That den Winkel FMF' halbirt. (Auch kann man, anstatt zugleich den zweiten Durchschnittspunct f'' zu suchen, wie in der Ellipse, jenen f' durch Verwechslung der Brennpuncte bestimmen, und ihn mit F verbinden, um M' zu erhalten.) Fig. 71.

b) Für die *Parabel*.

Fig. 72. §. **539**. Zieht man in der Parabel (Fig. 72) zu irgend einem Puncte M den Durchmesser Mf', die Tangente MT und den Leitstrahl FM; so ist erstlich auch hier der mit dem Diameter Mf' conjugirte sofort mit der Tangente MT parallel (da er mit dieser, §. 524, sogar zusammenfällt). Setzt man ferner wieder W. $FMT = \alpha$, $tang\, MTX = A$, und $tang\, MFX = A'$; so ist offenbar $tang\, \alpha = \frac{A' - A}{1 + AA'}$. Nun ist aber, wenn x', y' die Coordinaten des Berührungspunctes sind (§. 527), $A = \frac{p}{2y'}$, und da $y = \frac{y'}{x' - \frac{1}{4}p}(x - \frac{1}{4}p)$ die Gleichung des durch die Puncte $F(x = \frac{1}{4}p, y = 0)$ und $M(x', y')$ gehenden Vectors FM ist, sofort $A' = \frac{y'}{x' - \frac{1}{4}p}$; man hat daher, wenn diese Werthe für A und A' in der vorigen Gleichung substituirt, und die Brüche weggebracht werden: $tang\, \alpha = \frac{px' + \frac{1}{4}p^2}{y'(2x' + \frac{1}{2}p)} = \frac{p(4x' + p)}{2y'(4x' + p)} = \frac{p}{2y'}$. Es zeigt sich also, dass $tang\, \alpha = A$, folglich W. $FMT =$ W. MTX, und da Mf' mit AX parallel, auch W. $FMT =$ W. tMf' ist. Ferner halbirt, wie leicht zu sehen, die Normale MN den W. FMf' des Leitstrahles FM mit dem Durchmesser Mf'.

Anmerk. Eine der im §. 537 (Anmerkung) ähnliche Betrachtung zeigt, dass alle auf eine concave parabolische Spiegelfläche mit der Axe parallel einfallenden Wärmestrahlen sich durch Reflexion im Brennpuncte F vereinigen, und dadurch in diesem Puncte befindliche brennbare Körper zu entzünden oder zu verbrennen vermögen.

§. **540**. Um an einen gegebenen Punct M der Para-
Fig. 72. bel (Fig. 72) die Tangente zu ziehen, wird man also nur durch diesen Punct den Durchmesser fMf' bis zum Durchschnitte f mit der Leitlinie CC' führen, diesen Punct f mit dem Brennpuncte F verbinden, und aus M auf diese Verbindungslinie Ff die Gerade MGT perpendiculär ziehen. — Um ferner an diese Curve von einem ausserhalb liegenden Puncte m die beiden Tangenten zu ziehen, be-

schreibe man aus diesem Puncte m mit der Entfernung mF einen Kreisbogen, welcher die Leitlinie CC' sofort in zwei Puncten f, f'' schneidet, und führe durch diese Puncte mit der Axe parallel die Geraden fMf', $f''M'f'''$; so ergeben sich dadurch auf der Curve die beiden Berührungspuncte M, M', die sofort mit m zu verbinden sind. Denn es ist, z. B. für M, nach dieser Construction, $mF = mf$ und $MF = Mf$, also mMG perpendiculär auf fF, und sonach durch dasselbe Perpendikel mMG der Winkel fMF halbirt.

V.

Diese drei Curven auf ihre conjugirten Diameter bezogen.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel.*

§. **541**. Transformirt man die Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ nach §. 450 für schiefwinkelige Coordinaten, und lässt den Ursprung ungeändert, setzt also in dieser statt x und y beziehungsweise $x \cos\alpha + y \cos\alpha'$ und $x \sin\alpha + y \sin\alpha'$; so erhält man:

$$(a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2)\, y^2 + (a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2)\, x^2 + 2\,(a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha')\, xy = a^2b^2.$$

Sucht man jetzt jenes schiefwinkelige Axensystem, auf welches bezogen die Gleichung der Ellipse die nämliche Form wie die Axengleichung erhält; so darf man bloss in der vorigen Gleichung, in welcher α und α' noch unbestimmt sind, (δ) $a^2 \sin\alpha \sin\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0$ setzen (um das Glied in xy verschwinden zu machen). Aus dieser Bedingungsgleichung erhält man durch Division mit $\cos\alpha \cos\alpha'$ sofort (1) $\tang\alpha \tang\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, und damit geht die vorige Gleichung der Curve über in jene:

2) $(a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2)\, y^2 + (a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2)\, x^2 = a^2b^2.$

Der Umstand aber, dass man zur Bestimmung der beiden Grössen α, α' nur eine Gleichung (1) erhält, beweist, dass unendlich viele Coordinatensysteme von der verlangten Eigenschaft möglich sind; und da diese Bedingungsgleichung (1) die nämliche ist, welche wir oben in §. 523 [(α)] gefunden haben, so folgt, dass jedes dieser Systeme mit einem Systeme conjugirter Diameter zusammenfällt, also die Gleichung (2) sofort die Gleichung der Ellipse auf ein System conjugirter Diameter bezogen ist. Setzt man davon jenen Durchmesser, auf welchem die Abscissen x gezählt werden, $= 2A$, und den zweiten oder conjugirten, auf welchem nämlich die Ordinaten y genommen werden, $= 2B$; so folgt, dass für $y = 0$: $x = \pm A$ und für $x = 0$: $y = \pm B$ sein muss. Diess erwägend erhält man also aus der Gleichung (2):

$$(3)\quad A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2},\quad B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2},$$

und daraus:

$$a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2 = \frac{a^2 b^2}{A^2} \text{ und } a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2 = \frac{a^2 b^2}{B^2}.$$

Diese Werthe in der genannten Gleichung (2) substituirt, erhält man, wenn man die Gleichung durch $A^2 B^2$ multiplicirt und durch $a^2 b^2$ abkürzt: (4) $A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$, als Gleichung der Ellipse auf ein paar conjugirte Diameter bezogen, von denen der erste (auf welchem die x gezählt werden) gleich $2A$, und der zweite gleich $2B$ ist. [II., 248.]

Für die Hyperbel erhält man genau eben so (oder kürzer, indem man in den vorigen Ausdrücken $-b^2$ statt $+b^2$ und $-B^2$ statt $+B^2$ schreibt): (4') $A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2$ als Gleichung dieser Curve auf ein paar conjugirte Diameter, von denen der erste (auf welchem die x gezählt werden) reell, und der zweite imaginär ist (vergl. §. 523, α.).

[Ueber die Aufgabe: die Ellipse zu construiren, wenn davon ein paar conjugirte Diameter gegeben sind, II., 237.]

§. **542.** Drückt man in den vorigen Relationen (3) von A^2 und B^2 die Functionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ nach

den bekannten Formeln durch $tang\,\alpha$ und $tang\,\alpha'$ aus; so erhält man auch:

$$A^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tang\,\alpha^2)}{a^2\, tang\,\alpha^2 + b^2},\quad B^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tang\,\alpha'^2)}{a^2\, tang\,\alpha'^2 + b^2},$$

und wenn man aus diesen beiden und der Gleichung [(1) im vorigen §.] $tang\,\alpha\; tang\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, α und α' eliminirt, zu welchem Ende man das Product der aus den beiden erstern Gleichungen folgenden Werthe:

$$tang\,\alpha^2 = \frac{b^2(a^2 - A^2)}{a^2(A^2 - b^2)} \text{ und } tang\,\alpha'^2 = \frac{b^2(a^2 - B^2)}{a^2(B^2 - b^2)},$$

nämlich $tang\,\alpha^2\; tang\,\alpha'^2 = \frac{b^4}{a^4}\frac{(a^2 - A^2)(a^2 - B^2)}{(A^2 - b^2)(B^2 - b^2)}$ jenem aus der dritten Gleichung folgenden Werth $tang\,\alpha^2\; tang\,\alpha'^2 = \frac{b^4}{a^4}$ gleich setzen wird; so erhält man: $(a^2 - A^2)(a^2 - B^2) = (A^2 - b^2)(B^2 - b^2)$ oder $a^4 - b^4 = A^2(a^2 - b^2) + B^2(a^2 - b^2)$, d. i. (1) $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$.

Für die Hyperbel hat man die analoge Gleichung:

(1') $A^2 - B^2 = a^2 - b^2$.

§. **543.** Werden dagegen die beiden genannten Gleichungen (3) für A^2 und B^2 (§. 541) zusammen multiplicirt, so erhält man:

$$A^2 B^2 = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2)(a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2)}.$$

Nun ist, die Multiplication im Nenner N verrichtet:

$$N = a^4 \sin\alpha^2 \sin\alpha'^2 + b^4 \cos\alpha^2 \cos\alpha'^2$$
$$+ a^2 b^2 (\sin\alpha^2 \cos\alpha'^2 + \sin\alpha'^2 \cos\alpha^2),$$

oder, da aus der obigen Bedingungsgleichung (δ), §. 541, wenn man sie quadrirt, $a^4 \sin\alpha^2 \sin\alpha'^2 + b^4 \cos\alpha^2 \cos\alpha'^2 = -2a^2b^2 \sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha'$ folgt, auch:

$$N = a^2 b^2 (\sin\alpha^2 \cos\alpha'^2 - 2\sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha'^2 \cos\alpha^2)$$
$$= a^2 b^2 (\sin\alpha' \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha')^2,$$

d. i. $N = a^2 b^2 [\sin(\alpha' - \alpha)]^2$. Das obige Product ist demnach $A^2 B^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 [\sin(\alpha' - \alpha)]^2}$, und daraus folgt ganz einfach: (2) $4AB \sin(\alpha' - \alpha) = 4ab$.

Zieht man nun an den Endpuncten der conjugirten Diameter $Mm = 2A$ und $M'm' = 2B$ (Fig. 68) die Tangenten, so entsteht (§. 536) ein um die Ellipse herum beschriebenes Parallelogramm, KL', welches offenbar 4 Mal so gross als jenes KC ist; die Fläche dieses letztern ist aber, wegen $CM = A$, $CM' = B$ und $W. MCM' = \alpha' - \alpha$, sofort $AB \sin(\alpha' - \alpha)$, folglich ist $4AB \sin(\alpha' - \alpha)$ die Fläche des zuerst genannten umschriebenen Parallelogramms KL, so wie $4ab = 2a.2b$ das Rechteck aus den beiden Axen der Ellipse, und diese beiden Flächen sind also [Gleichung (2)] einander gleich.

Der nämliche Satz gilt auch für die Hyperbel, da man für diese Curve dieselbe Gleichung (2) erhält [Aufgaben, II., 251].

b) Für die *Parabel.*

§. **544**. Transformirt man die Axengleichung der Parabel $y^2 = px$ durch Anwendung der erwähnten Formeln in §. 450 für schiefwinkelige Axen, so erhält man:

$$\sin\alpha'^2 y^2 + \sin\alpha^2 x^2 + 2\sin\alpha\sin\alpha'\, xy + (2\delta\sin\alpha - p\cos\alpha)\, x \\ + (2\delta\sin\alpha' - p\cos\alpha')\, y + \delta^2 - pd = 0.$$

Um nun auch hier wieder jenes Axensystem aufzufinden, für welches diese letztere Gleichung dieselbe Form wie die Axengleichung erhält, hat man dafür die drei Bedingungsgleichungen: $\sin\alpha^2 = 0$ (wodurch auch $2\sin\alpha\sin\alpha' = 0$ wird), $\delta^2 - pd = 0$ und $2\delta\sin\alpha' - p\cos\alpha' = 0$; wodurch sich in der That die vorige Gleichung (mit Rücksicht, dass zufolge der ersten Bedingungsgleichung $\cos\alpha = 1$ ist) auf jene

$$(2) \quad y^2 = \frac{p}{\sin\alpha'^2}\, x$$

reducirt. Die erste Bedingungsgleichung $\sin\alpha = 0$ zeigt, dass die neue Abscissenaxe mit der ursprünglichen parallel läuft, also (§. 522) ein Diameter der Parabel ist; die zweite $\delta^2 - pd = 0$, dass der neue Ursprung (d, δ) ein Punct der Curve; so wie endlich die dritte, aus welcher nämlich $\tang\alpha' = \frac{p}{2\delta}$ folgt, dass [(α), §. 527] die neue Ordinatenaxe eine Tangente an die Curve im neuen Anfangspuncte ist: es ist daher das neue oder gesuchte Axensystem von der

verlangten Eigenschaft (§. 524) überhaupt ein System conjugirter Axen der Parabel, und da es unendlich viele solcher Systeme gibt, so gibt es auch eben so viele Axensysteme, auf welche bezogen, die Gleichung der Parabel die Form der Axengleichung besitzt, was damit übereinstimmt, dass man zur Bestimmung der vier unbestimmten Grössen α, α', d, δ nur drei Gleichungen erhalten hat.

Der Factor $\frac{p}{\sin\alpha'^2}$ der obigen Gleichung (2) lässt sich, wegen $\sin\alpha'^2 = \frac{\tang\alpha'^2}{1+\tang\alpha'^2}$, $\tang\alpha' = \frac{p}{2\delta}$ und $\delta^2 = pd$, bequemer durch $p + 4d$, wobei d die Abscisse jenes Punctes der Parabel ist, durch welchen der Diameter, als neue Abscissenaxe, geht, ausdrücken. [Hierher gehörige Aufgaben, II., 258.]

VI.

Die Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen.

§. **545.** Nimmt man die Asymptote CX' der Hyperbel MAm, $M'A'm'$ (Fig. 73) zur Abscissen-, und jene CY' zur Ordinatenaxe, setzt also, um die Axengleichung $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$ dieser Curve für dieses neue Axensystem (vom nämlichen Anfangspunct) umzuwandeln (§. 450), statt x und y beziehungsweise $x\cos\alpha + y\cos\alpha'$ und $x\sin\alpha + y\sin\alpha'$; so erhält man die Gleichung: Fig. 73.

$$(a^2\sin\alpha'^2 - b^2\cos\alpha'^2)\,y^2 + 2\,(a^2\sin\alpha\sin\alpha' - b^2\cos\alpha\cos\alpha')\,xy + (a^2\sin\alpha^2 - b^2\cos\alpha^2)\,x^2 + a^2b^2 = 0.$$

Da aber hier α und α' bereits bestimmte Werthe besitzen, indem (§. 474, 7.) $\tang\alpha = -\frac{b}{a}$ und $\tang\alpha' = \frac{b}{a}$, also (wenn man den Sinus und Cosinus durch die Tangente ausdrückt) für $\sqrt{a^2+b^2} = c$, auch $\sin\alpha = \frac{-b}{c}$, $\cos\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\alpha' = \frac{b}{c}$ und $\cos\alpha' = \frac{a}{c}$ ist; so hat man auch, wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt und redu-

cirt: $\frac{-4a^2b^2}{c^2}xy + a^2b^2 = 0$, und daraus (1) $xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, als Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen. Setzt man (2) $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) = e^2$, so ist diese auch:

(3) $xy = e^2$.

§. **546**. Zieht man zu irgend einem Puncte M der Hyperbel die Coordinaten MP, MQ parallel mit den Asymptoten CY', CX', und setzt den Asymptotenwinkel $Y'CX' = \gamma$; so ist das Parallelogramm $QCPM = QC.CP.\sin\gamma = xy \sin\gamma$ $= e^2 \sin\gamma$ [Gl. (3)], folglich (da $e^2 \sin\gamma$ von x und y unabhängig ist) eine constante Grösse. Diese constante Fläche ist, wegen W. $Y'CX' = 2$ W. $Y'CX$, d. i. $\gamma = 2\alpha'$, also $\sin\gamma$ $= 2\sin\alpha' \cos\alpha' = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ (wenn man nämlich für $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ die Werthe aus dem vorigen Paragraphe setzt) und $e^2 \sin\gamma = \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}ab$, sofort dem halben Rechtecke $ADBC$ der beiden Halbaxen gleich. Die Verbindungslinien der Puncte A, B, A', B' bilden eine Raute $ABA'B'A$, deren Seiten mit den Asymptoten beziehungsweise parallel sind, und deren Fläche, wie leicht zu sehen, 4 Mal so gross als die aus den Coordinaten des Scheitels A construirte Raute $CEAE'C$ ist. Weil ferner die grosse Raute aus 4 Dreiecken, jedes $= \frac{1}{2}$ Rechteck CD besteht, so ist diese halb so gross, als das aus den beiden Axen $2a$ und $2b$ construirte Rechteck $DD'd'd$; folglich ist die kleine Raute $AECE'$ dem halben Rechtecke $ADBC$, also auch der obigen constanten Fläche $e^2 \sin\gamma$ gleich.

Diese grosse Raute, deren Fläche sonach $= (a^2 + b^2)\sin\gamma = 2ab$ ist, wird Potenz der Hyperbel genannt.

§. **547**. Nach dem Verfahren in §. 526 erhält man für die auf dasselbe Axensystem bezogene Gleichung der durch die Puncte x', y' (m) und x'', y'' (M) der Curve gehenden Secante Mm das System der Gleichungen (da $xy = e^2$ die Gleichung der Curve ist):

(1) $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$, (2) $x'y' = e^2$ und (3) $x''y'' = e^2$.

Aus (2) und (3) folgt: $x'y' - x''y'' = 0$, oder auch, wenn man $x''y'$ addirt und subtrahirt: $y'(x' - x'') + x''(y' - y'') = 0$, und daraus $\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y'}{x''}$, so, dass man für die Gleichung (1) der Secante auch hat: $y - y' = -\frac{y'}{x''}(x - x')$. Aus dieser Gleichung folgt für $y = 0$ einfach $x - x' = x''$, und da für denselben Werth von y, $x - x' = Cr - Cq = qr$, ferner (wenn MQ mit CX' parallel), $x'' = CP = MQ$ ist; so hat man $qr = MQ$. Hieraus folgt aber endlich, dass die beiden Dreiecke mqr und MQR congruent, also die beiden zwischen der Curve und den Asymptoten liegenden Abschnitte der Secante mr und MR einander gleich sind.

Da diese für jede Secante geltende Eigenschaft auch noch Statt finden muss, wenn beide Durchschnittspuncte M, m in einen (z. B. in A) zusammenfallen, also die Secante zur Tangente (hier Dd) wird; so wird diese von den beiden Asymptoten begrenzte Tangente im Berührungspuncte (A) halbirt, und man hat sonach ein neues Mittel, um an einen beliebigen Punct (A) der Hyperbel eine Tangente zu ziehen (indem man nur AE' parallel mit CY' ziehen und $E'd = CE'$ nehmen darf, um dAD zu erhalten).

[Benützung der in diesem §. entwickelten Eigenschaft der Secante zur Construction der Hyperbel, wenn einer ihrer Puncte und ihre Asymptoten gegeben sind. II., 267.]

VII.

Die Polargleichungen dieser drei Curven.

a) Für die *Ellipse* und *Hyperbel*.

§. 548. Um die Polargleichung der Ellipse zu entwickeln, für welche der eine Brennpunct F (Fig. 52) der Pol und AA' die Axe ist, muss man (§. 456) in der Axengleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, wegen $d = CF = c$, $\delta = 0$ und $\alpha = 0$, sofort $x = c + u \cos v$ und $y = u \sin v$ setzen; dadurch erhält man:

Fig. 52.

$(a^2 \sin v^2 + b^2 \cos v^2)\, u^2 + (2\, b^2 c \cos v)\, u = (a^2 - c^2)\, b^2 = b^4$,

und daraus:

$$u = \frac{-\, b^2 c \cos v \pm b^2 \sqrt{a^2 \sin v^2 + (b^2 + c^2) \cos v^2}}{a^2 \sin v^2 + b^2 \cos v^2}$$

oder, wenn man (wegen $a^2 - b^2 = c^2$) im Zähler $b^2 + c^2 = a^2$ und im Nenner $b^2 = a^2 - c^2$ setzt:

$$u = \frac{-\, b^2 c \cos v \pm a b^2}{a^2 - c^2 \cos v^2},$$

und wenn man endlich die doppelten Zeichen trennt und eden der beiden Ausdrücke für sich reducirt:

$$u = \frac{b^2}{a + c \cos v} \text{ und } u = \frac{-\, b^2}{a - c \cos v}.$$

Da von diesen der letztere wesentlich negativ ist, während man den Radiusvector immer positiv voraussetzt; so ist dieser hier wegzulassen, so, dass also der erstere oder

(1) $u = \dfrac{b^2}{a + c \cos v}$, sofort die Polargleichung der Ellipse ist, welche ebenfalls (so gut wie die Axengleichung) alle Puncte dieser Curve darstellt, wie eine einfache Discussion derselben zeigt [II., 271].

Setzt man wieder in den beiden vorigen Ausdrücken von u, $-\, b^2$ statt $+\, b^2$; so erhält man für die Polargleichung der Hyperbel die beiden Ausdrücke (die vorigen verwechselt): $u = \dfrac{b^2}{a - c \cos v}$ und $u = \dfrac{-\, b^2}{a + c \cos v}$, von denen, wie die Discussion zeigt, der erste den

Zweig, in welchem der als Pol genommene Brennpunct F liegt, und der zweite (welcher dafür ebenfalls positiv wird) den entgegengesetzten Zweig der Hyperbel darstellt. [II., 274.]

Zieht man durch F die Geraden FE, FG (Fig. 53) mit den Asymptoten parallel, und setzt den halben Asymptotenwinkel $XFE = XFG = \alpha$; so geben beide Ausdrücke von $v = 0$ bis $v = \alpha$ und von $v = 360^\circ - \alpha$ bis $v = 360^\circ$ keinen Werth für u (d. i. man erhält entweder u negativ oder Unendlich). — Will man die Winkel v, anstatt wie hier von der Rechten gegen die Linke, in umgekehrter Richtung zählen; so darf man in den vorigen Ausdrücken von u nur $180^\circ - v$ statt v, d. i. $-\cos v$, statt $\cos v$ setzen. Fig. 53.

Anmerk. Setzt man (§. 464, Anmerk.) $\frac{c}{a} = e$, wodurch b^2 in der Ellipse $= a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2)$ und in der Hyperbel $= c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1)$ wird; so erhalten die Polargleichungen der Ellipse und Hyperbel auch die folgende, in der Astronomie übliche Form, und zwar für die Ellipse: $u = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}$, und für die Hyperbel, wenn man nach der vorigen Bemerkung $-\cos v$ statt $\cos v$ schreibt: $u = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos v}$ und $u = \frac{a(e^2 - 1)}{e\cos v - 1}$.

b) Für die *Parabel.*

§. **549.** Nimmt man auch hier den Brennpunct F der Parabel (Fig. 54) zum Pol und AX zur Axe, so muss man zur Entwickelung der Polargleichung (§. 456), wegen $d = AF = \frac{1}{4}p$, $\delta = 0$ und $\alpha = 0$, in der Axengleichung $y^2 = px$, sofort $x = \frac{p}{4} + u\cos v$ und $y = u\sin v$ setzen; dadurch erhält man $u^2\sin v^2 - pu\cos v = \frac{1}{4}p^2$, und daraus: Fig. 54.

$$u = \frac{p\cos v \pm \sqrt{p^2\cos v^2 + p^2\sin v^2}}{2\sin v^2} = \frac{p\cos v \pm p}{2\sin v^2}.$$

Man hat also, nach jedesmaliger Reduction, die beiden Ausdrücke: $u = \frac{p}{2(1 - \cos v)}$ und $u = \frac{-p}{2(1 + \cos v)}$, von denen jedoch der letztere, als wesentlich negativ, wieder auszulassen ist, so, dass also $u = \frac{p}{2(1 - \cos v)}$ die eigentliche Polargleichung der Parabel darstellt. — Wollte man die Winkel v in der entgegengesetzten Richtung, nämlich von

der Linken gegen die Rechte zählen, so würde man, wegen $\cos(180 - v) = -\cos v$, sofort $u = \frac{p}{2(1 + \cos v)}$ erhalten. [Discussion dieser Gleichung: II., 277. Aufgaben über die Linien zweiter Ordnung, 279 ff. Anwendung dieser Linien zur Construction der Gleichungen des 3. und 4. Grades, 317 ff.]

Fünfter Abschnitt.

Die analytische Geometrie im *Raume* oder auf *drei* Coordinaten bezogen.

Erstes Capitel.

Bestimmung der Lage eines Punctes im Raume, Gleichungen der Ebene, der geraden Linie und des Punctes.

Lage und Gleichungen des *Punctes*.

§. **550.** Einleitung. Analog mit der Festsetzung eines Punctes in der Ebene (§. 381) wird die Lage eines Punctes im Raume am einfachsten durch die Beziehung desselben auf drei, wechselweise auf einander perpendiculäre Ebenen, deren Lage als bekannt angenommen wird, bestimmt. Sind nämlich XY, XZ, YZ (Fig. 74) drei solche Ebenen; AX, Fig. 74.
AY, AZ ihre Durchschnittslinien, davon also jede auf den beiden übrigen perpendiculär steht, und ist M ein innerhalb des dreiflächigen Winkels $AXYZ$ liegender Punct im Raume; so wird seine Lage offenbar vollkommen bestimmt sein, wenn man dessen Abstände von den drei genannten Ebenen, d. i. $Mm = c$, $Mm' = b$ und $Mm'' = a$ kennt. Legt man nämlich in diesen drei Abständen beziehungsweise mit den Ebenen XY, XZ, YZ parallel, drei Ebenen; so muss sich dieser Punct in allen drei Ebenen gleichzeitig befinden, kann also nur in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M liegen. Da die genannten 6 Ebenen ein Parallelopiped bilden, in welchem also je zwei gegenüber liegende Kanten gleich sind; so ist $mM = AR$, $m'M = AQ$ und $m''M = AP$, folglich der Punct M auch bestimmt, wenn die Abstände $AP = a$, $AQ = b$ und $AR = c$ gegeben sind.

§. 551. Erklärung. Die drei Ebenen XY, XZ, YZ, auf welche der P. M bezogen wird, heissen coordinirte Ebenen; die Geraden AX, AY, AZ, nach welchen sich diese schneiden, Coordinatenaxen, oder, weil man auf ihnen die Abstände AP, AQ, AR, welche beziehungsweise durch x, y, z bezeichnet werden, zählt, auch Axen der x, y und z; die coordinirte Ebene XY, in welcher die Axen der x und y liegen, heisst auch Ebene der xy; aus gleichem Grunde werden die coordinirten Ebenen XZ und YZ Ebenen der xz und yz genannt; die Fusspuncte m, m', m'' endlich, der aus M auf die Ebenen der xy, xz und yz gefällten Perpendikel, heissen Projectionen dieses Punctes M auf diese Ebenen, und zwar werden die erste, da wir die Ebene der xy immer als horizontal annehmen, Horizontal-, die beiden letztern Vertical-Projectionen genannt; es ist klar, dass der Punct M auch durch zwei seiner Projectionen, wie z. B. m und m' (wodurch auch die dritte m'' gegeben), bestimmt ist.

Die Grössen x, y, z, denen, in so ferne sie sich auf alle möglichen innerhalb des gedachten Winkels liegenden Puncte M beziehen, die Eigenschaft der variablen Grössen zukommt, heissen wieder Coordinaten dieser Puncte (gewöhnlich sind y, z die Ordinaten zur Abscisse x), und da nach dem Vorigen irgend einer dieser Puncte M durch die Relationen $x=a$, $y=b$, $z=c$, wenn a, b, c gegeben sind, vollkommen bestimmt ist; so heissen diese Relationen Gleichungen des Punctes M.

Man sieht zugleich, dass $x=a$, $y=b$ die Gleich. der Projection m, $x=a$, $z=c$ die der Project. m' und $y=b$, $z=c$ die Gleich. der Project. m'' sind, und dass durch die Gleich. zweier dieser Projectionen auch die der dritten gegeben sind.

§. 552. Liegt der fragliche Punct M nicht in dem genannten, sondern in einem der sieben übrigen dreiflächigen Winkel, die noch entstehen, wenn man sich die drei coordinirten Ebenen unbestimmt verlängert denkt; so muss man zu seiner völligen Festsetzung noch die im vorigen Abschnitte, §. 383, entwickelten Grundsätze hinsichtlich der positiven und negativen Lage in Anwendung bringen, und

berücksichtigen, dass, wenn AX, AY, AZ die positiven Richtungen, sofort ihre Verlängerungen AX', AY', AZ' die negativen Richtungen der Coordinaten x, y, z sind. Es wird daher ein Punct im Raume ganz allgemein bestimmt sein, wenn nicht bloss die numerischen Werthe von x, y, z (d. i. a, b, c), sondern zugleich auch die ihnen nach dieser Bemerkung zukommenden Vorzeichen angegeben werden. So gehören z. B. die Gleichungen $x = +a$, $y = -b$, $z = +c$ einem innerhalb des Winkels $ZAXY'$, jene $x = -a$, $y = -b$, $z = -c$ einem innerhalb des Winkels $Z'AX'Y'$ liegenden Puncte u. s. w.

§. **553.** Ausser der ganz allgemeinen, kann der Punct M auch eine solche Lage haben, dass er in einer der coordinirten Ebenen, dabei als noch specielleren Fall, in einer der Axen, und endlich selbst noch im Durchschnitt der drei Axen, d. i. im Ursprunge der Coordinaten liegt.

§. **554.** Für einen in der Ebene der xy liegenden Punct ist $z = 0$, und man hat sonach als Gleichungen desselben: $x = a$, $y = b$, $z = 0$. Eben so sind die Gleichungen eines in der coordinirten Ebene der xz liegenden Punctes: $x = a$, $z = c$, $y = 0$, und die eines Punctes der Ebene der yz: $y = b$, $z = c$, $x = 0$.

§. **555.** Liegt der betreffende Punct im ersten Falle überdiess noch in der Axe der x, so ist auch noch $y = 0$, und man hat sonach für einen in der Axe der x liegenden Punct die Gleichungen: $x = a$, $y = 0$, $z = 0$. Eben so sind $y = b$, $x = 0$, $z = 0$ und $z = c$, $x = 0$, $y = 0$ beziehungsweise die Gleichungen eines in der Axe der y und Axe der z liegenden Punctes.

§. **556.** Liegt endlich der bezügliche Punct im Ursprunge der Coordinaten, so sind dessen Gleichungen: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

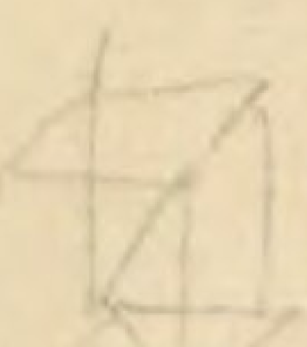
Distanz zweier Puncte.

§. **557.** Um die Distanz zweier Puncte MM' (Fig. 75), Fig. 75.
deren Coordinaten beziehungsweise x', y', z' und x'', y'', z''

sind, zu bestimmen, lege man durch jeden derselben 3 mit den coordinirten Ebenen parallele Ebenen; so schliessen diese 6 Ebenen ein rechtwinkeliges Parallelepiped ein, in welchem dieser gesuchte Abstand MM' eine Diagonale bildet, und worin die 3 Seiten sind:

$(ab = \alpha\beta)\, x' - x''$, $(bc = m\gamma)\, y' - y''$ und $(bM)\, z' - z''$.

Da aber, wie bekannt (und ganz einfach aus den beiden rechtwinkeligen Dreiecken $M'bM$ und $M'cb$, wegen $M'M^2 = M'b^2 + bM^2 = M'c^2 + cb^2 + bM^2$ folgt), in jedem solchen Parallelepiped das Quadrat der Diagonale gleich ist der Summe der Quadrate der 3 Seitenlinien; so hat man, diese Diagonale oder gesuchte Distanz $MM' = D$ gesetzt: (1) $D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$.



Zusatz. Liegt der eine Punct, z. B. jener M', im Ursprunge; so erhält man daraus, wegen $x'' = 0$, $y'' = 0$ und $z'' = 0$, für die Entfernung des Punctes $M(x', y', z')$ vom Ursprunge:

$$(2) \quad D = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Gleichung der *Ebene*.

§. 558. Legt man durch den Halbirungspunct einer Geraden von bestimmter Länge eine Ebene perpendiculär auf diese Gerade, so besitzt die Ebene, und auch nur die Ebene, die Eigenschaft, dass jeder ihrer Puncte von den beiden Endpuncten dieser Geraden gleichweit absteht. Da also diese Eigenschaft die Ebene vollkommen charakterisirt, so wollen wir sie zur analytischen Darstellung der Ebene benützen. Es seien daher α, β, γ die (rechtwinkeligen) Coordinaten des einen, α', β', γ' jene des andern Endpunctes dieser Geraden, und x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Ebene; so hat man für die Abstände d, d' dieses letztern Punctes von den beiden Endpuncten der genannten Geraden (§. 557): $d^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$ und $d'^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 + (z - \gamma')^2$. Da nun diese Abstände oder ihre Quadrate für alle Puncte x, y, z der Ebene einander gleich sind, so erhält man $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 + (z - \gamma')^2$, oder, wenn man entwickelt und reducirt:

(m) $(\alpha-\alpha')x+(\beta-\beta')y+(\gamma-\gamma')z$
$$=\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2),$$
für die allgemeine Gleichung der Ebene.

§. **559**. Da α, β, γ, α', β', γ' constante Grössen sind, welche die Lage der oben genannten Geraden, also auch die der Ebene im Raume bestimmen, oder auch umgekehrt durch die Lage der Ebene, wenn diese bekannt ist, bestimmt werden; so hat die Gleichung der Ebene überhaupt die Form:

$$(1)\quad Ax+By+Cz+D=0,$$

wobei also, so lange nicht von einer bestimmten Ebene die Rede ist, A, B, C, D unbestimmte, von der Lage der Ebene abhängige Coefficienten sind.

Zusatz 1. Da von diesen Coefficienten immer einer durch Division weggebracht, ihre Zahl also auf 3 reducirt werden kann; so folgt, dass die Lage einer Ebene durch 3 von einander unabhängige Bedingungen festgesetzt wird.

Zusatz 2. Die Gleichung der Ebene kann also auch in der Form (2) $Mx+Ny+Pz=1$ oder in jener: (3) $z=ax+by+c$ dargestellt werden.

Zusatz 3. Von den 3 variablen Coordinaten x, y, z sind immer (wenn sie sich auf eine bestimmte Ebene beziehen) 2 willkürlich oder absolut veränderlich, während die dritte davon abhängig oder von diesen beiden eine Function ist [wie z. B. z in der vorigen Gleichung (3)].

Besondere Fälle.

§. **560**. Geht die Ebene durch einen bestimmten Punct, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so hat man auch aus der Gleichung (1) $Ax'+By'+Cz'+D=0$, und daher durch Combination mit der allgemeinen Gleichung (1): $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$, oder auch:

$$(2)\quad z-z'=a(x-x')+b(y-y'),$$

als Gleichung einer Ebene, welche durch einen bestimmten Punct geht.

Zusatz. Geht die Ebene durch den Ursprung so folgt aus der Gleichung (1), indem für diesen Punct, (§. 556) $x=0$, $y=0$, $z=0$ ist, auch $D=0$, und die Gleichung der Ebene erhält die Form: $Ax+By+Cz=0$, oder zufolge der vorigen Gleichung (2) wegen $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$ auch: $z=ax+by$.

§. **561**. Steht die Ebene auf der coordinirten Ebene der xy perpendiculär, läuft also die genannte Gerade (auf deren Mitte unsere Ebene perpendiculär steht) mit dieser Ebene der xy parallel; so ist $\gamma'=\gamma$, und es folgt für die Gleichung dieser Ebene aus (m) (§. 558): $(\alpha-\alpha')x+(\beta-\beta')y=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-\alpha'^2-\beta'^2)$, oder der Form nach: $Ax+By+D=0$. — Eben so sind $Ax+Cz+D=0$ und $By+Cz+D=0$ beziehungsweise die Gleichungen von auf den coordinirten Ebenen der xz und yz perpendiculären Ebenen.

§. **562**. Schneidet die vorige auf der xy perpendiculäre Ebene die Axe der x rechtwinkelig, steht also unsere Ebene auf dieser Axe der x perpendiculär; so läuft die besagte Gerade mit dieser Axe parallel, und es ist nebst $\gamma'=\gamma$ auch noch $\beta'=\beta$, also aus (m): $(\alpha-\alpha')x=\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha'^2)$, so, dass also $Ax+D=0$ oder $x=Q$ die Gleichung einer auf der Axe der x perpendiculären Ebene ist. Auf gleiche Art ist $By+D=0$ oder $y=R$ die Gleichung einer auf der Axe der y, so wie $Cz+D=0$ oder $z=S$ die Gleichung einer auf der Axe der z perpendiculären Ebene. Dabei sind Q, R, S beziehungsweise die Abstände dieser Ebenen von den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy, mit denen sie zugleich auch parallel laufen.

§. **563**. Wird also $Q=0$, so fällt unsere Ebene mit jener der yz zusammen, und es ist sonach $x=0$ die Gleichung der coordinirten Ebene der yz. Eben so sind $y=0$ und $z=0$ beziehungsweise die Gleichungen der coordinirten Ebene der xz und xy.

§. **564**. Verbindet man mit der allgemeinen Gleichung der Ebene (1) jene der coordinirten Ebene der xy ($z=0$),

so gehört das System dieser Gleichungen $[Ax + By + D = 0, z = 0]$ für den Durchschnitt unserer Ebene mit der coordinirten Ebene der xy; man nennt diese Durchschnittslinie die Knotenlinie der Ebene in der Ebene der xy. — Eben so hat man $[Ax + Cz + D = 0, \ y = 0]$ und $[By + Cz + D = 0, \ x = 0]$ für die Gleichungen der Knotenlinie unserer Ebene in den coordinirten Ebenen der xz und yz.

§. **565**. Lässt man in der obigen Gleichung (m) (§. 558) den Endpunct α', β', γ' der Geraden, auf welchen nämlich unsere Ebene, und zwar im Halbirungspuncte, perpendiculär steht, mit dem Ursprunge zusammenfallen, setzt die Länge dieser Geraden $= 2p$, und bezeichnet die Winkel derselben (als ein vom Ursprung auf unsere Ebene gefälltes Perpendikel p) mit den Axen der x, y, z beziehungsweise durch $(p.x)$, $(p.y)$, $(p.z)$; so wird $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$, ferner [(2), §. 557] (n) $4p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, und, wie leicht zu sehen, $\alpha = 2p\cos(p.x)$, $\beta = 2p\cos(p.y)$, $\gamma = 2p\cos(p.z)$, so, dass man also aus der genannten Gleichung (m), nach einer einfachen Reduction, auch als Gleichung der Ebene erhält:

$$(1) \quad x\cos(p.x) + y\cos(p.y) + z\cos(p.z) = p.$$

Anmerk. Man wird leicht bemerken, dass $(p.x)$, $(p.y)$, $(p.z)$ zugleich auch die Winkel sind, welche unsere Ebene mit den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy der Reihe nach einschliesst.

§. **566**. Die vorigen Werthe von α, β, γ, in der Relation (n) substituirt, geben: (2) $[\cos(p.x)]^2 + [\cos(p.y)]^2 + [\cos(p.z)]^2 = 1$, eine Bedingungsgleichung, welche immer zwischen den 3 Winkeln $(p.x)$, $(p.y)$, $(p.z)$ besteht, so, dass also in der vorigen Gleichung (1) wieder nur drei Grössen willkürlich oder unbestimmt sind.

§. **567**. Vergleicht man die vorige Gleichung (1) der Ebene mit jener (1) in §. 559, so ergibt sich:

$$\frac{A}{D} = \frac{\cos(p.x)}{-p}, \quad \frac{B}{D} = \frac{\cos(p.y)}{-p}, \quad \frac{C}{D} = \frac{\cos(p.z)}{-p}.$$

Die Summe der Quadrate dieser Quotienten gibt, mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (2):

$\frac{A^2+B^2+C^2}{D^2}=\frac{1}{p^2}$, und daraus folgt (1) $p=\frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

so wie damit aus den 3 vorhergehenden Gleichungen, wenn man hier in p von den doppelten Zeichen das untere nimmt, und Kürze halber $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=N$ setzt:

$$(2)\quad \cos(p\,.\,x)=\frac{A}{N},\quad \cos(p\,.\,y)=\frac{B}{N},\quad \cos(p\,.\,z)=\frac{C}{N}.$$

Anmerk. Es ist nun auch leicht zu sehen, dass der geometrische Ort der allgemeinen Gleichung des 1. Grades zwischen 3 variablen Grössen oder $Ax+By+Cz+D=0$ eine Ebene ist. Um diese, wenn die Gleichung gegeben ist, festzusetzen, bemerke man, dass diese Gleichung durch Division mit D auf die Form $Mx+Ny+Pz=1$ gebracht, und weil M, N, P gegeben sind, aus den Gleichungen $\frac{\alpha-\alpha'}{m}=M$, $\frac{\beta-\beta'}{m}=N$ und $\frac{\gamma-\gamma'}{m}=P$, wo [in der Gleichung (m), §. 558] der Kürze wegen $\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2)=m$ gesetzt ist, wenn von den 6 unbestimmten Grössen 3 willkürlich angenommen, z. B. $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=0$ gesetzt werden, die 3 übrigen α, β, γ, mithin die mehr erwähnte Gerade und damit endlich auch die auf ihr im Halbirungspuncte perpendiculäre Ebene selbst, als Ort der gegebenen Gleichung bestimmt werden kann.

Gleichungen der *geraden Linie*.

§. **568**. Die Gleichungen zweier beliebiger Ebenen sind [§. 559, Zusatz 2.] (p) $[Mx+Ny+Pz=1,\ M'x+N'y+P'z=1]$. Sieht man beide Gleichungen als zusammengehörig oder coexistirend an, so gelten die Coordinaten x, y, z nicht mehr für alle Puncte der beiden Ebenen, sondern nur mehr für ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie. Das System (p) der beiden Gleichungen wird also, so lange M, N, ... noch unbestimmt sind, jede gerade Linie im Raume darstellen können. Da man indess jede der beiden Gleichungen durch jede andere aus der Combination dieser beiden entstehenden Gleichungen ersetzen kann; so wollen wir daraus einmal y und einmal x eliminiren. Dadurch erhalten wir statt der vorigen beiden Gleichungen die

einfachern: (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ als Gleichungen der geraden Linie im Raume, die immer noch ganz allgemein sind und sofort jede Gerade darstellen können.

Zusatz 1. Die erste dieser Gleichungen (1) repräsentirt (§. 561) eine auf der coordinirten Ebene der xz, so wie die zweite, eine auf der Ebene der yz perpendiculäre Ebene, und da sonach die Gerade (1) als der Durchschnitt dieser beiden Ebenen erscheint, so ist auch die 1. dieser Gleichungen (1), die Gleichung der Projection der Geraden im Raume auf die coordinirte Ebene der xz, so wie die 2. die Gleichung der Projection dieser Geraden auf die coordinirte Ebene der yz. Durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen erhält man sofort auch die Projection $y = cx + d$ auf die Ebene der xy.

Zusatz 2. Aus den Gleichungen (1) erhellet, dass (in Bezug auf eine bestimmte Gerade) hier nur eine der 3 Variablen, z. B. z willkürlich oder absolut veränderlich, die beiden übrigen aber von dieser abhängig oder Functionen sind.

Besondere Fälle.

§. **569**. 1) Geht die Gerade durch den Ursprung, so gehen auch die beiden Ebenen, aus deren Durchschnitt diese Gerade entsteht, durch diesen Punct, und man hat (wegen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, §. 560) dafür die Gleichungen:

$$[x = az,\ y = bz].$$

§. **570**. 2) Fällt die Gerade in eine der coordinirten Ebenen, z. B. in jene der xz; so ist für alle Puncte dieser Geraden $y = 0$, also muss in dem Systeme der Gleichungen (1), sowohl $b = 0$ als auch $\beta = 0$ sein, und man hat für eine solche Gerade die Gleichungen $[x = az + \alpha,\ y = 0]$, oder, wenn man schon als bekannt voraussetzt, dass die Gerade in keiner andern als der Ebene der xz liegt, wohl auch nur $x = az + \alpha$ [vergl. §. 392, (1)]. Aehnliches gilt auch hinsichtlich der beiden übrigen coordinirten Ebenen.

§. **571**. 3) Wird in den beiden Gleichungen (1) unserer Geraden $z = 0$, so gehen diese in $[x = \alpha,\ y = \beta]$ über, und da diese zweien Ebenen angehören, welche (§. 562) beziehungsweise mit den coordinirten Ebenen der yz und xz parallel sind; so gehören, beide Gleichungen vereint,

der auf der Ebene der xy perpendiculären Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, also einer mit der Axe der z parallelen Geraden. — Eben so sind $[x=\alpha,\ z=\gamma]$ und $[y=\beta,\ z=\gamma]$ beziehungsweise die Gleichungen der mit den Axen der y und x parallelen Geraden.

§. **572.** 4) Setzt man endlich noch in den vorigen Gleichungen $\alpha=0$, $\beta=0$ und $\gamma=0$ (oder berücksichtigt man die Gleichungen in §. 563), so sind $[y=0,\ z=0]$, $[x=0,\ z=0]$ und $[x=0,\ y=0]$ beziehungsweise die Gleichungen der Axe der x, der y und z.

Gleichungen des *Punctes.*

§. **573.** Gelten gleichzeitig die Gleichungen dreier Ebenen (q) $[Mx+Ny+Pz=1,\ M'x+N'y+P'z=1,\ M''x+N''y+P''z=1]$, so gehören die Coordinaten dieses Systemes nur mehr dem Durchschnittspuncte dieser drei Ebenen an, welcher zugleich auch der Durchschnitt der obigen Geraden (χ) (§. 568) mit der dritten Ebene ist. Da man aber wieder jede dieser Gleichungen durch eine andere, aus irgend einer Combination aus diesen dreien hervorgehenden ersetzen kann (oder da man diese 3 Gleichungen auf unzählige Arten so verändern kann, dass die Werthe von x, y, z dieselben bleiben, welches der Eigenschaft entspricht, dass durch den nämlichen Punct auf unzählig verschiedene Arten 3 Ebenen möglich sind); so wollen wir zur Vereinfachung aus diesen 3 Gleichungen nach und nach je 2 eliminiren, und statt den vorigen diese einfacheren, nämlich: $[x=a,\ y=b,\ z=c]$ dafür beibehalten. — Man sieht, dass diess zugleich die Gleichungen dreier Ebenen sind, welche (§. 562) beziehungsweise mit den coordinirten Ebenen der yz, xz und xy parallel laufen und von diesen um die Grössen a, b, c abstehen; anstatt also den Punct als Durchschnitt dreier ganz willkürlicher Ebenen (q) anzusehen, ist es weit einfacher, ihn durch diese 3 letztern Ebenen zu bestimmen. — Wir sind sonach auf die nämlichen Gleichungen zurückgekommen, von denen wir bei den Untersuchungen dieses Capitels (§. 551) ausgegangen.

Zusatz. In diesem Systeme der Gleichungen des Punctes ist (in Beziehung auf einen bestimmten Punct) keine der 3 Variablen willkürlich.

Anmerk. Es wird gut sein zu bemerken, dass der Punct durch drei, die gerade Linie durch zwei, und die Ebene durch eine Gleichung bestimmt wird.

Zweites Capitel.

Verbindung der geraden Linie mit der Ebene, durch Auflösung mehrerer Aufgaben über die Gerade und Ebene.

Aufgaben über die gerade Linie im Raume.

§. **574.** Aufgabe. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei bestimmte Puncte geht.

Auflösung. Seien x', y', z' und x'', y'', z'' die (rechtwinkeligen) Coordinaten des 1. und 2. Punctes und (§. 568, 1.) $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen der gesuchten Geraden. Da die Gerade durch den 1. Punct gehen, also $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ ein Punct dieser Geraden sein soll; so hat man auch $x' = az' + \alpha$, $y' = bz' + \beta$, und eben so, der 2. Bedingung zufolge: $x'' = az'' + \alpha$, $y'' = bz'' + \beta$. Aus diesen 3 Systemen von Gleichungen erhält man aber $x' - x'' = a(z' - z'')$, $y' - y'' = b(z' - z'')$, ferner (m) $[x - x' = a(z - z')$ und $y - y' = b(z - z')]$ (als Gleichungen einer durch den Punct x', y', z' gehenden Geraden), oder, wenn man die aus den beiden erstern Gleichungen für a und b folgenden Werthe substituirt:

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'),$$

als die gesuchten Gleichungen der durch die beiden Puncte x', y', z' und x'', y'', z'' gehenden Geraden.

§. **575**. Aufgabe. Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten Punct geht und mit einer gegebenen Geraden parallel läuft.

Auflösung. Seien x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes und (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ die Gleichungen der gegebenen Geraden; so sind die Gleichungen der durch den Punct x', y', z' gehenden Geraden (vor. §.) von der Form: (2) $[x - x' = a'(z - z'),\ y - y' = b'(z - z')]$ und die unbestimmten Grössen a', b' sofort der 2. Bedingung der Aufgabe gemäss zu bestimmen. Da aber die beiden Geraden (1) und (2) mit einander parallel sein sollen, so müssen auch ihre Projectionen auf eine beliebige, also auch auf die coordinirten Ebenen der xz und yz, d. i. (§. 568, Zusatz 1.) $x = az + \alpha$ und $x - x' = a'(z - z')$, so wie $y = bz + \beta$ und $y - y' = b'(z - z')$ unter sich parallel, folglich muss (§. 399, 1.) $a' = a$ und $b' = b$ sein, so, dass man also für die gesuchten Gleichungen hat:

$$[x - x' = a(z - z'),\ y - y' = b(z - z')].$$

§. **576**. Aufgabe. Zu finden, ob sich zwei durch ihre Gleichungen gegebene Geraden durchschneiden, und wenn dieses der Fall ist, ihren Durchschnittspunct anzugeben.

Auflösung. Sind (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ und (2) $[x = a'z + \alpha',\ y = b'z + \beta']$ die gegebenen Gleichungen der beiden Geraden (1) und (2), so müssen, im Falle sich diese Geraden schneiden, die Coordinaten x', y', z' ihres Durchschnittspunctes (da er in beiden Geraden zugleich liegt) beide Systeme der Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig befriedigen. Man wird also, um diese Coordinaten zu finden, aus diesen 4 Gleichungen sofort x, y, z (welche die Stelle von x', y', z' vertreten) bestimmen, wobei man, durch Elimination dieser 3 Grössen, aus den 4 Gleichungen auf eine Relation zwischen den constanten Grössen a, b, α.. kommt, welche sofort die gesuchte Bedingungsgleichung für das Durchschneiden der beiden Geraden (1), (2) sein wird. — Man erhält aber aus diesen 4 Gleichungen, durch successives Abziehen: $0 = (a - a')z + \alpha - \alpha'$, $0 = (b - b')z + \beta - \beta'$, und daraus:

$$z = (\alpha' - \alpha) : (a - a') = (\beta' - \beta) : (b - b'),$$

mithin für die genannte Bedingungsgleichung:

$$(3) \quad (a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha').$$

Findet aber diese Gleichung (3) Statt, so schneiden sich die beiden Geraden (1) und (2) in einem Puncte, dessen Coordinaten $z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'} = \frac{\beta' - \beta}{b - b'}$, $y = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'}$ und $x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'}$ [was für y und x aus (1) oder (2) folgt] sind.

§. 577. Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier (durch ihre Gleichungen) gegebenen Geraden zu finden.

Auflösung. Zieht man durch irgend einen Punct, am einfachsten durch den Ursprung, zwei gerade Linien, beziehungsweise mit den beiden gegebenen parallel; so ist der in diesem Puncte gebildete Winkel sofort auch der gesuchte Neigungswinkel der beiden Geraden, diese mögen sich schneiden oder nicht. Um aber diesen Winkel NAN' (Fig. 76) zu finden, seien (1) [$x = az + \alpha, y = bz + \beta$] und (2) [$x = a'z + \alpha'$, $y = b'z + \beta'$] die Gleichungen der gegebenen Geraden, also (§§. 569, 575) (1') [$x = az$, $y = bz$] und (2') [$x = a'z, y = b'z$] die der beiden durch den Ursprung gezogenen Parallelen (1') und (2') (AN, AN'). Schneidet man auf diesen letztern die Stücke $AM = AM' = 1$ (d. i. gleich der Linieneinheit) ab, bezeichnet die Coordinaten der Puncte M, M' durch x', y', z' und x'', y'', z'', ferner ihre Distanz MM' durch d; so hat man für die Abstände dieser beiden Puncte vom Ursprunge und von einander (§. 557) (3) $1 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, (4) $1 = x''^2 + y''^2 + z''^2$ und $d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$, oder, wenn man entwickelt und mit Rücksicht auf die beiden erstern Gleichungen reducirt: (5) $d^2 = 2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'')$. Da aber AM, AM', MM', d. i. 1, 1, d, ein geradliniges Dreieck bilden; so hat man daraus für den gesuchten Winkel (1'. 2') (§. 48): Fig. 76.

$$\cos(1'.\,2') = \frac{1 + 1 - d^2}{2} = \frac{2 - d^2}{2},$$

oder, wenn man für d^2 aus (5) substituirt, auch (α) $\cos(1'.\,2') = x'x'' + y'y'' + z'z''$. Um nun noch die Grössen x', x'', y', ...

durch die gegebenen $a, b, \ldots$ auszudrücken, berücksichtige man, dass die Puncte M, M' beziehungsweise in den Geraden (1'), (2') liegen, mithin auch die Gleich. gelten: (6) $[x' = az', y' = bz']$ und (7) $[x'' = a'z'', y'' = b'z'']$; diese Werthe für x', y' in (3) substituirt, geben $(1 + a^2 + b^2)z'^2 = 1$, und daraus folgt, $\sqrt{1 + a^2 + b^2} = n$ gesetzt: $z' = \frac{1}{n}$, so wie damit aus (6): $y' = \frac{b}{n}$ und $x' = \frac{a}{n}$. Genau eben so erhält man aus (4) und (7) für $\sqrt{1 + a'^2 + b'^2} = n'$ sofort $z'' = \frac{1}{n'}$, $y'' = \frac{b'}{n'}$ und $x'' = \frac{a'}{n'}$. Setzt man also endlich diese Werthe in die vorige Gleichung (α), so erhält man wegen W. (1'. 2') = W. (1.2) für den gesuchten Neigungswinkel der beiden Geraden (1) und (2):

$$\text{I.} \quad \cos(1.2) = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Folgerungen.

§. **578**. 1) Laufen die beiden Geraden mit einander parallel, so ist wegen W. $(1.2) = 0$ sofort $\cos(1.2) = 1$, und es folgt aus der vorigen Formel I., wenn man quadrirt und den Nenner wegschafft: $(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2) = (1 + aa' + bb')^2$, oder wenn man entwickelt und reducirt: $(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2 = 0$ als Bedingungsgleichung. Da aber diese Gleichung nicht anders bestehen kann, als indem die einzelnen Quadrate für sich Null sind; so hat man $a - a' = 0$, $b - b' = 0$ und $ab' - a'b = 0$, von welchen Relationen jedoch die dritte nur eine Folge der beiden erstern ist; es ist also $a' = a$, $b' = b$ die Bedingung, unter welcher die beiden Geraden (1) und (2) unter einander parallel sind. (Vergl. §. 575.)

§. **579**. 2) Stehen die beiden Geraden auf einander perpendiculär, so wird wegen W. $(1 . 2) = 90^0$ sofort $\cos(1.2) = 0$, und man erhält aus I. die Bedingungsgleichung: (n) $1 + aa' + bb' = 0$.

§. **580**. 3) Berücksichtiget man, dass $x' = \cos(1.x)$,
Fig. 76. $y' = \cos(1 . y)$, $z' = \cos(1 . z)$ [ist nämlich Fig. 76 Mm auf

der Ebene der xy, und in dieser mP auf AX perpendiculär, so steht auch MP auf AX senkrecht, und es folgt aus dem rechtwinkeligen Dreieck AMP sofort $AP = AM \cos MAP$, oder wegen $AP = x'$ und $AM = 1$, auch $x' = \cos(1.x)$; so auch für die übrigen], und eben so $x'' = \cos(2.x)$, $y'' = \cos(2.y)$ und $z'' = \cos(2.z)$, wobei wieder $(1.x)$ den Winkel der Geraden (1) mit der Axe der x, $(2.x)$ jenen der Geraden (2) mit dieser Axe u. s. w. bezeichnet; so erhält man auch aus der obigen Relation (α) [§. 577]:

$$(p) \quad \cos(1.2) = \cos(1.x)\cos(2.x) + \cos(1.y)\cos(2.y) + \cos(1.z)\cos(2.z),$$

eine merkwürdige Relation, um den Winkel der beiden Geraden (1) und (2) zu finden, wenn ihre Neigungen gegen die Coordinatenaxen bekannt sind. — Setzt man dagegen diese nämlichen Werthe von x', y', z' in die Gleichung (3); so erhält man (q) $[\cos(1.x)]^2 + [\cos(1.y)]^2 + [\cos(1.z)]^2 = 1$. (Vergl. §. 566).

§. **581**. 4) Aus der Gleichung (6) folgt $a = \frac{x'}{z'}$, $b = \frac{y'}{z'}$, oder wenn man für x', y', z' die vorhin erwähnten Werthe setzt, auch $a = \frac{\cos(1.x)}{\cos(1.z)}$ und $b = \frac{\cos(1.y)}{\cos(1.z)}$, so, dass man also auch für die Gleichungen einer Geraden im Raume die merkwürdige Form hat:

$$(r) \quad \left[x = \frac{\cos(1.x)}{\cos(1.z)} z + \alpha, \; y = \frac{\cos(1.y)}{\cos(1.z)} z + \beta\right].$$

§. **582**. 5) Aus den vorigen Werthen von a und b folgt: $\cos(1.x) = a\cos(1.z)$ und $\cos(1.y) = b\cos(1.z)$; die Summe der Quadrate dieser Gleichungen noch um $[\cos(1.z)]^2$ vermehrt, gibt:

$$[\cos(1.x)]^2 + [\cos(1.y)]^2 + [\cos(1.z)]^2 = (1 + a^2 + b^2)[\cos(1.z)]^2,$$

und daraus folgt, mit Rücksicht auf die Relation q (§. 580) und dann aus den beiden erstern Gleich. für $\sqrt{1 + a^2 + b^2} = n$:

$$(s) \quad \cos(1.z) = \frac{1}{n}, \; \cos(1.y) = \frac{b}{n}, \; \cos(1.x) = \frac{a}{n}.$$

§. **583.** Aufgabe. Eine Gerade und ein ausserhalb liegender Punct sind gegeben; man soll *a*) die Gleichungen und *b*) die Länge des aus diesem Puncte auf die Gerade gefällten Perpendikels finden.

Auflösung. *a*) Seien (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ die Gleichungen der gegebenen Geraden und x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes; so sind die Gleichungen des durch diesen Punct gehenden Perpendikels von der Form (§. 574): (2) $[x - x' = a'(z - z'),\ y - y' = b'(z - z')]$, wobei a' und b' noch unbestimmt sind. Da aber die Gerade (2) auf der vorigen (1) perpendiculär sein soll, so hat man (§. 579) (3) $1 + aa' + bb' = 0$, und überdiess noch, da sich diese beiden Geraden durchschneiden [§. 576, (3)]: $(a - a')(\beta - \beta') = (b - b')(\alpha - \alpha')$, oder, wenn man für α', β' die aus den Gleichungen $x' = a'z' + \alpha'$ und $y' = b'z' + \beta'$ des durch den Punct x', y', z' gehenden Perpendikels folgenden Werthe substituirt, auch (4) $(a - a')(\beta + b'z' - y') - (b - b')(\alpha + a'z' - x') = 0$; aus welchen beiden Gleichungen (3) und (4) nunmehr a' und b' bestimmt werden können. Wir überlassen die weitere Ausführung, so wie auch die Längenbestimmung des Perpendikels dem Anfänger selbst, indem wir ohnehin weiter unten (§. 599) von dieser Aufgabe eine einfachere Auflösung geben werden.

Aufgaben über die *Ebene*.

§. **584** Aufgabe. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Puncte geht.

Auflösung. Seien x', y', z', x'', y'', z'' und x''', y''', z''' die Coordinaten der drei gegebenen Puncte. Die gesuchte Gleichung hat (§. 559) die Form:

$$(1)\quad \frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = -1,$$

welche zufolge den Bedingungen der Aufgabe auch noch gilt, wenn man statt x, y, z nach und nach x', y', z', x'', y'', z'' und x''', y''', z''' schreibt; die dadurch entstehenden drei Gleichungen dienen zur Bestimmung der drei unbestimmten Quotienten $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, und zwar findet man, am

einfachsten durch die bekannte Eliminationsmethode, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner für sich schreibt:

$$A = (y'z''' - y'''z') + (y''z' - y'z'') + (y'''z'' - y''z'''),$$
$$B = (x'z'' - x''z') + (x''z''' - x'''z'') + (x'''z' - x'z'''),$$
$$C = (x'y''' - x'''y') + (x''y' - x'y'') + (x'''y'' - x''y'''),$$
$$D = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z'),$$

welche Werthe (die man auch noch sämmtlich mit einem unbestimmten Factor P multipliciren könnte) in der obigen Gleichung (1) substituirt, sofort die verlangte Gleichung geben.

Anmerk. Diese 4 Coefficienten haben eine sehr merkwürdige geometrische Bedeutung.

Bezeichnet man die doppelte Fläche des Dreieckes, welches durch die Verbindung der drei gegebenen Puncte entsteht, durch F, ferner die zweifachen Flächen der Dreiecke, welche durch Projection des erstern auf die 3 coordinirten Ebenen der yz, xz und xy entstehen, durch F_x, F_y, F_z, so wie endlich die Länge des aus dem Ursprunge der Coordinaten auf die Ebene des zuerst genannten Dreieckes (d. i. auf die gesuchte Ebene) gefällten Perpendikels durch p; so findet man $A = F_x$, $B = F_y$, $C = F_z$ und $D = p \,.\, F$.

§. **585.** Aufgabe. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch einen bestimmten Punct und eine gegebene Gerade geht.

Auflösung. Seien x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes und (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ die Gleichungen der gegebenen Geraden. Die gesuchte Gleichung der Ebene hat die Form (2) $Ax + By + Cz + D = 0$, und man hat daraus, vermöge der ersten Bedingung: (2') $Ax' + By' + Cz' + D = 0$; es ist also auch, wenn man abzieht: (3) $A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$ die Gleichung einer durch den Punct x', y', z' gehenden Ebene. — Um ferner die noch unbestimmten Coefficienten A, B, C der zweiten Bedingung gemäss zu bestimmen, wird man bloss ausdrücken dürfen, dass die Gerade (1) gänzlich in der Ebene (2) oder (3) liege, und diess geschieht, indem man bemerkt, dass die Coordinaten x, y, z aller Puncte der Geraden die Gleichung der Ebene befriedigen müssen. Setzt man daher die Werthe von x, y aus

den Gleichungen (1) in (2); so erhält man $(A\alpha+B\beta+D)$ $+(Aa+Bb+C)z=0$, und da diese Gleichung für jeden Werth von z gelten soll, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten: (4) $A\alpha+B\beta+D=0$ und (5) $Aa+Bb+C=0$, welche beiden Gleichungen sonach die Bedingung ausdrücken, dass die Gerade (1) gänzlich in der Ebene (2) liegt. — Wird die Gleichung (4) von jener (2') subtrahirt, so erhält man (6) $A(x'-\alpha)+B(y'-\beta)+Cz'=0$, eine Gleichung, welche die Grösse D nicht mehr enthält und die vorige Gleichung (4) ersetzen kann. Um endlich noch aus den beiden Gleichungen (5) und (6) die Coefficienten $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ zu bestimmen, hat man, diese indess durch v und w bezeichnet: $av+bw+1=0$, $(x'-\alpha)v+(y'-\beta)w+z'=0$, und daraus durch Elimination:

$$v=\frac{A}{C}=\frac{\beta+bz'-y'}{a(y'-\beta)-b(x'-\alpha)} \text{ und}$$

$$w=\frac{B}{C}=\frac{-(\alpha+az'-x')}{a(y'-\beta)-b(x'-\alpha)},$$

so, dass man also hat: $A=\beta+bz'-y'$, $B=-(\alpha+az'-x')$ und $C=a(y'-\beta)-b(x'-\alpha)$, wodurch endlich die Gleichung (3) der gesuchten Ebene völlig bestimmt ist.

Zusatz. Liegt der gegebene Punct in der gegebenen Geraden, so folgt auch aus der Gleichung (1): $x'=az'+\alpha$, $y'=bz'+\beta$, mit welchen Werthen aber A, B, C Null, also $\frac{A}{C}=\frac{0}{0}$ und $\frac{B}{C}=\frac{0}{0}$ werden, zum Beweise, dass in diesem Falle die Aufgabe unbestimmt sei oder unzählige Ebenen der Aufgabe Genüge leisten.

§. 586. Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier gegebenen Ebenen zu finden.

Auflösung. Seien I. $Ax+By+Cz+D=0$ und II. $A'x+B'y+C'z+D'=0$ die Gleichungen der beiden gegebenen Ebenen I. und II. Fällt man vom Ursprunge der Coordinaten auf diese Ebenen I, II die Perpendikel (beziehungsweise) p, p'; so hat man für die Winkel derselben mit den Coordinatenaxen (§. 567):

$$\cos(p.x)=\frac{A}{N},\ \cos(p.y)=\frac{B}{N},\ \cos(p.z)=\frac{C}{N}$$

$$\text{und } N=\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

dann

$$\cos(p'.x) = \frac{A'}{N'},\ \cos(p'.y) = \frac{B'}{N'},\ \cos(p'.z) = \frac{C'}{N'}$$

$$\text{und } N' = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

Für den Winkel der beiden Perpendikel p, p' hat man aber [§. 580, (p)]:

$$\cos(p.p') = \cos(p.x)\cos(p'.x) + \cos(p.y)\cos(p'.y) + \cos(p.z)\cos(p'.z),$$

mithin, wenn man die unmittelbar vorhergehenden Werthe substituirt und berücksichtiget, dass der Winkel der beiden Perpendikel p, p' zugleich auch der gesuchte Winkel (I. II) der beiden Ebenen I und II ist:

$$\text{(I)}\quad \cos(\text{I.II}) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Folgerungen.

§. **587.** 1) Laufen die beiden Ebenen mit einander parallel, so ist $\cos(\text{I..II}) = \cos 0 = 1$, und man erhält aus der vorigen Relation (1), wenn man gleich den Nenner wegschafft, die Gleichung quadrirt und reducirt:

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche wieder in die 3 folgenden zerfällt: $AB' - A'B = 0$, $AC' - A'C = 0$ und $BC' - B'C = 0$, so, dass also die Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der beiden Ebenen I und II sind:

$$\text{(2)}\quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},\ \frac{A}{C} = \frac{A'}{C'},\ \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'},$$

von denen übrigens jede eine Folge der beiden andern ist.

Anmerk. Diese Bedingungsgleichungen (2) lassen sich auch leicht finden, wenn man bemerkt, dass die Knotenlinien der beiden parallelen Ebenen (§. 564) ebenfalls unter sich parallel sein müssen.

§. **588.** 2) Stehen die Ebenen I und II auf einander perpendiculär, so hat man wegen $\cos(\text{I}.\text{II}) = \cos 90^0 = 0$ sofort die Bedingungsgleichung: (3) $AA' + BB' + CC' = 0$.

§. **589.** 3) Lässt man eine der beiden Ebenen, z. B. jene II, nach und nach mit den 3 coordinirten Ebenen zusammen fallen; so erhält man, wenn sie zuerst auf die

Ebene der xy fällt, da die obige Gleichung II in diesem Falle in $z=0$ (als Gleichung der Ebene der xy, §. 563) übergehen muss; $A'=0$, $B'=0$, $D'=0$, und daher für den Winkel $(\mathrm{I}.xy)$ der Ebene I mit der coordinirten Ebene der xy, wenn man wieder $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=N$ setzt:

$$(4)\begin{cases} \cos(\mathrm{I}.xy)=\frac{C}{N}=\cos(p.z) & \text{[wegen Gleich. (2), §. 567].} \\ \cos(\mathrm{I}.xz)=\frac{B}{N}=\cos(p.y) & \text{detto. detto.} \\ \cos(\mathrm{I}.yz)=\frac{A}{N}=\cos(p.x) & \text{detto. detto.} \end{cases}$$

Da also zugleich (in Uebereinstimmung mit §. 565, Anmerk.)

$$(5)\quad (\mathrm{I}.xy)=(p.z),\ (\mathrm{I}.xz)=(p.y)\ \text{und}\ (\mathrm{I}.yz)=(p.x)$$

ist, so lässt sich die Gleichung der Ebene (1), §. 565 auch so darstellen:

$$(6)\quad x\cos(\mathrm{I}.yz)+y\cos(\mathrm{I}.xz)+z\cos(\mathrm{I}.xy)=p.$$

Auch gibt die Summe der Quadrate der Gleichungen (4):

$$(7)\quad [\cos(\mathrm{I}.xy)]^2+[\cos(\mathrm{I}.xz)]^2+[\cos(\mathrm{I}.yz)]^2=1$$

[welche Gleichung übrigens auch aus den vorigen Relationen (5) und der Gleichung (2), §. 566, folgt].

§. **590**. 4) Analog mit den vorigen Relationen (5) erhält man auch für eine 2. Ebene II, auf welche vom Ursprung das Perpendikel p' gefällt wird:

$$(p'.z)=(\mathrm{II}.xy),\ (p'.y)=(\mathrm{II}.xz),\ (p'.x)=(\mathrm{II}.yz);$$

es ist also nach der Relation (p), §. 580), auch:

$$(8)\quad \cos(\mathrm{I.II})=\cos(\mathrm{I}.xy)\cos(\mathrm{II}.xy)+\cos(\mathrm{I}.xz)\cos(\mathrm{II}.xz)$$
$$+\cos(\mathrm{I}.yz)\cos(\mathrm{II}.yz).$$

§. **591**. Aufgabe. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch einen bestimmten Punct geht und mit einer gegebenen Ebene parallel lauft.

Auflösung. Seien x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes, und (1) $Ax+By+Cz+D=0$ die Gleichung der gegebenen Ebene. Die Gleichung der gesuchten Ebene ist, mit Rücksicht auf die 1. Bedingung (§. 585), von der Form:

$$(2)\quad A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z')=0.$$

Zufolge der 2. Bedingung hat man aber [§. 587], (2)]:

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C} \quad \text{und} \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}.$$

Werden diese Werthe in der vorigen Gleichung (2), die man früher durch C' dividirt, substituirt, und wird zuletzt die ganze Gleichung wieder mit C multiplicirt; so erhält man für die gesuchte Gleichung der Ebene:

$$(3) \quad A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Aufgaben über die *gerade Linie* in Verbindung mit der Ebene.

§. **592.** Aufgabe. Den Neigungswinkel einer gegebenen Geraden mit einer gegebenen Ebene zu bestimmen.

Auflösung. Seien (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ und I. $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichungen der gegebenen Geraden und Ebene; so sind (§. 575) (2) $[x = az,\ y = bz]$ die Gleichungen einer durch den Ursprung mit der Geraden (1) gezogenen Parallelen, und (3) $[x = a'z,\ y = b'z]$ jene des aus demselben Puncte auf die Ebene I gefällten Perpendikels p, wenn (§. 581) $a' = \frac{\cos(p.x)}{\cos(p.z)}$, $b' = \frac{\cos(p.y)}{\cos(p.z)}$ und [§. 589, Gleichung (4) $\cos(p.x) = \frac{A}{N}$, $\cos(p.y) = \frac{B}{N}$, $\cos(p.z) = \frac{C}{N}$, folglich, wenn man substituirt, $a' = \frac{A}{C}$ und $b' = \frac{B}{C}$ gesetzt wird. Da endlich der Winkel der beiden Geraden (2) und (3) den gesuchten W. (1.I) zu 90° ergänzt, also $\cos(2.3) = \sin(1.\text{I})$ ist; so hat man nach Formel I., §. 577:

$$(s) \quad \sin(1.\text{I}) = \frac{aA + bB + C}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Besondere Fälle.

§. **593.** 1) Läuft die Gerade mit der Ebene parallel, so ist $\sin(1.\text{I}) = 0$, folglich $aA + bB + C = 0$.

§. **594.** 2) Steht die Gerade auf der Ebene perpendiculär, so ist $\sin(1.\text{I}) = 1$, und man erhält aus der

vorigen Formel (s), wenn man gleich den Nenner wegschafft, die Gleichung quadrirt und reducirt:

$$(A-Ca)^2+(B-Cb)^2+(Ab-Ba)^2=0,$$

eine Bedingungsgleichung, welche jedoch wieder in die 3 folgenden: $A-Ca=0$, $B-Cb=0$ und $Ab-Ba=0$, oder, da die letztere eine Folge der beiden erstern ist, bloss in die beiden: (4) $a=\frac{A}{C}$ und $b=\frac{B}{C}$ zerfällt; Bedingungsgleichungen, die wir im Verlaufe dieser Entwickelung (§. 592) bereits gefunden haben.

§. **595**. Aufgabe. Ein Punct und eine Ebene sind gegeben; man soll α) die Gleichungen und β) die Länge des aus diesem Puncte auf die Ebene gefällten Perpendikels bestimmen.

Auflösung. α) Sind x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes und I. $Ax+By+Cz+D=0$ die Gleichung der gegebenen Ebene; so hat man für die gesuchten Gleichungen der durch den Punct x', y', z' gehenden, auf der Ebene I perpendiculären Geraden: (1) $[x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z')]$, wobei aber [§. 594, (4)] (2) $a=\frac{A}{C}$ und $b=\frac{B}{C}$ ist.

§. **596**. β) Um die Länge dieses Perpendikels zu finden, wird man dessen Durchschnittspunct x, y, z mit der Ebene I aufsuchen und die Entfernung desselben vom Puncte x', y', z' nach Relation (1), §. 557 bestimmen. Da es sich aber, wie diese Formel zeigt, weniger um die Coordinaten x, y, z (die statt x'', y'', z'' stehen) als um die Differenzen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ handelt; so wird man bei der Verbindung der beiden Gleichungen (1) und I. (um den genannten Durchschnittspunct x, y, z zu erhalten) am einfachsten sogleich diese erwähnten Differenzen selbst bestimmen. Dazu gebe man der Gleichung I. durch gleichzeitiges Addiren und Abziehen der Glieder Ax', By', Cz', und indem man Kürze halber $Ax'+By'+Cz'+D=D'$ setzt, die Form: $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0$; so erhält

man, wenn in dieser Gleichung für $x - x'$ und $y - y'$ die Werthe aus (1) [mit Zuziehung von (2)] gesetzt werden: $A^2(z - z') + B^2(z - z') + C^2(z - z') + CD' = 0$, und daraus, wenn man Kürze halber $A^2 + B^2 + C^2 = N^2$ setzt: $z - z' = \frac{-CD'}{N^2}$, so wie damit aus (1) und (2):

$$y - y' = \frac{-BD'}{N^2} \quad \text{und} \quad x - x' = \frac{-AD'}{N^2}.$$

Bezeichnet man daher die gesuchte Länge des Perpendikels mit P, so folgt nach der genannten Formel in §. 557:

$$P^2 = \frac{D'^2(A^2 + B^2 + C^2)}{N^4} \quad \text{oder} \quad P = \frac{D'}{N},$$

und wenn man substituirt, endlich:

$$(3) \quad P = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Zusatz. Wäre der gegebene Punct der Ursprung, also $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; so wäre $P = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ [vergleiche §. 567, (1)]. Läge dagegen dieser Punct in der gegebenen Ebene selbst, wodurch sonach die obige Gleichung I. für $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ befriedigt würde, also $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ wäre; so wäre auch, wie es sein soll, $P = 0$.

§. **597.** Aufgabe. Ein Punct und eine Gerade sind gegeben; man soll α) die Gleichung der durch diesen Punct auf der Geraden perpendiculären Ebene, und β) den Abstand dieses Punctes von dem Durchschnittspunct der Geraden und der Ebene bestimmen.

Auflösung. α) Sind wieder x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punctes und (1) [$x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$] die Gleichungen der gegebenen Geraden; so ist die Gleichung der durch den Punct x', y', z' gehenden Ebene von der Form I. $A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$. Da aber die Gerade (1) auf dieser Ebene I. perpendiculär sein soll, so muss [§. 594, (4)] $A = aC$ und $B = bC$ sein, so, dass wenn man diese Werthe in I. substituirt und die Gleichung durch C abkürzt, man für die gesuchte Gleichung erhält:

$$(2) \quad a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0.$$

§. **598.** β) Um ferner den Abstand D des Punctes x', y', z' vom Durchschnittspuncte x, y, z der Geraden (1) mit der Ebene (2) zu finden, wird man zuerst aus der (dazu nöthigen) Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) statt dieser Coordinaten x, y, z sogleich wieder die Differenzen $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ bestimmen und in die Formel (1), §. 557 substituiren. Zur Vereinfachung dieser Verbindung aber bringen wir die Gleichungen (1) auf die Form:

$$(3)\quad \left[x-x'=a(z-z')+az'-x'+\alpha,\quad y-y'=b(z-z')+bz'-y'+\beta\right],$$

und substituiren diese Werthe von $x-x'$ und $y-y'$ in die Gleichung (2); so erhalten wir:

$$(1+a^2+b^2)(z-z')+a(az'-x'+\alpha)+b(bz'-y'+\beta)=0,$$

und daraus: $z-z'=\frac{a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'}{1+a^2+b^2}-z'$, oder wenn man der Kürze wegen $a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'=P$ setzt auch:

$$(4)\quad \left[z-z'=\frac{P}{1+a^2+b^2}-z',\right.$$ und damit aus (3):

$$y-y'=\frac{bP}{1+a^2+b^2}-(y'-\beta),$$

$$\left.x-x'=\frac{aP}{1+a^2+b^2}-(x'-\alpha)\right].$$

Setzt man also diese Werthe in die genannte Formel (§. 557), so erhält man:

$$D^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-\frac{P^2}{1+a^2+b^2},$$

oder wenn man alles auf den Nenner $1+a^2+b^2$ bringt, für P wieder den Werth herstellt und weglässt, was sich aufhebt:

$$\begin{aligned}(1+a^2+b^2)D^2 &= \left[(x'-\alpha)^2-2az'(x'-\alpha)+a^2z'^2\right]\\ &+\left[(y'-\beta)^2-2bz'(y'-\beta)+b^2z'^2\right]\\ &+\left[b^2(x'-\alpha)^2-2ab(x'-\alpha)(y'-\beta)+a^2(y'-\beta)^2\right],\end{aligned}$$

und daraus folgt endlich, wenn man noch berücksichtiget, dass im 2. Theil dieser Gleichung lauter vollständige Quadrate vorkommen:

$$(5)\quad D=\sqrt{\left[\frac{(x'-az'-\alpha)^2+(y'-bz'-\beta)^2+[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)]^2}{1+a^2+b^2}\right]}.$$

§. **599**. Zusatz.

Da diese Verbindungslinie D des Punctes x', y', z' und des Durchschnittspunctes der gegebenen Geraden mit der gesuchten Ebene, dessen Coordinaten wir einen Augenblick durch x'', y'', z'' bezeichnen wollen, zugleich auf dieser Geraden perpendiculär steht; so sind die Gleichungen dieser auf (1) normalen Geraden D (§. 574):

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'),\quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z'),$$

wobei die Differenzen $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ nichts anderes als die obigen Werthe (4) von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ sind. Diese letztern Werthe wird man daher nur in die beiden vorigen Gleichungen substituiren dürfen, um sofort die Gleichungen des aus einem gegebenen Puncte x', y', z' auf eine gegebene Gerade (1) gefällten Perpendikels D zu erhalten, dessen Länge überdiess in der Formel (5) ausgedrückt ist. (Vergl. §. 583.)

[Das Capitel über die Transformation der Coordinaten im Raume s. II., 379 ff.]

Drittes Capitel.

Von den krummen Flächen und den Curven von doppelter Krümmung.

Einleitung.

§. **600**. Ist irgend eine regelmässige krumme Fläche gegeben, so wird auch ein diese Fläche charakterisirendes Gesetz zwischen den Coordinaten eines jeden Punctes derselben Statt finden. Sind daher x, y, z die auf ein System von drei (wieder rechtwinkeligen) coordinirte Ebenen sich beziehende Coordinaten eines beliebigen Punctes der Fläche; so wird man, wenn dieses Gesetz oder die charakteristische Eigenschaft der Fläche analytisch ausgedrückt wird, auf eine Gleichung von der Form $F(x, y, z) = 0$ kommen, welche, da sie alle Puncte der Fläche charakterisirt und nur für die Puncte dieser Fläche gilt, also diese letztere vollkommen bestimmt, sofort die Gleichung dieser krummen Fläche ist. Wird daraus eine der drei Variablen, z. B. z ausgedrückt, so erhält diese Gleichung auch die Form $z = f(x, y)$, und man sieht, dass dann die beiden Coordinaten x, y willkürlich, oder unabhängig variabel sind, während die dritte z von ihnen abhängig ist. Nimmt man daher in der coordinirten Ebene der xy willkürlich $x = a$, $y = b$, und findet man mit diesen Werthen aus der vorigen Gleichung z. B. $z = c$; so gehört das System der Gleichungen $x = a$, $y = b$, $z = c$ sofort einem Puncte der in Rede stehenden Fläche an.

§. **601**. Eben so ist wieder umgekehrt der Ort einer jeden Gleichung zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z (als Coordinaten) von der Form $F(x, y, z) = 0$ oder auch $z = f(x, y)$, eine Fläche, deren Natur und Beschaffenheit von der Natur dieser Gleichungen abhängt. — Man kann beliebig viele Puncte dieser Fläche bestimmen, wenn man in der gegebenen Gleichung von den Variablen zwei beliebig annimmt, z. B. $x = a$, $y = b$ setzt, und damit die

zugehörigen Werthe von $z = c$, c' . . . berechnet; nimmt man dann in der coordinirten Ebene der xy, $x = a$, $y = b$, errichtet in diesem entsprechenden Puncte auf diese Ebene ein Perpendikel (d. i. die Ordinate z) und trägt darauf die gefundenen Werthe (je nach dem Vorzeichen auf- oder abwärts) c, c' . . . auf; so hat man sofort einen oder mehrere Puncte dieser Fläche. Auf dieselbe Art findet man, indem man für x und y nach und nach andere Werthe nimmt, die übrigen zur Bestimmung der Fläche nöthigen Puncte.

§. **602.** Erklärung. Je nachdem die Gleichung $F(x, y, z) = 0$, die wir hier stets als algebraisch voraussetzen, in Bezug auf x, y, z vom 1^sten^, 2^ten^, . . . n^{ten} Grade ist, wird auch ihr Ort, oder die entsprechende Fläche, eine Fläche der 1^sten^, 2^ten^, . . . n^{ten} Ordnung genannt. Es lässt sich wie bei den krummen Linien (§. 487) nachweisen, dass der Grad der irgend einer Fläche entsprechenden Gleichung durch keinerlei Umwandlung der Coordinaten geändert werden kann, also diese Eintheilung wieder charakteristisch ist. So gehört also die Ebene, deren Gleichung (§. 559) vom 1. Grade ist, sofort zu den Flächen der ersten Ordnung; zugleich macht sie allein schon diese ganze Ordnung aus. Die Kugelfläche gehört, wie wir sogleich sehen werden, zu den Flächen der zweiten Ordnung, u. s. w.

§. **603.** Wir wollen endlich noch bemerken, dass das System der beiden Gleichungen $[F(x, y, z) = 0,\ F'(x, y, z) = 0]$ dem Durchschnitt zweier krummen Flächen, also einer Curve (im Allgemeinen) von doppelter Krümmung, deren Puncte nämlich nicht sämmtlich in einer Ebene liegen, angehört, dass aber diese Gleichung wieder (wie in §. 568) durch die beiden einfachern (wenn man nach und nach y und x eliminirt) $[f(x, z) = 0,\ f'(y, z) = 0]$ ersetzt werden können. Die erste dieser beiden Gleichungen ist die Gleichung einer durch die Curve im Raume auf der Ebene der xz perpendiculären Fläche, Cylinderfläche genannt, die also entsteht, wenn man in allen Puncten der in der Ebene der xz liegenden Curve, als Projection der Curve im Raume auf

diese Ebene, Perpendikel errichtet. Eben so ist die 2. Gleichung die einer durch dieselbe Curve im Raume auf der Ebene der yz perpendiculären Cylinderfläche, oder die Projection dieser Curve auf die Ebene der yz. Diese Curve im Raume, welche im Allgemeinen von doppelter Krümmung ist, wird also hier als Durchschnitt dieser beiden Cylinderflächen angesehen und bestimmt, genau so, wie in §. 568, Zusatz 1. die Gerade im Raume durch den Durchschnitt zweier auf den coordinirten Ebenen der xz und yz perpendiculären Ebenen $x = az + \alpha$ und $y = bz + \beta$ bestimmt wurde.

Die *Kugelfläche* oder *Sphäre*.

§. **604**. Eine der einfachsten krummen Flächen ist die Kugelfläche (auch schlechthin Kugel) oder Sphäre, und bekanntlich so beschaffen, dass alle ihre Puncte von einem bestimmten Punct, dem Mittelpuncte der Fläche, gleich weit abstehen.

Diese die Kugel charakterisirende Eigenschaft kann aber leicht analytisch ausgedrückt werden, um dadurch die Gleichung dieser Fläche zu erhalten. Denn bezeichnet man die (rechtwinkeligen) Coordinaten des Mittelpunctes der Kugel durch α, β, γ, jene eines beliebigen Punctes der Kugelfläche durch x, y, z, und die constante Entfernung beider Puncte, d. i. den Halbmesser, durch r; so hat man, da diese Relation für alle Puncte der Sphäre, aber auch nur für diese Puncte gilt, als Gleichung dieser Fläche (§. 557):

$$(1) \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Zusatz 1. Fällt der Mittelpunct mit dem Ursprunge der Coordinaten zusammen, so reducirt sich diese Gleichung wegen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ auf folgende: (2) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Zusatz 2. Da die allgemeine Gleichung (1) entwickelt, die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x \quad 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

erhält, so ist auch umgekehrt der Ort einer jeden Gleichung von der Form $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, wenn x, y, z rechtw. Coordinaten bezeichnen, eine Kugelfläche, wofür die Coordinaten des Mittelpunctes und der Halbmesser beziehungsweise die Werthe haben:

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}A, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}B, \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}C \text{ und}$$
$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}.$$

Berührungsebene der Kugel.

§. **605.** Wir wollen gleich hier die Gleichung einer Ebene entwickeln, welche die Kugel in einem bestimmten Puncte x', y', z' berühren soll, indem wir dabei als bekannt voraussetzen, dass diese Ebene auf dem Endpunct des an den Berührungspunct gezogenen Halbmessers perpendiculär sein muss.

Die Gleichung der Kugel, des an den Punct x', y', z' gezogenen Halbmessers (als einer durch die beiden Puncte α, β, γ, x', y', z' gehenden Geraden) und der durch denselben Punct x', y', z' gehenden Ebene sind [§§. 604, 574 und 585, (3)] beziehungsweise:

(1) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$,

(2) $\left[x-x'=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}(z-z'),\ y-y'=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}(z-z')\right]$ und

(3) $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$,

wobei aber noch, da diese Ebene auf der Geraden (2) perpendiculär sein soll (§. 594), $A=\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}C$ und $B=\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}C$ ist. Werden diese Werthe in der Gleichung (3) substituirt, und wird diese dann durch C abgekürzt, so erhält man für die Gleichung der Berührungs-Ebene:

(m) $(x'-\alpha)(x'-x)+(y'-\beta)(y'-y)+(z'-\gamma)(z'-z)=0$.

Berücksichtiget man, dass x', y', z' ein Punct der Kugel ist, setzt also diese Coordinaten in (1) statt x, y, z und addirt die entstehende Gleichung zu der vorigen (m); so erhält man auch als Gleichung der Tangential-Ebene:

(n) $(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)+(z'-\gamma)(z-\gamma)=r^2$,

welche sich von jener (1) der Kugel nur darin unterscheidet, dass statt der Quadrate $(x-\alpha)(x-\alpha)$ u. s. w. die Rechtecke $(x'-\alpha)(x-\alpha)$ etc. stehen.

Zusatz. Liegt der Mittelpunct der Kugel im Ursprung der Coordinaten, so geht diese letztere Gleichung, wegen $\alpha=\beta=\gamma=0$ über in jene:

(p) $x'x+y'y+z'z=r^2$ [Vergl. §. 434, (7)].

Die *Cylinderflächen.*

§. **606.** Erklärung. Unter Cylinderflächen versteht man alle jene Flächen, welche durch die Bewegung einer

Geraden, der erzeugenden Linie, die dabei beständig durch eine gegebene Curve, die Leitlinie, geht und mit einer festen Geraden, gewöhnlich die Axe, also auch mit sich selbst parallel bleibt, erzeugt werden.

§. **607**. Um diesen Charakter der Cylinderflächen analytisch auszudrücken, seien (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ die Gleichungen der erzeugenden Geraden in irgend einer ihrer Positionen, und (§. 603) (2) $[F(x, y, z) = 0,\ F'(x, y, z) = 0]$ die Gleichungen der Leitlinie, die im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung sein wird. — Da nun die erzeugende Gerade fortwährend mit sich selbst parallel bleibt, so behalten die Grössen a, b der Gleichungen (1) stets denselben Werth (§. 578), dagegen ändern sich die Grössen α, β als Coordinaten des Durchschnittspunctes der Geraden (1) mit der Ebene der xy (es folgt nämlich für $z = 0$ sofort $x = \alpha$, $y = \beta$) von einer Lage dieser erzeugenden Geraden zur andern. Geht man nämlich in der Cylinderfläche von einem Punct zu einem andern in der nämlichen erzeugenden Geraden fort, so bleiben dabei α, β zugleich constant; geht man dagegen dabei von einer erzeugenden Geraden zu einer andern (d. h. zu einer andern Position dieser Geraden), so sind beide Grössen α, β zusammen veränderlich, und daraus folgt, dass zwischen α und β eine gewisse Relation bestehen, oder jede eine Function der andern sein muss; man kann also setzen: $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ oder $\beta = f(\alpha)$. Setzt man endlich in diese Gleichung für α und β die aus den Gleichungen (1) folgenden Werthe, so erhält man als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen:

$$(3)\quad y - bz = f(x - az).$$

Dabei findet man die Natur der Function f durch Verbindung der beiden Systeme der Gleichungen (1) und (2), wodurch man nämlich ausdrückt, dass die erzeugende Linie (1) beständig durch die Leitlinie (2) geht.

§. **608**. Beispiele hierüber.

1. Es sei, um ein einfaches Beispiel hierüber zu geben, die Leitlinie ein in der coord. Ebene der xy liegender Kreis und dessen Mittel-

punct im Ursprung der Coordinaten; so sind (1) $[x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0]$ die Gleichungen der Leitlinie, und (2) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$ die der erzeugenden Geraden. Verbindet man nun, erwähntermassen, diese vier Gleichungen (1) und (2) mit einander; so erhält man für die gedachte Relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ der zusammen constanten und variablen Grössen α, β sofort: $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, und wenn man für α und β die aus (2) folgenden Werthe setzt, für die Gleichung des schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis: (*h*) $(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2$.

2. Nimmt man, als noch einfachern Fall, die Axe der z zur Axe des Cylinders, d. i. als jene feste Gerade, mit welcher die erzeugende fortwährend parallel bleibt; so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden in irgend einer ihrer Positionen [statt den obigen (2)]: $x = \alpha$, $y = \beta$ (§. 571), und man erhält sonach aus den vorigen Gleichungen (*h*), wegen $a = 0$ und $b = 0$, für die Gleichung des gemeinen, auf der Ebene der xy senkrechten Cylinders: (*l*) $x^2 + y^2 = r^2$. — Diese Gleichung gehört, wie man sieht, zugleich dem in der Ebene der xy liegenden Kreise, als Projection der Cylinderfläche auf diese Ebene, welche Fläche durch diese Projection eben so gegeben und bestimmt ist, wie eine auf der Ebene der xy perpendiculäre Ebene durch ihre Projection $y = cx + \gamma$, d. i. der Gleichung einer in dieser coord. Ebene liegenden Geraden.

Anmerk. Wäre der Kreis, als Leitlinie, überhaupt im Raume gegeben; so würde man, da er immer durch den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene entstehen kann, statt den vorigen Gleichungen (1) die folgenden:

$$[(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2 = r^2,\ Ax + By + Cz + D = 0]$$

setzen, und im Uebrigen wie vorhin verfahren.

Conische oder Kegelflächen.

§. **609.** Erklärung. Die conischen Flächen entstehen durch die Bewegung einer Geraden, der erzeugenden Linie, welche dabei beständig durch einen festen Punct im Raume, den Mittelpunct oder Scheitel der Fläche, und eine gegebene Curve, die Leitlinie, geht.

§. **610.** Um diesen Charakter analytisch auszudrücken oder die Gleichung dieser Flächen zu finden, seien x', y', z' die Coordinaten des festen Punctes, ferner [§. 574, (*m*)]

$$(1)\quad [x - x' = a(z - z'),\ y - y' = b(z - z')]$$

die Gleichungen der durch diesen Punct gehenden erzeugenden Geraden in irgend einer ihrer Positionen, und endlich

$$(2)\quad [F(x, y, z) = 0,\ F'(x, y, z) = 0]$$

wieder jene der Leitlinie. In der Gleichung (1) sind die Grössen a, b für dieselbe Lage der erzeugenden Linie constant, dagegen für verschiedene Lagen veränderlich, d. h. geht man von einem Puncte der Kegelfläche zu einem nächsten, ohne die betreffende erzeugende Gerade zu verlassen, so sind a und b zusammen constant; geht man aber dabei von einer Position der erzeugenden Linie zu einer andern fort, so sind a und b zusammen variabel: es muss also wieder (§. 607) von diesen beiden Grössen jede eine Function der andern sein, so dass man $\varphi(a, b) = 0$ oder auch $b = f(a)$ setzen kann. Substituirt man daher für a und b die aus den Gleichungen (1) folgenden Werthe, so erhält man

$$(3) \quad \frac{y-y'}{z-z'} = f\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)$$

als allgemeine Gleichung der Kegelflächen.

Um in einem gegebenen Falle die Natur und Beschaffenheit der Function f zu finden, muss man wieder die beiden Systeme von Gleichungen (1) und (2) mit einander verbinden.

§. 611. Beispiele hierüber.

1. Sei die Leitlinie eine in einer mit der coordin. Ebene der xy parallelen Ebene liegende Ellipse, deren grosse und kleine Axe beziehungsweise in den Durchschnittslinien dieser Ebene mit den coordin. Ebenen der xz und yz, ihr Mittelpunct also in der Axe der z liegt, und sei der Ursprung der Coordinaten zugleich der feste Punct oder Mittelpunct der Fläche; so hat man (§. 569) (1) $[x = az,\ y = bz]$ als Gleichungen der durch diesen Punct gehenden erzeugenden Geraden, und (§§. 462, 562) (2) $[A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,\ z = c]$ jene der Leitlinie. — Diese beiden Systeme (1) und (2) mit einander verbunden, erhält man: $A^2b^2 + B^2a^2 = \frac{A^2B^2}{c^2}$, und wenn man für a und b die aus den Gleichungen (1) folgenden Werthe substituirt:

$$A^2y^2 + B^2x^2 - \frac{A^2B^2}{c^2}z^2 = 0$$

als Gleichung des elliptischen Kegels.

2. Eben so findet man, wenn die Leitlinie ein in der Ebene der xy liegender Kreis vom Halbmesser r ist, dessen Mittelpunct im Ursprung liegt, für die Gleichung des schiefen Kegels von kreisförmiger Basis:

$$[x'(z-z') - z'(x-x')]^2 + [y'(z-z') - z'(y-y')]^2 = r^2(z-z')^2.$$

Liegt dabei der Scheitel oder Mittelpunct x', y', z' zugleich in der Axe der z; so erhält man wegen $x'=0$, $y'=0$ für den geraden Kegel, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt, die Gleichung:

$$z'^2(x^2+y^2)=r^2(z-z')^2.$$

Windschiefe und *conoidische* Flächen.

§. **612.** Erklärung. Bewegt sich die erzeugende Gerade dergestalt, dass sie beständig durch zwei gegebene Leitlinien geht und einer festen Ebene parallel bleibt; so entsteht eine windschiefe oder windische Fläche. Ist als besonderer und einfachster Fall die eine Leitlinie eine Gerade, so wird die erzeugte windische Fläche, wegen ihrer Aehnlichkeit mit dem Kegel (Conus), conoidische Fläche genannt. Ist die gerade Leitlinie perpendiculär auf der genannten festen Ebene, so heisst die Fläche insbesondere ein gerades Conoid.

§. **613.** Um nun die Gleichung dieser letztern oder conoidischen Flächen zu erhalten, nehmen wir zur grössern Einfachheit die gerade oder erste Leitlinie zur Axe der z, und die feste Ebene, mit welcher die erzeugende Gerade beständig parallel bleibt, zur coordin. Ebene der xy, wodurch wir also im Allgemeinen ein schiefwinkeliges Coordinatensystem erhalten. Diess vorausgesetzt, seien

$$(1)\quad [F(x,y,z)=0,\ F'(x,y,z)=0]$$

die Gleichungen der zweiten Leitlinie und (2) $[y=mx,\ z=n]$ die der erzeugenden Geraden in einer ihrer Lagen (indem, das Coordinatensystem mag recht- oder schiefwinkelig sein, die Projection dieser Geraden in der Ebene der xy durch den Ursprung geht und mit der Ebene der xy parallel bleibt). — Die Grössen m und n bleiben aber wieder für alle Puncte der Fläche, welche in der nämlichen erzeugenden Geraden (d. i. der erzeugenden Linie in ein und derselben Position) liegen, constant, dagegen für in verschiedenen erzeugenden Linien liegende Puncte zusammen veränderlich, so dass wieder nothwendig jede eine Function der andern ist, und man also, wenn man m und n gleich aus (2) ausdrückt, setzen kann:

$$\varphi\left(\frac{y}{x},\ z\right)=0 \quad \text{oder} \quad (3)\ z=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

welches sofort die allgemeine Gleichung der conoidischen Flächen ist. — Um für gegebene bestimmte Fälle die Natur der Function f zu finden, wird man wieder die vier Gleichungen (1) und (2) als coexistirend ansehen, daraus x, y, z eliminiren, und dadurch zur gesuchten Relation zwischen m und n gelangen.

§. 614. Beispiele über diese Flächen.

1. Es sei die zweite Leitlinie ebenfalls eine Gerade, welche die Gleichungen besitzt: (1) $[x = az + \alpha,\ y = bz + \beta]$. Diese Gleichungen mit jenen (2) $[y = mx,\ z = n]$ der erzeugenden Geraden verbunden, geben zuerst $x = an + \alpha$, $y = bn + \beta$, und dann wegen $y = mx$ sofort: $bn + \beta = amn + \alpha m$ (als die erwähnte Relation zwischen m und n). Setzt man endlich für m und n die aus (2) folgenden Werthe, so erhält man nach einer einfachen Reduction: (3) $bxz + \beta x - ayz - \alpha y = 0$ als Gleichung der conoidischen Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die sich dabei beständig auf zwei andere Geraden stützt und einer bestimmten Ebene parallel bleibt.

2. Sei für rechtwinkelige Axen die zweite Leitlinie eine Ellipse, deren Ebene im Abstande d mit der coordinirten Ebene der yz parallel läuft, grosse Axe in der Ebene der xy und Mittelpunct in der Axe der x liegt; so sind die Gleichungen dieser zweiten Leitlinie: (1) $[x = d,\ a^2z^2 + b^2y^2 = a^2b^2]$. Diese wieder mit den vorigen Gleichungen (2) der erzeugenden Geraden (die für jedes Axensystem die nämliche Form behalten) verbunden, geben zuerst:

$$a^2n^2 + b^2m^2d^2 = a^2b^2,$$

und wenn man für m und n die Werthe in x und z herstellt:

$$a^2x^2z^2 + b^2d^2y^2 - a^2b^2x^2 = 0$$

als Gleichung der conoidischen Fläche, nach welcher manchmal gewisse Gewölbe geformt werden.

Für $b = a$ geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser a, und die Gleichung der Fläche in $(z^2 - a^2)x^2 + d^2y^2 = 0$ über.

Die *Rotations-* oder durch *Umdrehung* erzeugten Flächen.

§. 615. Erklärung. Die Rotationsflächen entstehen durch Umdrehung einer geraden oder (einfach oder doppelt gekrümmten) krummen Linie, der erzeugenden Linie, um eine Gerade als Axe; dabei beschreibt jeder Punct der erzeugenden Linie einen Kreis, dessen Ebene auf der Axe perpendiculär steht und Mittelpunct in dieser Axe liegt.

Aus dieser Entstehungsart der Rotationsflächen folgt, dass jeder Schnitt derselben mit einer auf der Axe perpendiculären Ebene ein *Kreis* sei; und diesen Charakter wollen wir sofort zur analytischen Darstellung dieser Flächen benützen, wobei wir noch bemerken, dass ein jeder solcher Kreis, durch ein System von zwei Gleichungen, davon die eine einer Kugel, deren Mittelpunct in der Umdrehungsaxe liegt, und die andere einer auf dieser Axe perpendiculären Ebene angehört, ausgedrückt werden kann.

§. **616**. Diess vorausgeschickt, seien (1) $[F(x, y, z) = 0, F'(x, y, z) = 0]$ die Gleichungen der erzeugenden Linie, und $[x - \alpha = a(z - \gamma),\ y - \beta = b(z - \gamma)]$ die Gleichungen der Axe, wobei α, β, γ die Coordinaten eines Punctes derselben (der dann zum Mittelpuncte der gedachten Kugel genommen wird) bezeichnen; so hat man für die auf dieser Geraden perpendiculären Ebene (§. 594) die Gleichung (2) $ax + by + z = d$, und für die Kugel, deren Mittelpunct im Puncte α, β, γ liegt: (3) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$. Da nun das System der beiden Gleichungen (2) und (3) eine auf der Rotationsfläche liegende Kreisperipherie darstellt, so sind, je nachdem ein Punct auf dieser Fläche auf dem *nämlichen* Kreise, oder von einem Kreis zum nächsten fortrückt, die Grössen d und r zusammen *beständig* oder zusammen *veränderlich*; folglich ist wieder jede von der andern abhängig. Setzt man dem zufolge $d = \varphi(r^2)$ oder auch $r^2 = f(d)$, so folgt, wenn man für d und r^2 die Werthe aus (2) und (3) substituirt: $ax + by + z = \varphi[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]$ oder auch $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = f(ax + by + z)$ für die allgemeine *Gleich. der Rotationsflächen*.

Um die Natur und Beschaffenheit der Function φ oder f zu finden, wird man, da die erzeugende Linie (1) beständig durch den Kreis geht, welcher durch das System der Gleichungen (2), (3) dargestellt wird, diese vier genannten Gleichungen mit einander verbinden, daraus x, y, z eliminiren, und so zur Relation zwischen d und r^2, wodurch φ oder f bestimmt ist, gelangen.

§. **617.** Lässt man zur grössern Einfachheit die Rotationsaxe mit einer der drei Coordinatenaxen, z. B. mit jener der z, zusammenfallen; so liegt jede der vorhin erwähnten Kreisperipherien der Fläche in einer mit der coordin. Ebene der xy parallelen Ebene und ihr Mittelpunct in der Axe der z; man hat also für irgend einen dieser Kreise das System der beiden Gleichungen (2′) $[x^2+y^2=r^2,\ z=c]$, von welchen die erste (§. 608, 2.) einem auf der Ebene der xy senkrechten Cylinder, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt, und die zweite einer mit der coordin. Ebene der xy parallelen Ebene angehört. In diesem Falle hat man also für die Gleichung der Rotationsfläche:

$$z=\varphi(x^2+y^2) \text{ oder } x^2+y^2=f(z).$$

Anmerk. Wäre die Rotationsaxe nicht die Axe der z selbst, sondern mit dieser bloss parallel, und wären $x=a$, $y=b$ die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes mit der Ebene der xy; so hätte man für die Gleichung der Rotationsfläche:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=f(z).$$

§. **618.** Beispiele hierüber.

1. Es sei die erzeugende Linie eine in der Ebene der xz liegende Gerade und die Axe der z die Rotationsaxe; so sind die Gleichungen der erzeugenden Linie (§§. 568, 563) (1) $[x=az+m,\ y=0]$. Diese mit den beiden obigen Gleichungen (2′) (vorig. §.) verbunden, erhält man zuerst [wenn man in (1) $z=c$ aus (2′) setzt] $x=ac+m$ oder (da wegen $y=0$, $x^2=r^2$ ist) auch: $(ac+m)^2=r^2$; folglich, wenn man für c und r^2 die Werthe aus (2′) substituirt: $(az+m)^2=x^2+y^2$ als Gleichung unserer Fläche, die eine conische oder cylindrische ist, je nachdem die erzeugende Gerade die Axe der z schneidet oder mit ihr parallel läuft.
2. Lässt man die erzeugende Gerade durch den Ursprung gehen, so erhält man für den geraden Kegel von kreisförmiger Basis, dessen Scheitel oder Mittelpunct im Ursprung der Coordinaten liegt (wegen $m=0$), die Gleichung $a^2z^2=x^2+y^2$.
3. Sei die erzeugende Linie eine in der coordin. Ebene der xz liegende Ellipse, deren grosse Axe mit der Rotationsaxe (Axe der z) und Mittelpunct mit dem Ursprung zusammenfällt; so sind die Gleichungen dieser erzeugenden Linie (§§. 462, 563) (1) $[a^2x^2+b^2z^2=a^2b^2,\ y=0]$. Diese Gleichungen wieder mit den beiden obigen (2′) verbunden, geben $a^2r^2+b^2c^2=a^2b^2$, oder, wenn man für r^2 und c die aus (2′) folgenden Werthe setzt: $a^2(x^2+y^2)+b^2z^2=a^2b^2$, als Gleichung

der durch Rotation einer Ellipse um ihre grosse Axe erzeugte Fläche (elliptisches Conoid, auch Ellipsoid genannt).

4. Um die Gleichung der durch Rotation derselben Ellipse um die kleine Axe erzeugten Fläche zu finden, darf man in der vorigen Gleichung nur a und b mit einander vertauschen. Für $b = a$ erhält man aber daraus, als Gleichung der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ [vergl. §. 604, (2)].

5. Sei die erzeugende Linie eine in der coordin. Ebene der xz liegende Hyperbel, deren Mittelpunct im Ursprung und Quer- oder Hauptaxe in der Umdrehungsaxe z liegt; so sind ihre Gleichungen (§§. 471, 563) (1) [$a^2x^2 - b^2z^2 = -a^2b^2$, $y = 0$], welche mit den beiden mehr genannten (2′) verbunden, sofort $a^2r^2 - b^2c^2 = -a^2b^2$, oder, wenn man für c und r^2 wieder substituirt: $a^2(x^2 + y^2) - b^2z^2 = -a^2b^2$, als Gleichung des durch Umdrehung erzeugten Hyperboloids mit *zwei* Flächen-Aesten (hyperbolisches Conoid).

6. Nimmt man die zweite oder conjugirte Axe zur Umdrehungsaxe, so erhält man $b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = a^2b^2$ für die Gleichung des durch Umdrehung erzeugten Hyperboloides mit *einem* Flächen-Ast.

7. Sei endlich noch die erzeugende Linie eine in der Ebene der xz liegende Parabel, deren Axe mit der Umdrehungsaxe z und Scheitel mit dem Ursprung zusammenfällt; so sind die Gleichungen dieser erzeugenden Linie (§§. 480, 563) (1) [$x^2 = pz$, $y = 0$], welche mit den obigen (2′) verbunden, sofort $r^2 = pc$, und, wenn man wieder für r^2 und c die Werthe aus (2′) setzt: $x^2 + y^2 = pz$, als Gleichung des durch Umdrehung erzeugten Paraboloides (parabolischen Conoids).

Flächen der zweiten Ordnung.

§. 619. Die allgemeinste Gleichung des 2. Grades zwischen 3 variablen Grössen x, y, z, nämlich die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, ist

$$(1)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

Anmerk. Legt man einer dieser 3 Variabeln, z. B. jener z, bestimmte Werthe bei, setzt also etwa $z = \pm \gamma$, so gehört die aus (1) entstehende Gleichung $Ax^2 + By^2 + Dxy + Lx + My + N = 0$ dem Schnitte einer mit der coordinirten Ebene der xy im Abstande γ parallelen Ebene mit der krummen Fläche an, welcher sofort eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein wird, je nachdem (§. 501) $D^2 - 4AB$ negativ, positiv oder Null ist.

Da sich ferner für die Schnitte dieser Fläche mit Ebenen, welche den beiden übrigen coordinirten Ebenen parallel sind, ganz Aehnliches

sagen lässt, so folgt, dass alle mit irgend einer der drei coordinirten Ebenen parallel geführten Schnitte lauter gleichnamige Linien der 2. Ordnung, nämlich entweder lauter Ellipsen oder Hyperbeln oder Parabeln erzeugen.

§. **620**. Die vorige Gleichung (1) kann auf eine ganz ähnliche Weise, wie diess im §. 492 mit der allgemeinen Gleichung der Linien zweiter Ordnung der Fall war, durch passende Transformationen des Coordinatensystemes, wobei man von rechtwinkeligen Axen wieder auf rechtwinkelige Axen übergeht, dabei aber sowohl den Ursprung als die Lage derselben ändert, vereinfacht werden. Man erhält nämlich, wenn man die Coordinaten des neuen Ursprunges durch a, b, c und die 3 Winkel, wodurch die neue Lage oder Richtung der Coordinatenaxen gegen die ursprüngliche bestimmt wird, durch φ, ψ, Θ bezeichnet, eine Gleichung genau von derselben Form, nämlich:

$$(2)\quad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + G'x' + H'y' + I'z' + K' = 0,$$

wobei jedoch die Coefficienten die 6 willkürlichen oder unbestimmten Grössen a, b, c, φ, ψ, Θ enthalten *).

*) Bezeichnet nämlich unter der obigen Voraussetzung Θ den Neigungswinkel, welchen die neue Axe der z mit der ursprünglichen bildet, und sind φ und ψ die Winkel, welche beziehungsweise die alte und neue Axe der x mit der Durchschnittslinie der beiden (der alten und neuen) coordinirten Ebenen der xy einschliessen; so findet man (II. §. 172 ff.), wenn die neuen Coordinaten zum Unterschiede mit Accenten bezeichnet werden, erstlich bei der Aenderung des Ursprunges der Coordinaten ohne ihre Lage zu verändern:

$$(1)\,..\; x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z',$$

und dann, wenn nur die Richtung geändert wird und der Ursprung derselbe bleibt:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1x' + B_1y' + C_1z' \\ y &= A_2x' + B_2y' + C_2z' \\ z &= A_3x' + B_3y' + C_3z' \end{aligned}\right\} (2),$$

wobei
$$\begin{aligned} A_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Theta \\ A_2 &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\Theta \\ A_3 &= -\sin\psi\sin\Theta \\ B_1 &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\Theta \\ B_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\Theta \\ B_3 &= -\cos\psi\sin\Theta \end{aligned}$$

und $C_1 = -\sin\varphi\sin\Theta$, $C_2 = \cos\varphi\sin\Theta$, $C_3 = \cos\Theta$ ist.

§. **621**. Da man nun über die erwähnten 6 Stücke frei disponiren kann, so kann man auch eben so viele Coefficienten der vorigen Gleichung (2) Null setzen, und dadurch im Allgemeinen 6 Glieder aus der genannten transformirten Gleichung eliminiren. Schafft man fürs Erste jene Glieder weg, welche die Producte $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ enthalten (was immer möglich ist, II, §. 195), so erhält man für die Flächen der zweiten Ordnung die einfachere Gleichung:

$$(3) \quad Mx^2 + M'y^2 + M''z^2 + Nx + N'y + N''z + D = 0.$$

§. **622**. Aus dieser Gleichung folgt (genau so wie in §. 619, Anmerk.), dass die betreffende krumme Fläche von Ebenen, die mit der coordinirten Ebene der xy parallel sind, entweder nach lauter Ellipsen, oder Hyperbeln oder Parabeln geschnitten wird, je nachdem das Product MM' positiv, negativ oder Null ist; dasselbe gilt auch von den Schnitten parallel mit der coordinirten Ebene der xz und yz, wenn man statt dem vorigen Producte MM' beziehungsweise jene MM'' und $M'M''$ setzt.

Hieraus folgt ferner, dass wenn von diesen drei Reihen Schnitten zwei Reihen durchgehends Ellipsen oder Hyperbeln sind, sofort die dritte Reihe nur Ellipsen sein können. Denn ist z. B. MM' und auch $M'M''$ positiv, so sind die Coefficienten M, M', M'' entweder alle zugleich positiv oder zugleich negativ, folglich ist dann auch das Product MM'' positiv. Sind dagegen die Producte MM' und $M'M''$ negativ, so ist $\frac{MM'}{M'M''} = \frac{M}{M''}$ positiv, und daher das Product MM'' ebenfalls positiv, wodurch die behauptete Eigenschaft sofort erwiesen ist.

Es können noch zwischen den in (2) vorkommenden Coefficienten die nachstehenden interessanten Relationen nachgewiesen werden:

$$\begin{array}{ll}
A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1 & A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \\
A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = 1 & A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3 = 0 \\
A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 = 1 & A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3 = 0 \\
A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1 & A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0 \\
B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 1 & A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 = 0 \\
C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1 & B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 = 0.
\end{array}$$

Man nennt aber, wenn alle drei Reihen dieser Schnitte Ellipsen sind, die betreffende krumme Fläche oder auch den von derselben begrenzten Körper ein Ellipsoid; sind dagegen zwei Reihen dieser Schnitte Hyperbeln (also die dritte Reihe Ellipsen), so heisst die Fläche oder der Körper Hyperboloid.

Ist endlich einer der drei Coefficienten M, M', M'' z. B. $M''=0$, so sind zwei Reihen dieser Schnitte (nämlich jene, welche durch mit den coordinirten Ebenen der xz und yz parallele Ebenen entstehen) durchaus Parabeln, während die Schnitte der dritten Reihe ebenfalls Parabeln oder Ellipsen oder Hyperbeln sind, je nachdem noch ein zweiter dieser Coefficienten z. B. $M'=0$ oder (bei dieser Annahme) MM' positiv oder negativ ist; eine solche Fläche oder ein solcher Körper wird gewöhnlich ein Paraboloid genannt.

§. 623. Da sich unter gewissen Bedingungen aus der obigen Gleichung (2) nicht bloss die Glieder in xy, xz und yz, sondern in der That auch noch jene 3 in x, y, z eliminiren lassen; so erhält man dann die noch einfachere Gleichung:

$$(4)\quad Mx^2+M'y^2+M''z^2+P=0.$$

welche immer noch dem vorhin erwähnten Ellipsoide und Hyperboloide, keineswegs aber mehr dem Paraboloide angehört, weil, wenn einer der drei Coefficienten (wie es für das Paraboloid erfordert wird) M, M', M'' Null werden sollte, sofort die ursprüngliche Transformation nicht möglich wäre (indem wegen $P=Ma^2+M'b^2+M''c^2+Na+N'b+N''c+D$, wenn z. B. $M=0$ sein sollte, sofort die Ordinate Unendlich würde).

§. 624. Sind in der vorigen Gleichung (3) die Coefficienten M, M', M'' alle drei positiv, so entspricht dieselbe (nach den vorigen Untersuchungen) dem Ellipsoide; sind nur 2 davon positiv und ist der 3. negativ, dem Hyperboloide. In beiden Fällen wird die Fläche (oder auch der Körper) durch die drei wechselseitig auf einander senkrecht stehenden coordinirten Ebenen in acht congruente

Theile getheilt, indem je zwei Puncte, deren Coordinaten $+x_1$, $+y_1$, $+z_1$ und $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$ sind, in einer Geraden liegen, die durch den Ursprung der Coordinaten geht und in diesem Puncte halbirt wird; dieser Punct heisst zugleich der Mittelpunct dieser betreffenden Flächen oder Körper. Es besitzen sonach alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch diese Gleichung (4) repräsentirt werden, nämlich die Ellipsoide und Hyperboloide, einen Mittelpunct.

Anmerk. Sind, wie vorhin erwähnt, die Coefficienten M, M', M'' positiv, so, dass also die vorige Gleichung (4) alle Ellipsoide enthält, bei welchen der Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten im Mittelpunct derselben liegt, so sind, wie leicht zu sehen,

$$\pm\sqrt{\frac{-P}{M}},\quad \pm\sqrt{\frac{-P}{M'}},\quad \pm\sqrt{\frac{-P}{M''}}$$

beziehungsweise die Entfernungen der sechs Durchschnittspuncte der Coordinatenaxen mit der krummen Oberfläche von diesem Mittelpunct. Man nennt dabei diese Durchschnittspuncte Scheiteln des Ellipsoides, während diese Entfernungen selbst die halben Hauptaxen bilden. Bezeichnet man diese in der angeführten Ordnung durch a, b, c, so geht, wegen $\frac{-P}{M} = a^2$, $\frac{-P}{M'} = b^2$ und $\frac{-P}{M''} = c^2$ die vorige Gleichung (4) über in die folgende:

$$(\alpha)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Auf ganz gleiche Weise lassen sich die Hyperboloide durch die Gleichung

$$(\beta)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

darstellen, wobei, je nachdem von den doppelten Zeichen das obere oder untere genommen wird, das Hyperboloid mit einem Mantel oder mit zwei Mänteln repräsentirt wird; im erstern Falle sind $2a$ und $2b$ zwei reelle und $2c$ eine imaginäre, im letztern ist nur $2c$ eine reelle Hauptaxe.

Sind in der ersten Gleichung (α) zwei von den drei Grössen a, b, c einander gleich, so geht das Ellipsoid in eine Rotationsfläche über; ist z. B. $b = a$, so verwandelt sich die genannte Gleichung in jene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, und wenn man der Ordinate z constante Werthe beilegt, welche kleiner als c sind; so entsteht zwischen x und y eine Gleichung des Kreises, d. h. alle Schnitte mit Ebenen, welche jener der xy parallel sind, sind Kreise.

Werden dagegen alle drei dieser genannten Grössen einander gleich, z. B. $c = b = a$, so verwandelt sich die Gleichung (α) in die folgende:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$ d. i. in jene einer Kugel.

Auf ähnliche Weise entspricht die Gleichung (β), wenn $a = b$ wird, dem durch Umdrehung erzeugten Hyperboloide, und zwar dem ein- oder zweimanteligen, je nachdem man von den doppelten Zeichen das obere oder untere gelten lässt.

§. 625. Da nach der obigen Bemerkung die Paraboloide nicht durch die vorige Gleichung (4) dargestellt werden können, so kann man auch in diesem Falle (in welchem nämlich einer der drei Coefficienten M, M', M'' Null wird) aus der obigen Gleichung (2) nicht die Glieder in x, y, z wegschaffen, dagegen ist es aber möglich, wenn z. B. bei der ersten Elimination der Glieder in xy, xz und yz der Coefficient M Null geworden ist, diese Gleichung auf die Form

$$(5) \quad M'y^2 + M''z^2 + Nx = 0$$

zu bringen, welche dem sogenannten elliptischen und hyperbolischen Paraboloide angehört, je nachdem das Product $M'M''$ positiv oder negativ ist, und welche Flächen sofort keinen Mittelpunct besitzen.

Ist im erstern Falle $M' = M''$, so wird das Paraboloid durch Umdrehung, und zwar durch Rotation einer Parabel um ihre Hauptaxe erzeugt.

Anmerk. Ausser den hier genannten Flächen, nämlich dem Ellipsoid (mit dem durch Rotation erzeugten und der Kugel), dem Hyperboloide mit einem Mantel oder Flächenaste (mit dem durch Rotation erzeugten), dem Hyperboloide mit zwei Mänteln oder getrennten Flächenästen (und dem durch Rotation erzeugten), dem elliptischen Paraboloid (mit dem durch Rotation erzeugten) und dem hyperbolischen Paraboloid entspricht die allgemeine Gleichung (1) (§. 619) des 2. Grades zwischen drei variablen Grössen noch als besondere Fälle (II. §. 207) drei Arten von Cylindern (dem elliptischen, hyperbolischen und parabolischen), einem Kegel (von elliptischer oder kreisförmiger Basis), zwei sich schneidenden Ebenen, zwei parallelen Ebenen, einer Ebene, einer Geraden und einem Puncte.

Folgerungen für *Curven* von *doppelter* Krümmung.

§. 626. Nach §. 603 ist eine Curve im Raume durch ein System zweier krummen Flächen, deren Gleichungen $F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) = 0$ sind, oder noch einfacher, durch das System zweier Cylinderflächen: (r) $[f(x, z) = 0$, $f'(y, z) = 0]$, von denen die eine auf der coordin. Ebene der xz, die andere auf jener der yz perpendiculär steht, und aus deren Durchschnitt sofort diese Curve im Raume erscheint, bestimmt. Denkt man sich die krumme Linie im Raume auf die beiden coordinirten Ebenen xy und xz projicirt, so ist diese Curve auch durch die beiden Gleichungen $y = f(x)$ und $z = f'(x)$ gegeben, und es versteht sich von selbst, dass wenn man aus diesen beiden Gleich. x eliminirt, sofort eine Gleichung in yz als Projection dieser Curve auf die Ebene der yz entsteht.

Es lassen sich indess solche Curven von doppelter Krümmung oft auch durch eine einzige Gleichung zwischen zwei Coordinaten darstellen, nur muss dann wenigstens eine dieser Coordinaten selbst eine krumme Linie sein, wie wir in dem nachstehenden Beispiele sehen werden.

Die Schraubenlinie.

§. 627. Erklärung. Die Schraubenlinie entsteht, wenn auf einem Cylinder von kreisförmiger Basis ein Faden $AMmm'$ (Fig. 77) so aufgewunden wird, dass die senkrechte Fig. 77.
Entfernung MP eines jeden Punctes M desselben von der Basis, fortwährend dem entsprechenden Kreisbogen AP des Umfanges der Basis proportional bleibt.

§. 628. Setzt man nun den Halbmesser der Basis $CA = CP = r$, die Ordinate $PM = z$, den veränderlichen Winkel $ACP = v$; so hat man der angeführten Erzeugung gemäss, wenn a eine constante Grösse bezeichnet, für die Windung des Fadens oder die Schraubenlinie die Gleichung: $\frac{z}{rv} = a$ oder (1) $z = rav$.

Zusatz. Soll hingegen der Punct P selbst erst durch die rechtw. Coordinaten $CQ = x$ und $QP = y$ ausgedrückt oder festgesetzt werden; so hat man $x = r \sin v$, $y = r \cos v$, also $v = arc \sin \frac{x}{r} = arc \cos \frac{y}{r}$; daher nach der Gleichung (1):

$$z = r\,a\,arc \sin \frac{x}{r},$$

als Gleichung der Projection unserer Curve in der coordin. Ebene der xz, und auch $z = r\,a\,arc \cos \frac{y}{r}$, als Gleichung der Projection derselben in der coordin. Ebene der yz. Eliminirt man endlich aus diesen beiden Gleichungen z, so erhält man noch

$$arc \sin \frac{x}{r} = arc \cos \frac{y}{r} = arc \sin \left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2}\right)$$

(§. 19), daher $\frac{x}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - y^2}$ oder $x^2 + y^2 = r^2$, als Gleichung der Projection der Schraubenlinie in der Ebene der xy.

Anmerk. Lässt man die Axe des senkrechten Cylinders mit der Axe der z zusammenfallen, bezeichnet die trigon. Tangente des constanten Winkels, welchen jedes Element der Curve mit der Ebene der xy bildet, durch a, so wie den Winkel, welchen jener Halbmesser des Cylinders, der durch den Punct x, y, z der Schraubenlinie geht, mit der Ebene der yz einschliesst, durch φ; so hat man ebenfalls zufolge der Entstehungsart dieser Curve, wenn sie in der Axe der y ihren Anfang nimmt, die drei Gleichungen:

$$x = r \sin \varphi,\ y = r \cos \varphi,\ z = r\,a\,\varphi,$$

aus welchen sofort unmittelbar die drei obigen:

$$[x^2 + y^2 = r^2,\ z = r\,a\,arc \sin \frac{x}{r} \text{ und } z = r\,a\,arc \cos \frac{y}{r}]$$

folgen.

Sechster Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Vom Differentiiren der Functionen *einer* Variablen.

Einleitung.

§. **629.** Aus dem 6ten, 9ten und 10ten Capitel des zweiten Abschnittes erhellet, dass alle bisher bekannten Functionen in Reihen von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ aufgelöst werden können. Setzen wir jedoch noch allgemeiner für jede algebraische oder transcendente Function $f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$, so folgt daraus, wenn Δx eine beliebige Zunahme oder überhaupt Aenderung von x bedeutet:

$$f(x + \Delta x) = A(x + \Delta x)^\alpha + B(x + \Delta x)^\beta + C(x + \Delta x)^\gamma + \ldots$$
$$= A' + B'\Delta x + C'\Delta x^2 + \ldots,$$

wenn man nämlich entwickelt und die Coefficienten von Δx^0, Δx^1, Δx^2, ... durch A', B', C' u. s. w. bezeichnet. Da aber, wie aus dieser Entwickelung hervorgeht,

$$A' = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots = f(x)$$

ist; so hat man auch: $(m)\ f(x + \Delta x) = f(x) + p\Delta x + q\Delta x^2 + \ldots$, wobei p, q, ... gewisse Functionen von x sind.

Anmerk. Nimmt man an, dass, wenn x in $x + i$ übergeht, $f(x)$ in $A + pi + qi^2 + \ldots$ aufgelöst werden könne, wobei die Möglichkeit einer solchen Entwickelung noch gar nicht im Voraus erwiesen zu werden braucht; so hat man sogleich (wenn man $i = 0$ setzt) $A = f(x)$, also (1) $f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 + \ldots$, wo p, q, ... kein i mehr enthalten sollen, also nur noch gewisse Functionen von x sind. Lässt man die ganz willkürliche Grösse i in $i + k$ übergehen, so erhält man aus (1):

$$f(x + i + k) = f(x) + p(i + k) + q(i + k)^2 + \ldots,$$

oder, wenn man nach dem Binomialtheorem von den Potenzen nur die beiden ersten Glieder, die hier hinreichen, entwickelt:

$$(2)\quad f(x + i + k) = f(x) + (pi + pk)$$
$$+ (qi^2 + 2qik + \ldots) + \ldots$$

Lässt man dagegen in (1) x in $x+k$ übergehen, und bemerkt, dass, so wie, wenn x in $x+i$ übergeht, $f(x)$ [wenn man $p=f'(x)$ setzt] in $f(x)+f'(x).i+\ldots$ übergeht, auch eben so bei dem Uebergange von x in $x+k$, sofort $f(x)$ in $f(x)+f'(x).k+\ldots$, p als Function von x, in $p+p'k+\ldots$, q in $q+q'k$ u. s. f. übergehen; so hat man auch:

$$f(x+k+i)=f(x)+f'(x).k+\ldots+(pi+p'ik+\ldots)$$
$$+(qi^2+q'i^2k+\ldots)+\ldots$$

Da aber diese Entwickelung der vorigen (2) für alle Werthe von i und k gleich sein muss, so erhält man durch Vergleichung der zu einerlei Verbindung von i und k gehörenden Coefficienten: $p=f'(x)$, $2q=p'$, $3r=q'$ u. s. w. Heisst nun, nach Lagrange, $f'(x)$ die erste abgeleitete oder derivirte Function von $f(x)$, so folgt aus dem Gange dieser Entwickelung, dass auch p' die erste abgeleitete Function von p, q' jene von q u. s. w. ist. Bezeichnet man dann noch mit ihm, die erste abgeleitete Function von $f'(x)$ durch $f''(x)$, jene von $f''(x)$ durch $f'''(x)$ u. s. w.; so hat man aus den letzten Relationen ganz einfach:

$$p=f'(x),\quad q=\tfrac{1}{2}p'=\tfrac{1}{2}f''(x),\quad r=\tfrac{1}{3}q'=\frac{1}{2.3}f'''(x) \text{ u. s. w.},$$

so, dass man durch Substituirung dieser Werthe in der angenommenen Reihe (1), wodurch nun auch (*a posteriori*) ihre Zulässigkeit constatirt ist, erhält:

$$(n)\quad f(x+i)=f(x)+f'(x).\frac{i}{1}+f''(x).\frac{i^2}{1.2}+f'''(x).\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots,$$

in welcher Reihe man nun auch, um die obige (m) zu erhalten, Δx statt i setzen kann.

Wir wollen noch bemerken, dass $f''(x)$, $f'''(x)$, ... die zweite, dritte, ... abgeleitete Function von $f(x)$ genannt, und wenn, wie gewöhnlich, $f(x)$ durch y bezeichnet wird, diese derivirten Functionen auch kurz durch y', y'', y''', ... bezeichnet werden, so, dass man hat $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ u. s. w.

Erklärungen.

§. **630**. 1) Ist $y=f(x)$ irgend eine Function von x und lässt man die absolut Variable x um eine ganz beliebige Grösse Δx zunehmen, so wird im Allgemeinen auch y um irgend eine Grösse zunehmen, oder überhaupt eine Aenderung erleiden, welche man analog durch Δy zu bezeichnen pflegt, so, dass dadurch die vorige Relation in die folgende $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, wobei die Differenz Δy positiv oder negativ sein kann (je nachdem y durch die Zunahme von x um Δx zu oder abnimmt) übergeht.

Aus der Relation (m) des vorigen §. folgt sonach

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$= p\Delta x + q\overline{\Delta x}^2 + r\overline{\Delta x}^3 + \ldots (v),$$

wobei, so lange x seine allgemeine Bedeutung beibehält, p, q, r, . . . gewisse endliche Functionen von x, und zwar (vorige Anmerk.) die nach Lagrange sogenannten 1sten, 2ten, 3ten, . . . derivirten Functionen von $f(x)$ sind.

Aus diesem Ausdruck (v) erhält man weiters für das Verhältniss zwischen den gleichzeitigen Zunahmen oder überhaupt Aenderungen Δx und Δy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q\Delta x + r\Delta x^2 + \ldots,$$

und dasselbe nähert sich, wenn man dabei Δx ohne Ende abnehmen und gegen Null convergiren lässt, unbestimmt und ohne Ende der Grenze p oder der derivirten Function $f'(x)$ (vorige Anmerk.), so, dass man bei dieser unendlichen Abnahme von Δx den Ausdruck erhält:

$$p = f'(x) = y' = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} \ldots (u).$$

§. **631.** 2) Nimmt man die Differenz Δx unendlich klein an, was nach Leibnitz dadurch angedeutet wird, dass man das Differenzzeichen Δ mit dem sogenannten Differenzialzeichen d vertauscht, also statt Δx (Differenz x) dx (Differenziale x) schreibt; so wird auch, wie aus der vorigen Gleichung (v) folgt, Δy oder $\Delta f(x)$ unendlich klein, und man schreibt ebenfalls dy oder $df(x)$ anstatt Δy oder $\Delta f(x)$, und nennt diese unendlich kleine Zunahme oder überhaupt Differenz das Differenziale der Function y oder $f(x)$.

Man hat sonach aus (v).

$$dy = df(x) = f(x + dx) - f(x) = pdx + qdx^2 + \ldots (1),$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = p + (q + rdx + sdx^2 + \ldots)\, dx,$$

oder da der eingeklammerte mit dem Factor dx behaftete Theil als unendlich klein gegen die endliche Grösse p ver-

schwindet (§. 142), sofort $\frac{dy}{dx} = p$, d. i.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \ldots (w).$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem obigen (u) gibt noch:

$$f'(x) = y' = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \ldots (2).$$

Während also die erste abgeleitete oder derivirte Function $f'(x)$ nach der Grenzmethode nur die Grenze ist, gegen welche das Verhältniss oder der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unbestimmt und ohne Ende convergirt, wenn sich Δx ohne Ende der Null nähert, ist diese Function $f'(x)$ nach der Theorie des unendlich Kleinen selbst schon der Werth dieses Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn dabei die Differenz Δx unendlich klein wird oder in dx übergeht. (Nach der erstern Methode ist $f'(x)$ gleichsam im Zustande des **Werdens**, nach der zweiten hingegen in jenem des **Seyns**.)

Aus der vorigen Relation (2) folgt nun:

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx \ldots (3).$$

Um den Unterschied zwischen diesen beiden Methoden (der **Grenz-** und sogenannten **Infinitesimal-Methode**) durch ein einfaches Beispiel anschaulicher zu machen, wollen wir für die Function $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ die abgeleitete Function $y' = f'(x)$ suchen.

Dazu ist zuerst (§. 630):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (x^3 + ax^2 + bx + c)$$
$$= (3x^2 + 2ax + b)\Delta x + (3x + a)\Delta x^2 + \Delta x^3 \ldots (s),$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 2ax + b + (3x + a)\Delta x + \Delta x^2.$$

Convergirt nun Δx ohne Ende gegen Null, so convergiren auch die Glieder $(3x + a)\Delta x$ und Δx^2 gegen Null und verschwinden an der Grenze, so, dass man hat:

$$lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

Behandelt man dagegen die Differenzen Δx und Δy als unendlich kleine Grössen (der 1. Ordnung), lässt diese nämlich in dx und dy übergehen, so hat man statt der vorigen Entwickelung (3) die folgende:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx + (3x + a)\,dx^2 + dx^3 \ldots (t);$$

oder da die Glieder $(3x + a)\,dx^2$ und dx^3 als unendlich klein der zweiten

und dritten Ordnung gegen jenes $(3x^2 + 2ax + b)\,dx$ als unendlich klein der ersten Ordnung verschwinden oder wegzulassen sind, auch:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx,$$

woraus sofort ebenfalls

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b \text{ folgt.}$$

Nach dieser letztern Methode hätte man sich daher (und darin besteht der grösste Vortheil dieses Leibnitz'schen Rechnungs-Algorithmus) das Aufschreiben und Entwickeln der mit den Factoren dx^2 und dx^3 behafteten Gliedern ersparen können, da man im voraus weiss, dass diese gegen jene, den Factor dx enthaltenden Glieder verschwinden.

Während also für die Bestimmung von Δy in (3) alle Glieder der Potenzen $(x + \Delta x)^3$, $(x + \Delta x)^2$ entwickelt werden mussten, würde es zur Bildung von dy in (t) hinreichend gewesen sein, diese Entwickelungen nur bis einschliessig zum zweiten (die 1. Potenz von Δx oder dx enthaltenden) Gliede fortgesetzt zu haben.

§. **632**. 3) Aus den Relationen (1) und (3) folgt, dass man das Differentiale einer Function $f(x)$, d. i. $df(x)$, erhält, indem man in $f(x)$, $x + dx$ statt x schreibt, $f(x + dx)$ bis zum zweiten Gliede, nämlich bis zur ersten Potenz von dx entwickelt, und dieses zweite Glied nimmt [oder von beiden Gliedern $f(x)$ abzieht]. — Der Quotient (2) wird Differential-Quotient, oder, da er den Coefficienten $f'(x)$, welcher in (3) mit dx multiplicirt ist, darstellt, auch Differential-Coefficient der Function $f(x)$ genannt.

§. **633**. Zusatz. Eine Function $y = f(x)$ differentiiren heisst also nach der Methode der Infinitesimalrechnung nichts anderes, als die unendlich kleine Aenderung dy bestimmen, welche sie erleidet, wenn die absolut oder unabhängige Variable x um ihr Differentiale dx zunimmt. Nach der Grenzmethode besteht diese Rechnungsoperation in der Aufstellung des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ und der Bestimmung seiner Grenze $\frac{dy}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für verschwindende Werthe von Δx; denn man hat sodann für das gesuchte Differentiale: (4) $dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$.

Anmerk. 1. Um die Bedeutung dieses Differential-Quotienten $\frac{df(x)}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ auch in *geometrischer* Beziehung kennen zu lernen,
Fig. 78. nehme man irgend eine ebene continuirliche Curve EMF (Fig. 78) und bezeichne die rechtwinkeligen Coordinaten eines beliebigen Punctes M derselben durch $AP = x$ und $PM = y$, so, dass also die Natur dieser Curve durch die Gleichung $y = f(x)$, wobei $f(x)$ als eine gegebene Function von x betrachtet wird, gegeben oder bestimmt ist.

Lässt man nun die absolut variable Abscisse x um eine beliebige Grösse $PP' = \Delta x$ zunehmen, zieht durch P' die Ordinate $P'M'$, und durch M mit der Abscissenaxe AX die Parallele MN; so bezeichnet $M'N$ die der Zunahme Δx der Abscisse entsprechende Zunahme der Ordinate y, oder es ist

$$M'N = \Delta y = \Delta f(x) \text{ und } P'M' = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) = y + \Delta y,$$

also auch $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Ferner bezeichnet der Quotient oder das Verhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{M'N}{MN}$ sofort die trigon. Tangente des Neigungswinkels $(M'MN)$, welchen die durch die beiden Puncte M und M' der Curve gezogene Secante mit der Axe der x bildet.

Lässt man nun Δx continuirlich bis Null abnehmen, so nimmt auch Δy ohne Ende und bis Null ab, und es nähert sich dabei die Secante $M'MS$ ohne Ende der im Puncte M an die Curve gezogenen Tangente MT als ihre Grenze, so, dass also, wenn man den W. TMN, welchen diese Tangente mit der Abscissenaxe bildet, durch α bezeichnet, sofort:

$$\frac{dy}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = tang\, \alpha \quad \text{ist.}$$

Dieser Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ [nämlich die entsprechende derivirte Function $f'(x)$] charakterisirt die betreffende Curve zugleich auf eine solche Weise, dass man aus dem gegebenen Werthe desselben, welcher im Allgemeinen irgend eine Function von x, nämlich $f'(x)$ ist (wie in der Integralrechnung gezeigt wird), die Gleichung der Curve und damit auch im Allgemeinen ihre Haupteigenschaften ableiten und bestimmen kann. Analytisch genommen, bildet dieser Differential-Quotient, welchen *Newton* die *Fluxion* der Ordinaten nannte, das Mass für die Schnelligkeit, mit welcher sich die Function $f(x)$ bei irgend einem Werthe von x ändert, wenn man x zu- oder abnehmen lässt.

Ferner folgt aus der angezogenen Figur:

$$\Delta y = NM' = NR + RM',$$

oder wegen

$$NR = MN \, tang \, \alpha = \Delta x \frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; (m),$$

und wenn man $RM' = v \Delta x$ setzt, wobei der Factor v sogleich näher bestimmt werden wird, auch:

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + v\right) \Delta x \quad . \; . \; . \; (n)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + v.$$

Aus dieser letztern Gleichung folgt unmittelbar, dass, so lange die Zunahmen Δx und Δy von Null verschieden, übrigens aber noch so klein sind, auch v einen von Null verschiedenen Werth besitzt, dass aber, sobald Δx verschwindet, auch $v = 0$ sein muss, weil zufolge der Relation $\frac{dy}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dafür in $\frac{dy}{dx}$ übergeht.

Unter dieser Voraussetzung folgt aber aus der vorigen Gleichung (n), in welcher man bloss dx und dy für Δx und Δy schreiben darf:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

nach welcher Ausdrucksweise, die sofort mit der obigen Relation (4) übereinstimmt, das Differentiale einer Function y gleich ist dem Producte aus der Grenze $\frac{dy}{dx}$ des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in das Differentiale dx der unabhängig Variablen x.

Endlich folgt noch, dass wenn man von einem Puncte M der Curve zu irgend einem andern Punct M' derselben fortgeht, sofort $\Delta x = MN$ und $\Delta y = NM'$ die entsprechenden Zunahmen der Coordinaten x, y des Punctes M sind; dass hingegen, wenn man von diesem Puncte M zu einem auf der durch M gezogenen Tangente liegenden, und derselben Zunahme von x entsprechenden Punct R fortgeht, die correspondirende Zunahme der Ordinate $\Delta' y = NR$ ist.

So verschieden aber auch diese beiden Zunahmen NM' und NR für endliche Werthe von Δx sein mögen, so nähert sich ihr Verhältniss dennoch in dem Masse der Einheit, in welchem sich Δx der Null nähert. Denn es ist, wenn man $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ setzt, mit Rücksicht auf die obigen Relationen (m) und (n):

$$\frac{NM'}{NR} = \frac{\Delta y}{y' \Delta x} = \frac{(y' + v) \Delta x}{y' \Delta x} = 1 + \frac{v}{y'},$$

also, wenn Δx gegen Null convergirt, sofort $lim. \frac{NM'}{NR} = 1$, vorausgesetzt, dass dabei die derivirte y' nicht auch Null wird.

Nach der Methode des unendlich Kleinen lässt man ganz einfach die Abscisse des Punctes M, nämlich $AP = x$, um unendlich wenig oder ihr Differentiale $Pp = dx$ zunehmen, wodurch auch, wenn man die Ordinate pm zieht, die Ordinate $PM = y$ um ihr Differentiale $mn = dy$ und der Bogen $EM = s$ um sein Differentiale $Mm = ds$, welches Bogenelement mit der Tangente MT zusammenfällt, zunimmt, und wodurch das unendlich kleine rechtwinkelige Dreieck Mmn entsteht, aus welchem sofort unmittelbar

$tang\,\alpha = \frac{mn}{Mn} = \frac{dy}{dx}$, wie vorhin, folgt.

Fig. 80 u. Fig. 81, a) Eben so einfach folgt auch nach dieser Methode, mit Rücksicht auf die beiden Curven in Fig. 80 und Fig. 81_a, von denen die erstere in der Nähe des Berührungspunctes M steigt und die letztere fällt, d. h. in welchen bei dem beständigen Wachsen der entsprechenden Abscisse $AP = x$ die zugehörigen Ordinaten $PM = y = f(x)$ beziehungsweise zu- oder abnehmen, dass dieser Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = f'(x) = tang\,\alpha$ im ersten Falle positiv und im letztern negativ, so wie endlich an einer Stelle m' der Curve, an welcher die Berührungslinie mit der Abscissenaxe AX parallel läuft, Null ist. (Was man übrigens auch aus dem obigen Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ findet.)

Anmerk. 2. Beide Methoden, sowohl die der Grenzen als jene des unendlich Kleinen, haben den Zweck, das Gesetz der Stetigkeit oder Continuität in den Veränderungen der Grössen auszudrücken. Allein wie die Vergleichung zeigt, gelangt man mit der letztern viel schneller und einfacher zum Ziele, und es müsste, selbst wenn man diese letztere oder sogenannte Infinitesimalmethode nur als ein künstliches Werkzeug in der Analysis gelten lassen wollte, als ganz ungerechtfertigt erscheinen, wenn man sich desselben aus dem Grunde nicht bedienen wollte, weil man keine klare Anschauung von den unendlich kleinen Grössen und namentlich ihrer verschiedenen Ordnungen besitzt, als ob man von den imaginären Grössen, die man doch ohne Skrupel in die Rechnung einführt, eine solche hätte! und als ob nicht auch hier (wie es ja auch bei den imaginären Grössen der Fall) ein bloss definitorischer, consequent festgehaltener Begriff eben so richtig ans Ziel führen müsste, und zwar hier um so mehr, als man sich von der Identität der nach beiden Methoden gefundenen Resultaten, wenigstens in einigen der wichtigsten Fälle, die volle mathematische Ueberzeugung verschafft hat und noch weiters verschaffen kann.

Allein die Infinitesimalmethode erscheint nicht bloss als ein solches künstliches und sinnreiches Hilfsmittel oder Werkzeug, sondern sie ist vielmehr der natürliche Ausdruck für die Entstehungsweise

aller physischen Grössen und Zustände, welche auf eine stetige Weise, d. i. in Zwischenstufen, die kleiner als jede endliche Grösse sind, zu- oder abnehmen.

So ist z. B. der von einem frei fallenden Körper zurückgelegte Raum nur desshalb dem Quadrat der Fallzeit proportional, weil die in jedem Augenblicke während eines unendlich kleinen Zeittheilchens entstehende unendlich kleine Zunahme des Fallraumes der in diesem Augenblicke Statt findenden Geschwindigkeit, und diese selbst wieder, durch die stetige Einwirkung der als constant anzusehenden Schwerkraft, der vom Anfang der Bewegung gerechneten Fallzeit proportional ist. Aus diesem zwischen den Elementen der Fallzeit und des Fallraumes herrschenden sehr einfachen Gesetze resultirt dann, als Ursache, das weniger einfache Gesetz, welches zwischen den endlichen Aenderungen dieser Grössen Statt findet, und in dieser Beziehung könnte man eher die Function $f'(x)$ die erzeugende oder primitive, und jene $f(x)$ die abgeleitete oder derivirte Function nennen, anstatt dass Lagrange durch rein analytische Gründe zu der umgekehrten Benennung geleitet wurde. Zugleich wird man auch den Ausspruch, dass das unendlich Kleine in der Natur selbst existire, vollkommen gerechtfertigt finden.

Es mag also endlich die Grenzmethode (wenigstens subjectiv) immerhin die schärfere Beweiskraft oder grössere demonstrative Strenge für sich haben (obschon den alten Mathematikern auch diese Methode noch nicht zu genügen schien), so wird doch gewiss jeder, welchem die Analysis mehr Mittel zum Zweck als der Zweck selbst ist, wie bei allen Zweigen der angewandten Mathematik, die weit einfachere, kürzere und schneller zum Ziele führende Infinitesimalmethode der mühevolleren und zeitraubenden Grenzmethode, mittelst welcher man erst durch den Uebergang von den complicirten endlichen Aenderungen oder Differenzen der Functionen zu ihren einfachen Grenzen, nämlich zu jenen Resultaten gelangt, zu welchen man durch Anwendung der unendlich kleinen Grössen, ohne die Gerüste und den schwerfälligen Apparat direct gelangen kann, und welche auch noch bei solchen Fragen ausreichen, wo man die Grenzmethode zu verlassen genöthigt wird, unbedingt ~~den Vorzug einräumen müssen.~~ (Man vergleiche die Anmerk. zu §. 715.)
vorziehen.

Differentiale der vorzüglichsten einfachen und zusammengesetzten Functionen *einer* Variablen.

§. 634. Für die zunächst folgenden Entwickelungen wollen wir für beliebige Functionen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, . . . Kürze halber $f(x) = y$ und $f(x + dx) = y'$, $F(x) = y_{\prime}$ und $F(x + dx) = y'_{\prime}$, $\varphi(x) = y_{\prime\prime}$ und $\varphi(x + dx) = y'_{\prime\prime}$ u. s. w.

setzen, wodurch zufolge der obigen Gleichung (1) (§. 631) $dy = y' - y$, $dy_, = y'_, - y_,$ u. s. w., oder auch $y' = y + dy$, $y'_, = y_, + dy_,$ u. s. w. wird. Diess vorausgesetzt, sei zuerst dAy, wo A ein constanter Factor ist, zu bestimmen. Nach der Regel des vorigen §. ist aber $dAy = Ay' - Ay = A(y' - y) = Ady$, d. i.:

$$d.Ay = Ady,$$

welche Regel leicht in Worten gegeben werden kann.

§. **635.** Es ist ferner $d(A + y + y_, - y_{,,} + \ldots) = (A + y' + y'_, - y'_{,,} + \ldots) - (A + y + y_, - y_{,,} + \ldots) = (y' - y) + (y'_, - y_,) - (y'_{,,} - y_{,,}) + \ldots$, d. i.

$$d(A + y + y_, - y_{,,} + \ldots) = dy + dy_, - dy_{,,} + \ldots,$$

was wieder eine besondere Regel begründet.

§. **636.** Eben so ist

$$d.yy_, = y'y'_, - yy_, = (y + dy)(y_, + dy_,) - yy_,,$$

d. i. (da $dy\,dy_,$ als unendlich klein der zweiten Ordnung wegzulassen ist): $dyy_, = y\,dy_, + y_,dy$. — Setzt man, um die Regel für drei Factoren zu finden, in dieser letztern Gleichung $y_,y_{,,}$ statt $y_,$; so erhält man die in dieser Gleichung enthaltene Regel gleich angewendet: $dyy_,y_{,,} = yd(y_,y_{,,}) + y_,y_{,,}dy = y(y_,dy_{,,} + y_{,,}dy_,) + y_,y_{,,}dy$, d. i.

$$dyy_,y_{,,} = yy_,dy_{,,} + yy_{,,}dy_, + y_,y_{,,}dy;$$

und so lässt sich diese Regel leicht auf jede Anzahl von veränderlichen Factoren ausdehnen.

Zusatz. Nach der Regel dieses Paragraphen ist $dAy = Ady + ydA$, oder wegen (§. 635) $dA = 0$, wieder wie oben (§. 634):

$$dAy = Ady.$$

§. **637.** Weiter ist

$$d\frac{y}{y_,} = \frac{y'}{y'_,} - \frac{y}{y_,} = \frac{y + dy}{y_, + dy_,} - \frac{y}{y_,} = \frac{y_,(y + dy) - y(y_, + dy_,)}{y_,(y_, + dy_,)},$$

$$\text{d. i. } d.\frac{y}{y_,} = \frac{y_,dy - ydy_,}{y_,^2}.$$

Zusatz. Wegen $dA = 0$ hat man daraus $d\frac{y}{A} = \frac{Ady}{A^2} = \frac{dy}{A}$ (übereinstimmend mit §. 634, da $\frac{y}{A} = \frac{1}{A}y$) und $d\frac{A}{y} = -\frac{Ady}{y^2}$.

§. **638**. Man hat ferner $d(y^n)$ oder einfacher geschrieben $d.y^n = y'^n - y^n = (y+dy)^n - y^n$, d. i. (§. 633):

$$d.y^n = ny^{n-1}dy.$$

Zusatz. Für $n = \frac{1}{m}$ folgt daraus $d.y^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}dy$, d. i. $d.\sqrt[m]{y} = \frac{dy}{m\sqrt[m]{y^{m-1}}}$, und daraus wieder, als noch speciellern Fall, für $m=2$: $d.\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$.

§. **639.** Ferner ist

$d.a^y = a^{y'} - a^y = a^{y+dy} - a^y = a^y(a^{dy}-1) = a^y\,la\,dy$ (§§. 633, 292), also $d.a^y = a^y\,la\,dy$.

Zusatz. Wegen $le = 1$ (§. 291) ist $d.e^y = e^y\,dy$.

§. **640**. Man hat weiters $d.log\,y = log\,y' - log\,y = log\frac{y'}{y}$ $= log\left(\frac{y+dy}{y}\right) = log\left(1+\frac{dy}{y}\right) = M\frac{dy}{y}$ (§. 290), also

$$d.log\,y = M\frac{dy}{y}.$$

Zusatz. Für natürliche Logarithmen, die in der Differentialrechnung, wenn nichts weiter bemerkt wird, immer verstanden werden, folgt, wegen (§. 291) $M=1$, sofort $d.ly = \frac{dy}{y}$.

§. **641**. Es ist $d.sin\,y = sin\,y' - sin\,y = sin(y+dy)$ $- sin\,y = sin\,y\,cos\,dy + cos\,y\,sin\,dy - sin\,y$ (§. 20), oder wenn man nach §. 308 für $sin\,dy$ und $cos\,dy$ die Reihen bis (§. 632) zum zweiten Gliede setzt:

$$= sin\,y\left(1-\frac{dy^2}{2}\right) + cos\,y\left(dy - \frac{dy^3}{2.3}\right) - sin\,y,$$

also, wenn man reducirt: $d.sin\,y = cos\,y\,dy$.

§. **642.** Setzt man in der vorigen Formel $\frac{1}{2}\pi - y$ statt y, so erhält man, wegen $sin(\frac{1}{2}\pi - y) = cos\,y$; ferner wegen

$$cos(\tfrac{1}{2}\pi - y) = sin\,y \text{ und } d(\tfrac{1}{2}\pi - y) = -dy,$$

sofort: $d.cos\,y = -sin\,y\,dy$.

§. **643.** Es ist ferner

$$d\,tang\,y = d\frac{sin\,y}{cos\,y} = \frac{cos\,y\,d\,sin\,y - sin\,y\,d\,cos\,y}{cos\,y^2} \text{ (§. 637)}$$

$$= \frac{(cos\,y^2 + sin\,y^2)}{cos\,y^2}dy \text{ (§§. 641, 642)},$$

also endlich (§. 15):

$$d\,.\,tang\, y = \frac{dy}{\cos y^2}.$$

§. **644**. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man wieder $\frac{1}{2}\pi - y$ statt y setzt: $d.\cot y = \frac{-dy}{\sin y^2}$.

§. **645**. Es ist

$$d\sec y = d\frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y\, dy}{\cos y^2} = \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}dy \text{ (§. 637)},$$

d. i. $d.\sec y = \sec y\, tang\, y\, dy$.

§. **646**. Daraus folgt wieder, $\frac{1}{2}\pi - y$ statt y gesetzt: $d.cosec\, y = -\, cosec\, y\, \cot y\, dy$.

§. **647**. Man hat ferner

$$d\, sinv\, y = d(1 - \cos y) = -\, d\cos y \text{ (§. 635)},$$

also (§. 642) $d.sinv\, y = \sin y\, dy$.

§. **648**. Aus dieser Formel folgt wieder unmittelbar, wenn man $\frac{1}{2}\pi - y$ statt y schreibt:

$$d.cosinv\, y = -\cos y\, dy.$$

§. **649**. Es sei ferner $y = \sin u$, also (§. 19)

$$u = arc\sin y;$$

so folgt, wenn man die erste Gleichung differentiirt (sind nämlich zwei Functionen einander gleich, so sind es auch ihre Differentiale), $dy = \cos u\, du$, und daraus

$$du = \frac{dy}{\cos u} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin u^2}}, \text{ d. i. } d.arc\sin y = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

§. **650**. Für $y = tang\, u$ folgt $u = arc\, tang\, y$ und (§. 643) $dy = \frac{du}{\cos u^2}$, also daraus:

$$du = dy\cos u^2 = \frac{dy}{1 + tang\, u^2} \text{ (§. 18), mithin:}$$

$$d.arc\, tang\, y = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

§. **651**. Eben so ist für $y = \sec u$ sofort

$u = arc\sec y$ und (§. 645) $dy = \sec u\, tang\, u\, du$,

woraus also $du = \frac{dy}{sec\, u\; tang\, u}$ oder (§. 15)

$$du = \frac{dy}{sec\, u \sqrt{sec\, u^2 - 1}},\ \text{d. i. } d.arc\, sec\, y = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} \text{ folgt.}$$

§. **652.** Setzt man ferner $y = sinv\, u$, so folgt

$$u = arc\, sinv\, y,$$

und aus der ersten Gleichung (§. 647) $dy = sin\, u\, du$ oder

$$du = \frac{dy}{sin\, u} = \frac{dy}{\sqrt{2\, sinv\, u - sinv\, u^2}}\ \text{(§. 18), d. i.}$$

$$d.arc\, sinv\, y = \frac{dy}{\sqrt{2y - y^2}}.$$

§. **653.** Da ferner allgemein

$$arc.\, co.f(y) = \tfrac{1}{2}\pi - arc\, f(y),$$

also $d\, arc\, co.\, f(y) = -d\, arc\, f(y)$ ist; so folgt ganz einfach aus den 4 letzten Paragraphen:

$$d.arc\, cos\, y = \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad d.arc\, cot\, y = \frac{-dy}{1+y^2},$$

$$d.arc\, cosec\, y = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2-1}},\quad d.arc\, cosinv\, y = \frac{-dy}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

§. **654.** Aus der Formel im Zusatze von §. 640 folgt: $dy = y\, dl\, y$; eine für die Differenziirung aller jener Functionen y sehr brauchbare Regel, welche sich logarithmisch auflösen oder behandeln lassen. [So ist z. B. darnach

$$d\, y\, y_{,} = y\, y_{,}\, dl\, y\, y_{,} = y\, y_{,}\, d(ly + ly_{,})$$

$$= y\, y_{,}\left(\frac{dy}{y} + \frac{dy_{,}}{y_{,}}\right) = y_{,}\, dy + y\, dy_{,},\ \text{wie in §. 636].}$$

Nach dieser Regel erhält man noch:

$$(m)\quad d\,.\,y^{y_{,}} = y^{y_{,}}\, dl\, y^{y_{,}} = y^{y_{,}}\, d.y\, l\, y_{,} = y^{y_{,}}\left(y\frac{dy_{,}}{y_{,}} + l\, y_{,}\, dy\right).$$

(§§. 636, 640), eine Formel, welche in jene von §. 638 oder 639 übergeht, je nachdem man y oder $y_{,}$ als constant annimmt.

§. **655.** Uebungsbeispiele für das Differentiiren der Functionen einer Variablen.

1. Nach §. 638 ist $d.\left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 3P^2dP$, wenn das Polynom, Kürze halber, durch P bezeichnet wird; dabei ist (§. 635)

$$dP = 3d.x^2 + 4d.\frac{1}{x^3} - 2d.x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 3.2x\,dx - \frac{4.3x^2}{x^6}dx - 2. -\tfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx \quad (§§.\ 638,\ 637),$$

oder endlich

$$dP = \left(6x - \frac{12}{x^4} + \tfrac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)dx.$$

2. Um $d.\sqrt[3]{y}$ für $y = 3a^x - \frac{x^2}{\sin x}$ zu entwickeln, hat man zuerst (§. 638, Zusatz) $d.\sqrt[3]{y} = \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}}$ und (§§. 635, 639, . . .)

$$dy = 3d.a^x - d\frac{x^2}{\sin x} = \left(3a^x la - \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin x^2}\right)dx.$$

3. Für $y = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ ($= \sin x$, §. 308) folgt (§§. 639, Zusatz)

$$dy = \frac{e^{x\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\,dx - e^{-x\sqrt{-1}}. -\sqrt{-1}\,dx}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}dx (= \cos x\,dx,\ §.\ 308).$$

4. Nach §§. 640, Zusatz und 641 ist

$$dl \sin x = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \cot x\,dx.$$

5. Eben so ist (§. 643):

$$dl\,\mathrm{tang}\,x = \frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{\mathrm{tang}\,x} = \frac{dx}{\mathrm{tang}\,x \cos x^2} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2dx}{\sin 2x}.$$

Eben so findet man

$$dl\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2dx}{\sin x} \text{ und } dl \,\mathrm{arc}\cos\sqrt{1-x^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\,\mathrm{arc}\cos\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Nach §§. 638 und 641 erhält man

$$d.\sin(x^2)^3 = 3\sin(x^2)^2\,d\sin(x^2),$$

oder wegen $d\sin(x^2) = \cos(x^2)\,d.x^2 = 2x\cos(x^2)\,dx$ auch

$$= 6x\sin(x^2)^2\cos(x^2)\,dx.$$

7. Nach §§. 642 und 640, Zusatz, ist:

$$d\cos lx = -\sin lx\,dlx = -\frac{dx}{x}\sin lx.$$

8. Nach §§. 643 und 639 hat man:

$$d\,\mathrm{tang}(a^{lx}) = \frac{d.a^{lx}}{\cos(a^{lx})^2} = \frac{a^{lx}\,la\,dlx}{\cos(a^{lx})^2} = \frac{a^{lx}\,la\,dx}{x\cos(a^{lx})^2}.$$

9. Nach der Regel (m), §. 654, folgt

$$d.[\mathrm{arc}\sin(x^2)]^{lx} = [\mathrm{arc}\sin(x^2)]^{lx}\,dl[\mathrm{arc}\sin(x^2)]^{lx},$$

dabei ist

$$dl[\mathrm{arc}\sin(x^2)]^{lx} = d[lx\,l\,\mathrm{arc}\sin(x^2)] = lx\,dl\,\mathrm{arc}\sin(x^2)$$

$$+ l\,\mathrm{arc}\sin(x^2)\,dlx = (§.\ 649)\ lx\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dx}{x}l\,\mathrm{arc}\sin(x^2).$$

10. Nach §. 650 ist $d\,arc\,tang\left(l\,\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}\right)=\frac{d\,l\,z}{1+l\,z^2}$, wenn man nämlich Kürze halber den Bruch unterm Logarithmenzeichen durch z bezeichnet. Nun ist ferner $d\,l\,z=\frac{dz}{z}$ und dabei (§. 637):

$$dz=[(\sqrt{1-x^2}+x)\,d(\sqrt{1-x^2}-x)$$
$$-(\sqrt{1-x^2}-x)\,d(\sqrt{1-x^2}+x)]:(\sqrt{1-x^2}-x)^2,$$

oder wegen (§§. 635 und 638, Zus.)

$$d\,(\sqrt{1-x^2}-x)=\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-dx \quad \text{und}$$

$$d\,(\sqrt{1-x^2}+x)=\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+dx,$$

nach einer einfachen Reduction:

$$dz=-\frac{[(x+\sqrt{1-x^2})^2+(x-\sqrt{1-x^2})^2]\,dx}{(x+\sqrt{1-x^2})^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2\,dx}{(x+\sqrt{1-x^2})^2\sqrt{1-x^2}},$$

also $d\,l\,z$ oder $\frac{dz}{z}=\frac{-2\,dx}{(\sqrt{1-x^2}+x)(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{-2\,dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Nach §. 640, Zusatz, ist $d\,l\,l\,x=\frac{d\,l\,x}{l\,x}=\frac{dx}{x\,l\,x}$. Eben so ist $d\,l\,l\,l\,x=\frac{d\,l\,l\,x}{l\,l\,x}=\frac{dx}{x\,l\,x\,l\,l\,x}$ u. s. w.

12. Nach §§. 639 und 641 erhält man endlich:

$$d.a^{e^{\sin x}}=a^{e^{\sin x}}\,l\,a\,d.e^{\sin x}=a^{e^{\sin x}}\,l\,a\,e^{\sin x}\cos x\,dx.$$

§. **656.** Ist $z=F(y)$ eine Function von y und $y=f(x)$ eine Function von x, so hat man

$$dz=d\,F(y)=\frac{dF(y)}{dy}\,dy,$$

und wegen $dy=df(x)$, auch: $dz=\frac{dF(y)}{dy}\,df(x)$.

So ist z. B. für $z=l\,y$ und $y=\sin x$, sofort

$dz=\frac{d\,l\,y}{dy}\,d\sin x=\frac{dy}{y\,dy}\cos x\,dx=\frac{\cos x}{y}\,dx=\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\cot x\,dx$ (vgl. vorig. §., Beisp. 4).

Anmerk. Indem man bei Bestimmung des Differentiales der Function z, welche bei der gemachten Voraussetzung von $z=F(y)$ und $y=f(x)$ die Function einer Function genannt wird, nichts anderes als die unendlich kleine Aenderung sucht, welche z erleidet, wenn die

unabhängig Variable x um ihr Differentiale dx zunimmt, so kann man dz auch nach der im §. 633 gemachten Bemerkung nach der Grenzmethode bestimmen.

Nimmt nämlich die Function y um Δy zu, wenn x um Δx wächst, so ist $\Delta z = f(y + \Delta y) - f(y)$, oder wenn man beiderseits mit $\Delta x \left(= \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta y\right)$ dividirt, auch

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nähert sich nun Δx ohne Ende der Null, so wird

$$lim. \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}, \; lim. \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} \text{ und } lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

folglich ist nach der vorigen Relation:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad (1)\; dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx.$$

Man erhält also den gesuchten Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, indem man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, diesen so genommen, als ob y die unabhängige variable Grösse wäre, mit dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Function y in Beziehung auf die unabhängige Variable x multiplicirt.

Auf ganz gleiche Weise findet man, wenn $z = F(y)$, $y = \varphi(\omega)$ und $\omega = f(x)$, also x die unabhängig Variable ist, für das Differentiale von z den Ausdruck:

$$(2) \quad dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx \text{ u. s. w.}$$

So ist für das vorige Beispiel von $z = ly$ und $y = sin\, x$ nach der Relation (1), wegen $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = cos\, x$, sofort:

$$dz = \frac{cos\, x}{y} dx = \frac{cos\, x}{sin\, x} dx = cot\, x\, dx, \text{ wie zuvor.}$$

Für $z = ly$, $y = l\omega$ und $\omega = lx$ ist nach Relation (2), wegen $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{d\omega} = \frac{1}{\omega}$ und $\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{x}$ ebenfalls

$$dz = \frac{dx}{y\omega x} = \frac{dx}{x\, lx\, llx},$$

was in der That mit dem Resultate in §. 655 (Beispiel 11) übereinstimmt, indem eigentlich $z = lllx$ ist.

Die *höhern* Differentiale.

§. 657. Da der Differentialcoefficient p in $df(x) = p\,dx$ (§§. 631 — 660) im Allgemeinen wieder eine Function von

x oder $p = f'(x)$ ist, also abermals nach denselben Regeln differentiirt werden kann; so sei $dp = q\,dx$, wobei eben so $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d.\frac{df(x)}{dx}}{dx} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (indem, wenn x die unabhängige Variable, dx immer als constant angesehen wird) irgend eine Function von x sein wird; also wieder $dq = r\,dx$ gesetzt werden kann, wobei abermals $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ eine gewisse Function von x ist, u. s. w.

Die Functionen $p, q, r, \ldots$ heissen beziehungsweise Differentialquotienten der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Ordnung von $f(x)$ [nach Lagrange, welcher sie durch $f'(x)$, $f''(x)$... (s. §. 629) bezeichnet, die 1^{te}, 2^{te}, ... derivirte Function von der primitiven $f(x)$], und da die vorigen Relationen geben: $df(x) = p\,dx$, $d^2f(x) = q\,dx^2$, $d^3f(x) = r\,dx^3$ u. s. w., so folgt, dass diese Quotienten der Reihe nach erhalten werden, indem man das erste, zweite, dritte, ... Differential von $f(x)$ beziehungsweise durch dx, dx^2, dx^3 u. s. w. dividirt. Diese auf einander folgenden oder höhern Differentiale aber werden gebildet, indem man jedes vorhergehende nach den ursprünglichen für $df(x)$ abgeleiteten Regeln abermals differentiirt, und dabei dx als eine constante Grösse behandelt.

Zusatz. Da, wenn man $f(x) = y$ setzt, sofort

$$\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{d^2y}{dx^2} = q,\ \frac{d^3y}{dx^3} = r \ldots \text{ und } p, q, r, \ldots$$

endliche Grössen (nämlich gewisse Functionen von x) sind; so folgt, dass dy, d^2y, d^3y, ... beziehungsweise mit dx, dx^2, dx^3, ... von einerlei Ordnung sind.

§. 658. Beispiele über die höhern Differentiale.

1. Für $f(x) = x^n$ folgt nach der Regel des vorigen §.:

$d.x^n = nx^{n-1}dx$, $d^2.x^n = n\,dx\,d.x^{n-1} = n(n-1)x^{n-2}dx^2$, $d^3.x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3, \ldots d^n.x^n = n(n-1)\ldots 3.2.1\,dx^n$,

dabei ist, wenn n eine ganze, positive Zahl bezeichnet, dieses letztere Differential eine constante Grösse, so, dass alle folgenden Differentiale von x^n Null sind. Hier ist $p = nx^{n-1}$, $q = n(n-1)x^{n-2}$ u. s. w., also in der That jeder dieser Quotienten wieder eine Function von x.

2. Für $u = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$ hat man eben so:

$$du = (A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + \ldots)dx,$$

$$d^2u = [A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \ldots]dx^2 \text{ u. s. w.}$$

Ist $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2 \ldots$, also $u = A + Bx + Cx^2 + \ldots$; so fällt nach einer jeden folgenden Differentiation eine der constanten Grössen A, B, $C, \ldots$ in derselben Ordnung heraus.

3. Für $f(x) = a^x$ erhält man:
$d.a^x = a^x l a dx$, $d^2.a^x = l a dx d.a^x = a^x la^2 dx^2$, $d^3.a^x = a^x la^3 dx^3$ u. s. w.; hier ist also $p = a^x la$, $q = a^x la^2$ etc.

4. Für $f(x) = lx$ folgt $dlx = \frac{dx}{x}$, $d^2lx = dx d\frac{1}{x} = \frac{-1\,dx^2}{x^2}$,

$$d^3lx = \frac{1.2\,dx^3}{x^3},\; d^4lx = \frac{-1.2.3\,dx^4}{x^4} \text{ u. s. w.;}$$

hier sind also die Differential-Quotienten:

$$p = \frac{1}{x},\; q = -\frac{1}{x^2},\; r = \frac{1.2}{x^3} \text{ etc.}$$

5. Ist $f(x) = \sin x$, so findet man $d\sin x = \cos x\,dx$, $d^2\sin x = dx\,d\cos x = -\sin x\,dx^2$, $d^3\sin x = -\cos x\,dx^3$ u. s. f., also $p = \cos x$, $q = -\sin x$, $r = -\cos x$ u. s. w. Da übrigens auch $d\sin x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)\,dx$ ist, so folgt auch $d^2\sin x = \sin(x + \frac{2}{2}\pi)\,dx^2$, u. s. w.

$$d^n \sin x = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)dx^n.$$

6. Eben so erhält man $d\cos x = -\sin x\,dx$,
$d^2\cos x = -dx\,d\sin x = -\cos x\,dx^2$, $d^3\cos x = \sin x\,dx^3$ u. s. w.; hier ist also $p = -\sin x$, $q = -\cos x$, $r = \sin x$ u. s. f. Auch hier ist

$$d^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)dx^n.$$

7. Es sei endlich $f(x) = \text{arc}\sin x$, so folgt $d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,
$d^2\,\text{arc}\sin x = \frac{x\,dx^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $d^3\text{arc}\sin x = \frac{(1+2x^2)\,dx^3}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$ u. s. w.; hier ist also $p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $q = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ etc.

§. **659**. Ist x nicht die unabhängige Variable, sondern von einer andern Grösse ω abhängig, also $y = f(x)$ und $x = F(\omega)$; so ist auch dx noch veränderlich, und man hat, mit Beibehaltung der Bezeichnung in §. 657, wornach $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ u. s. f. gesetzt wird, sofort:

$$dy = df(x) = pdx,$$

$$d^2y = dx\,dp + pd^2x = dx\,q\,dx + pd^2x = q\,dx^2 + pd^2x,$$

$$d^3y = dx^2dq + q.2dx\,d^2x + d^2x\,dp + pd^3x = r\,dx^3 + 3q\,dx\,d^2x + pd^3x \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Aus diesen Relationen folgen der Reihe nach:

$$p = \frac{dy}{dx},\ q = \frac{d^2y - p\,d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

$$r = \frac{d^3y - 3q\,dx\,d^2x - p\,d^3x}{dx^3}$$

$$= \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5},\ \text{u. s. w.}$$

Dabei beziehen sich diese Differentialien durchaus auf die unabhängige Variable ω.

§. **660**. Wäre in den vorigen Ausdrücken oder Quotienten x die unabhängige Variable, also dx constant, so erhielte man daraus wegen $x = \omega$, also $\frac{dx}{d\omega} = 1$, $\frac{d^2x}{d\omega^2} = 0, \ldots$ für die auf einander folgenden Differential-Quotienten, wie in §. 657:

$$p = \frac{dy}{dx},\ q = \frac{d^2y}{dx^2},\ r = \frac{d^3y}{dx^3}\ \text{u. s. w.}$$

Hat man daher bei irgend einer analytischen Entwickelung in $y = f(x)$, x als die unabhängig veränderliche Grösse, also dx als constant angenommen und behandelt, und soll hierauf (wie z. B. in §§. 737, 740 und 748, Anm.), von einem andern Gesichtspuncte ausgehend, x als von irgend einer beliebigen variablen Grösse, z. B. von ω abhängig, also dx selbst als veränderlich angesehen werden; so muss man (um die ganze Entwickelung nicht von vorne machen zu dürfen) in die im erstern Sinne gefundenen Differentialausdrücke, statt der einfachen Differential-Quotienten $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. der Reihe nach die obigen (vorig. §., Zusatz): $p = \frac{dy}{dx}$ (welcher Quotient nämlich unverändert bleibt), $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$ u. s. w. setzen; dabei sind dann sowohl dy, $d^2y, \ldots$ so wie auch dx, $d^2x, \ldots$ Functionen dieser unabhängig Variablen ω.

Für $y = lx$ z. B. ist, dx als constant angenommen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ \text{und}\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Dagegen erhält man, wenn x als von einer andern Variablen abhängig gedacht oder angenommen wird, also dx selbst noch variabel

ist: $dy = \frac{dx}{x}$, $d^2y = d\frac{dx}{x} = \frac{x d^2x - dx^2}{x^2}$, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{1}{x^2}.$$

Dasselbe Resultat entsteht aber auch in der That aus dem im erstern Sinne gefundenen Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = q = -\frac{1}{x^2}$, wenn man für q den genannten Werth

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

setzt; denn dadurch wird $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = -\frac{1}{x^2}$, und daraus folgt wieder $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{1}{x^2}$ $\left(\text{wegen } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\right)$. — Eben so findet man auch aus dem im ersten Sinne gebildeten Quotienten $\frac{d^3y}{dx^3} = r = \frac{2}{x^3}$ durch die erwähnte Substitution (von r aus vor. §., Zusatz) für diesen Quotienten im letztern Sinne:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3} + 3\frac{d^2x}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}.$$

Anmerk. Diese im letztern Sinne genommenen Differential-Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... sind natürlich so lange unbestimmt, bis die Abhängigkeit der Grösse x von der unabhängigen Variablen ω, oder in $x = F(\omega)$ die Natur der Function F bekannt ist, indem nur dadurch erst die dabei vorkommenden Quotienten $\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, . . . bestimmt werden können.

Zweites Capitel.

Das *Taylor*'sche und *Maclaurin*'sche Theorem.

Das *Taylor*'sche Theorem.

§. **661**. Setzt man in $df(x) = f'(x)\,dx$ [§. 631, (3)] $x + y$ statt x; so erhält man $df(x+y) = f'(x+y) \times d(x+y)$. Sieht man nun dabei y als constant an, so wird wegen $d(x+y) = dx$, sofort $\frac{df(x+y)}{dx} = f'(x+y)$. Lässt man aber y als variabel und x als constant gelten, so erhält man, wegen $d(x+y) = dy$, eben so $\frac{df(x+y)}{dy} = f'(x+y)$; also ist $(m)\ \frac{df(x+y)}{dx} = \frac{df(x+y)}{dy}$, dabei die Differentiation $df(x+y)$ einmal nach x, das andere Mal nach y ausgeführt, d. h. man gelangt zu demselben Resultate, man mag die Function $f(x+y)$ nach x oder nach y differentiiren.

Anmerk. Auf gleiche Weise würde man auch $\frac{d^2f(x+y)}{dx^2} = \frac{d^2f(x+y)}{dy^2}$ und allgemein $\frac{d^nf(x+y)}{dx^n} = \frac{d^nf(x+y)}{dy^n}$ erhalten.

§. **662**. Diess vorausgeschickt, wollen wir $f(x+y)$ ganz allgemein in eine nach Potenzen von y fortlaufende Reihe entwickeln. Dazu setze man, da das erste Glied der Reihe $= f(x)$ sein muss [indem $f(x+y)$ für $y = 0$ in dieses erste Glied übergeht]:

$$f(x+y) = f(x) + Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \ldots,$$

wobei die von y unabhängigen Coefficienten $A, B, C, \ldots$ offenbar gewisse Functionen von x sind, welche wir sofort, sammt den unbestimmt angenommenen Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ zu bestimmen haben. — Differentiirt man beide Theile dieser Gleichung nach x, d. h. sieht man dabei y als constant an; so erhält man, wenn gleich durchaus mit dx dividirt wird:

$$\frac{df(x+y)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dA}{dx}y^\alpha + \frac{dB}{dx}y^\beta + \frac{dC}{dx}y^\gamma + \ldots$$

Sieht man hingegen x als constant an, so erhält man, wenn gleich mit dy dividirt wird:

$$\frac{df(x+y)}{dy} = A\alpha y^{\alpha-1} + B\beta y^{\beta-1} + C\gamma y^{\gamma-1} + \ldots$$

Zufolge der Relation (m) im vorigen Paragraphe besteht aber die Gleichung:

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{dA}{dx} y^{\alpha} + \ldots = A\alpha y^{\alpha-1} + B\beta y^{\beta-1} + \ldots$$

und damit die beiden Functionsreihen in Bezug auf die ganz unabhängige Variable y von einerlei Form erscheinen, darf man nur setzen: $\alpha - 1 = 0$, $\beta - 1 = \alpha$, $\gamma - 1 = \beta$ u. s. w., woraus $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ u. s. w. folgt. Substituirt man also diese Werthe in der vorigen Gleichung, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\frac{df(x)}{dx} = A,\ \frac{dA}{dx} = 2B,\ \frac{dB}{dx} = 3C,\ \frac{dC}{dx} = 4D \text{ etc.,}$$

und daraus:

$$A = \frac{df(x)}{dx},\ B = \frac{d^2f(x)}{2dx^2},\ C = \frac{d^3f(x)}{2.3dx^3} \text{ u. s. w.}$$

Werden daher endlich diese für die Coefficienten und Exponenten gefundenen Werthe in der oben angenommenen Reihe substituirt, so erhält man nachstehende, nach ihrem Erfinder Taylor benannte Reihe:

$$(1)\ f(x+y) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\frac{y}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{y^2}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3}\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots$$

welche in der ganzen höhern Analysis von der grössten Wichtigkeit ist, und überhaupt die in der Function $f(x)$ entstehende Aenderung angibt, wenn die Variable x um die willkürliche Grösse y vermehrt oder (in welchem Falle in dieser Reihe nur $-y$ statt y zu setzen ist) vermindert wird.

Anmerk. 1. Die Ableitung dieser Reihe (I) zeigt, dass die für die Coefficienten A, B, C, . . . gefundenen Werthe wesentlich von der Voraussetzung abhängen, dass $\alpha = 1$, $\beta = 2$ u. s. w. sei; in allen jenen Fällen also, in welchen es nicht möglich ist, $f(x+y)$ nach steigenden, ganzen, positiven Potenzen von y zu entwickeln, (was übrigens niemals für allgemeine, sondern nur für besondere Werthe von x eintreten kann), werden sich auch diese Coefficienten nicht so darstellen oder bestimmen lassen; sie erscheinen in diesem Falle immer als unendliche Grössen, und weisen eben dadurch auf die Unmöglichkeit einer solchen Entwickelung (mit ganzen, positiven

Exponenten von y) hin. [Fernere Ableit. dieser Reihe, so wie Bemerkungen in jenen Fällen, in welchen sie nicht abbricht, III., 27, ff.].

Anmerk. 2. Diese, auch unter dem Namen des Taylor'schen Lehrsatzes bekannte Reihe wird häufig auch (nach Lagrange, §. 629) in der Form geschrieben:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots$$

Da diese Reihe nur für solche Functionen $f(x)$ abbricht, für welche eine ihrer derivirten Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, ... constant wird (nämlich für ganze algebraische Functionen), sonst aber eine unendliche ist, so gilt dann von derselben Alles das, was von solchen Reihen (§. 276 ff.) überhaupt bemerkt worden, d. h. sie kann nur dann den wahren Werth von $f(x+h)$, und zwar so genau als man will, geben, wenn sie convergent ist, oder vielmehr, wenn der Rest der Reihe so klein, als man nur immer will, werden kann.

Es lässt sich nämlich der Rest dieser Reihe, wenn man diese bei was immer für einem, z. B. mit dem $\mu+1^{\text{ten}}$ Gliede abbricht, jederzeit bestimmen, und da man dafür, oder für das letzte Glied der Reihe nach Lagrange den Ausdruck

$$\frac{h^{\mu+1}}{2.3.4\ldots\mu+1}\cdot\frac{d^{\mu+1}.f(x+\Theta h)}{dx^{\mu+1}}$$

findet, wobei Θ eine unbestimmte, jedoch zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet, wodurch $x+\Theta h$ zwischen x und $x+h$ fällt; so folgt, dass die Taylor'sche Reihe convergent ist, oder $f(x+h)$ zur Summe hat, wenn der Werth dieses ergänzenden Gliedes kleiner als jede gegebene Grösse wird, sobald man μ ohne Ende wachsen lässt.

Einen andern, bestimmteren Ausdruck für diesen Rest erhält man mit Hilfe der bestimmten Integrale (§. 876, Anmerk. 2).

Anmerk. 3. Unter den vielerlei Ableitungen der Taylor'schen Reihe verdient noch die folgende eine besondere Berücksichtigung (III., S. 28).

Setzt man, dass y in $y_1, y_2, \ldots y_n$ übergeht, wenn in $y=f(x)$, x beziehungsweise um Δx, $2\Delta x$, ... $n\Delta x$ zunimmt, so hat man wegen (§. 233) $y_n=y+\binom{n}{1}\Delta y+\binom{n}{2}\Delta^2 y+\ldots+\Delta^n y$ sofort auch:

$$f(x+n\Delta x)=f(x)+n\Delta x\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta x^2\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}+\ldots$$

oder

$$f(x+n\Delta x)=f(x)+n\Delta x\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{n^2\Delta x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}+\ldots$$
$$+\frac{n^n\Delta x^n}{1.2.3..n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

und wenn man $n\Delta x=h$ setzt, auch:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{h^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$$
$$+ \frac{h^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3..n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)..\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} + .. \; (\alpha).$$

Lässt man nun das Intervall Δx unbestimmt abnehmen, dagegen n eben so unbestimmt und zwar dergestalt zunehmen, dass dabei immer $n\Delta x$ constant $= h$ bleibt, so nimmt die Anzahl der Glieder in der vorigen Reihe ins Unbestimmte zu, die Quotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}, \ldots$ convergiren gegen die Grenzen $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ldots$ oder $f'(x), f''(x), \ldots$ und die Coefficienten

$$1-\frac{1}{n}, \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right),$$

wobei m irgend eine positive Zahl $< n$ ist, welche constant bleibt, während n fortwährend zunimmt, convergiren dabei beständig gegen die Einheit. Aus diesem Grunde kann man für jeden Werth von h und wie gross auch m sein mag, n immer gross genug nehmen, um zu bewirken, dass die Summe der ersten $m+1$ Glieder der vorigen Entwickelung (α) von der Summe

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{m(1)}(x) \; . \; . \; . \; (\beta)$$

so wenig als man nur immer will abweicht. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die abgeleiteten Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, . . . endliche Werthe beibehalten.

Aus dieser Entwickeluug folgt nun ganz deutlich, dass man keinesweges zu der Annahme berechtigt ist, dass die Function $f(x+h)$ das summatorische Glied der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe (β) sei; denn betrachtet man in der Reihe (α), welche den genauen Werth von $f(x+h)$ gibt, etwa das $s+1^{\text{te}}$ Glied, wobei s eine zwischen m und n liegende, jedoch weit grössere Zahl als m sein und schon nahe an n liegen soll, so wird sich dieses nicht genau mehr [wie das entsprechende Glied in (β)] auf $\frac{h^s}{1.2.3..s} f^{s(1)}(x)$ reduciren, weil sich der betreffende Coefficient $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)$ nicht mehr wie bei den frühern Gliedern auf die Einheit reducirt, sondern sich schon mehr der Nulle nähert.

Man ist daher nur berechtiget

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{m(\prime)}(x) + R_m \ldots (\gamma)$$

zu setzen, wobei R_m (eine unbekannte Function von x und h) den Rest der Reihe bildet.

Bleibt die $m+1^{te}$ derivirte Function, nämlich $f^{m+1(\prime)}(x')$ für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werthe von x' endlich und continuirlich, so kann man diesen Werth von x' durch $x + \Theta h$ darstellen, wo Θ eine positive Zahl < 1, übrigens aber unbekannt ist, und man findet (durch eine ziemlich weitläufige Discussion), dass man

$$R_m = \frac{h^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} f^{m+1(\prime)}(x + \Theta h)$$

setzen kann.

Weiss man, dass die Derivirte der m. Ordnung, d. i $f^{m(\prime)}(x')$, für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werthe von x' endlich und continuirlich bleibt, während man diess von der nächst höhern derivirten Function $f^{m+1(\prime)}(x')$ nicht mehr mit Bestimmtheit weiss, so muss man bei diesem Gliede der m. Ordnung stehen bleiben, wobei man dem Reste dann die Form geben kann:

$$R_m = \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} [f^{m(\prime)}(x + \Theta h) - f^{m(\prime)}(x)].$$

Wenn dann auch für besondere Werthe von x die höhern derivirten Functionen, von der $m+1^{ten}$ angefangen, unendlich oder discontinuirlich werden sollten, so gibt die Taylor'sche Reihe dennoch den richtigen Werth von $f(x+h)$, wenn man diese bei dem $m+1^{ten}$ Gliede, welches nur noch die derivirte Function der m. Ordnung enthält, abbricht (und nöthigen Falls den Rest R_m berücksichtigt). Aus diesem Grunde folgt auch, dass für einen particulären Werth von x die Taylor'sche Reihe den wahren Werth von $f(x+h)$ gibt, wenn man diese bei einem bestimmten Gliede abbricht, dass dieser aber ungenau werden kann, wenn man über dieses Glied hinausgeht.

Endlich lässt sich mittelst dieser letztern Form, welche man dem Reste R_m gegeben, sehr leicht zeigen, dass wenn man bei irgend einem Gliede der Reihe (γ), z. B. beim $m+1^{ten}$ stehen bleibt, h immer so klein genommen werden kann, dass der noch hinzuzufügende Rest R_m kleiner als dieses $m+1^{te}$ Glied werden kann, indem er gleichzeitig mit h gegen Null convergirt.

§. **663**. Zusatz. Setzt man
$$f(x) = u, \quad f(x+dx) = u' \text{ und } y = dx;$$
so hat man nach dieser Reihe:
$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

§. 664. Beispiele über diese Reihe.

1. Um zu bestimmen, was aus $f(x) = 2x^2 - 3x$ wird, wenn man darin x in $x + a$ übergehen lässt, hat man nach der obigen Reihe (1), wegen $\frac{df(x)}{dx} = 4x - 3$ und $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4$ (alle folgenden Differential-Quotienten sind Null), sofort:
$$f(x+a) = (2x^2 - 3x) + (4x - 3)a + 2a^2.$$
Daraus erhält man auch als Aenderung der Function, d. i.
$$f(x+a) - f(x) = (4x - 3)a + 2a^2;$$
was man auch Alles auf gewöhnliche Art bestätigt findet.
2. Um ferner auch wenigstens an einem Beispiele zu zeigen, wie man die Taylor'sche Reihe zur Entwickelung der Functionen einer Variablen in Reihen benützen kann, sei $f(x) = a^x$, also $f(x+y) = a^{x+y}$; so folgt aus (I), wegen
$$\frac{df(x)}{dx} = a^x la, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = a^x la^2, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = a^x la^3 \text{ u. s. w.,}$$
sofort:
$$a^{x+y} = a^x + a^x\frac{la}{1}y + a^x\frac{la^2}{1.2}y^2 + a^x\frac{la^3}{1.2.3}y^3 + \ldots,$$
und daraus für $x = 0$ (oder auch unmittelbar, wenn man durch a^x abkürzt) die (§. 292) bekannte Reihe:
$$a^y = 1 + \frac{la}{1}y + \frac{la^2}{1.2}y^2 + \frac{l\alpha^3}{1.2.3}y^3 + \ldots$$
[Weitere Beispiele, III., 29—32.]

§. 665. Obschon sich, so lange x seine allgemeine Bedeutung behält, $f(x+y)$, oder wenn man, wie es üblicher ist, h statt y schreibt, $f(x+h)$ immer in eine Reihe nach ganzen, positiven Potenzen von h entwickeln lässt (§§. 629, Anmerk., 662); so ist dieses gleichwohl nicht immer der Fall, wenn der Variablen x bestimmte Werthe beigelegt werden. Wäre z. B. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ und $f(x+h)$ für $x = a$ (wofür die ursprüngliche Wurzelgrösse verschwindet) zu entwickeln, so hätte man
$$f(a+h) = \sqrt{(a+h)^2 - a^2} = \sqrt{2ah + h^2}$$
$$= h^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$
also eine Entwickelung, die nur nach gebrochenen Exponenten von h möglich ist. Wäre ferner $f(x) = \frac{X}{(x-a)^n}$, und wieder $f(x+h)$ für $x = a$ (wofür der Nenner der gegebenen Bruchfunction verschwindet) zu entwickeln; so hätte

man, wenn X (wie man immer voraussetzen kann) den Factor $x-a$ nicht weiter mehr enthält, und für $x=a+h$ in eine Reihe von der Form $A+Bh+Ch^2+\dots$ entwickelt werden kann:

$$f(a+h)=(A+Bh+Ch^2+\dots):h^n$$
$$=Ah^{-n}+Bh^{-n+1}+Ch^{-n+2}+\dots,$$

also eine Reihe, welche für positive Werthe von n, wenigstens in den ersten Gliedern, negative Potenzen von h besitzt. Wäre endlich $f(x)=l(x-a)$ und ebenfalls $f(x+h)$ für den bestimmten Werth von $x=a$ (wofür die Grösse unterm Logarithmenzeichen verschwindet) zu entwickeln; so hätte man $f(a+h)=lh$, eine Function, die sich bekanntlich (§. 290) in keine Reihe nach Potenzen von h (sondern nach $h-1$) auflösen lässt.

Lässt man x noch stehen, so hat man:

$$f(x+h)=l(x+h-a)=l[(x-a)+h]=l(x-a)$$
$$+l\left(1+\frac{h}{x-a}\right)=l(x-a)+\frac{h}{x-a}-\frac{h^2}{2(x-a)^2}+\dots,$$

eine Reihe, deren sämmtliche Glieder für $x=a$ Unendlich werden.

§. **666**. In allen diesen hier angeführten Fällen nun, werden in Folge der Regeln (§§. 638, 637, 640) für das Differentiiren einer Wurzelgrösse, eines Bruches und einer logarithmischen Function die Coefficienten der Taylor'schen Reihe (welche eben ganze, positive Exponenten von h voraussetzt), wenigstens von einem gewissen Gliede an, Unendlich *); man muss also dabei auf die Bequemlichkeit dieser Reihe oder dieses Satzes verzichten, und

*) Lässt sich $f\binom{x+h}{a}$ nur bis zu h^n nach ganzen, positiven Potenzen von h entwickeln, und werden von da an die Exponenten von h gebrochen $\left(n+\frac{u}{v},\dots\right)$; so werden die n ersten Coefficienten der Taylor'schen R. für $x=a$ endliche, die folgenden aber unendliche Grössen; man kann also in diesem Falle $f\binom{x+h}{a}$ mittelst der Taylor'schen R. nur bis (einschliesslich) zum $n+1^{\text{sten}}$ Glied entwickeln. (Vergl. die Anmerk. 3 in §. 662.)

$f(x+h)$, wie es in den drei angeführten Beispielen geschehen, auf gewöhnliche Art entwickeln. [III., 34 — 37.]

Die *Maclaurin*'sche Reihe.

§. **667.** Setzt man in der Taylor'schen Formel (I) (§. 662) $x=0$, und bezeichnet das, was aus der Function $f(x)$ und ihren auf einander folgenden Differential-Quotienten bei diesem Werthe von x wird, kurz durch

$$f\binom{x}{0},\ \frac{df\binom{x}{0}}{dx},\ \frac{d^2f\binom{x}{0}}{dx^2}\ \text{u. s. w.;}$$

so erhält man, wenn man auch gleich statt der ganz willkürlichen Grösse y, jene x schreibt:

$$\text{(II)}\quad f(x)=$$

$$f\binom{x}{0}+\frac{df\binom{x}{0}}{1.dx}x+\frac{d^2f\binom{x}{0}}{1.2dx^2}x^2+\frac{d^3f\binom{x}{0}}{1.2.3dx^3}x^3+\ldots,$$

eine Formel (welche, obschon sie von Stirling herrühren soll, gewöhnlich dem Schottländer Colin Maclaurin zugeschrieben wird), um eine jede Function $f(x)$, welche dazu geeignet ist, in eine nach ganzen, positiven Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln.

Anmerk. Aus dem für die Taylor'sche Reihe (§. 662, Anmerk. 2.) aufgestellten Reste folgt nun von selbst für die vorliegende Reihe als Rest oder letztes Glied der Ausdruck:

$$R=\frac{x^{\mu+1}}{2.3.4\ldots\mu}\ \frac{d^{\mu+1}.f(\Theta x)}{dx^{\mu+1}},$$

wenn man nämlich bei dem Gliede mit x^n stehen bleibt.

§. **668.** Beispiele über diese Formel.

1. Um $f(x)=a^x$ in eine Reihe zu entwickeln, hat man mit Rücksicht auf die in §. 658, 3. entwickelten Differentialquotienten von a^x, wenn man überall $x=0$ setzt:

$$f\binom{x}{0}=a^0=1,\ \frac{df\binom{x}{0}}{1.dx}=\frac{la}{1},\ \frac{d^2f\binom{x}{0}}{dx^2}=\frac{la^2}{1.2},$$

$$\frac{d^3f\binom{x}{0}}{1.2.3dx^3}=\frac{la^3}{1.2.3},\ \text{u. s. w.;}$$

folglich nach der vorigen Formel (II):

$$a^x = 1 + \frac{la}{1}x + \frac{la^2}{1.2}x^2 + \frac{la^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

(Vergl. §. 292.)

2. Für $f(x) = lx$ wäre $f\binom{x}{0} = l0 = -\infty$, $\frac{df\binom{x}{0}}{dx} = \frac{1}{0} = \infty$ u. s. w.; zum Beweis, dass lx in keine solche Reihe nach x entwickelt werden kann. — Nimmt man dagegen $l(1+x)$ für $f(x)$, so erhält man für den 1., 2., 3., . . . Differentialquotienten: $\frac{1}{1+x}$, $\frac{-1}{(1+x)^2}$, $\frac{1.2}{(1+x)^3}$, $\frac{-1.2.3}{(1+x)^4}$, u. s. w.; folglich, wenn überall $x = 0$ gesetzt wird, wodurch

$$f\binom{x}{0} = l1 = 0$$

wird, nach (II):

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

(Vergl. §. 291)

3. Es sei endlich noch $f(x) = arc\,sin\,x$, so ist mit Rücksicht auf die auf einander folgenden Differentialquotienten von $arc\,sin\,x$ (§. 658, 7)

$f\binom{x}{0} = arc\,sin\,0 = 0$, $\frac{df\binom{x}{0}}{dx} = 1$, 2. Quotient $= 0$, 3. Quotient $= \frac{1}{2.3}$, 4. Quotient $= 0$, 5. Quotient $= \frac{9}{1.2.3.4.5}$, u. s. w.; mithin nach (II):

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3\,x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

(Vergl §. 310, *). [Mehrere Beispiele hierüber, III., 39 — 40.]

*) Eine allgemeinere Form erhält die Reihe (II), wenn man in jener (I) (§. 662) a statt x und $x - a$ statt y setzt; denn dadurch erhält man, wenn man $f(a)$ statt $f\binom{x}{a}$ schreibt und auch gleich den Rest (§ 662, Anmerk. 3) berücksichtiget:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^m}{1.2.3..m}f^{m()}(a) + \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2.3.(m+1)}f^{m+1()}(a+\Theta x);$$

dabei hat a bloss die Bedingung zu erfüllen, dass die Function $f^{m+1()}(x')$ endlich und continuirlich bleibe für alle zwischen a und x liegenden Werthe von x'.

Wählt man nun in dieser Reihe [welche in die obige (II) übergeht, wenn man $a = 0$ setzt] die willkürliche Grösse a jedesmal so dass $x - a$ sehr klein ausfällt; so kann man ihr in manchen Fällen eine bessere Convergenz verschaffen, als jene (II) besitzt.

§. **669.** Hat man es bei den auf einander folgenden Differentialquotienten, wie im letztern Beispiele, mit gebrochenen oder irrationalen Functionen zu thun; so werden die spätern Quotienten immer verwickelter, und man kann sich in solchen Fällen zur Auflösung der Function $f(x)$ in eine Reihe, bequemer der folgenden, durch einige Beispiele erläuterten Methode bedienen.

§. **670.** Beispiele.

1. Um eine nach einfachen Potenzen von x fortschreitende Reihe für *arc sin* x zu finden, setze man, da kein Glied ohne x vorkommen kann (indem für $x = 0$ auch *arc sin* $x = 0$ ist):

$$arc\,sin\,x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$+ A_{2n} x^{2n} + A_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots$$

Beide Theile dieser Gleichung differentiirt und durch dx abgekürzt, erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots$$
$$+ 2n A_{2n} x^{2n-1} + (2n+1) A_{2n+1} x^{2n} + \ldots,$$

oder, wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n} x^{2n} + \ldots,$$

wenn man diese Reihe substituirt, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten: $A_1 = 1$, $2A_2 = 0$, $3A_3 = \frac{1}{2}$, $4A_4 = 0$, $5A_5 = \frac{1.3}{2.4}\ldots$ $2n A_{2n} = 0$ und $(2n+1) A_{2n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}$, also $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{2\,.\,3}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5}\ldots$, $A_{2n} = 0$ und $A_{2n+1} = \frac{1\,.\,3\ldots\ (2n-1)}{2\,.\,4\ldots 2n(2n+1)}$, und damit endlich aus der hier angenommenen, die vorige Reihe (§. 668, 3.)

2. Setzt man eben so, da auch *arc tang* $0 = 0$ ist (also kein Glied ohne x vorkommen kann),

$$arc\,tang\,x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

differentiirt beiderseits und kürzt die Gleichung durch dx ab; so erhält man: $\frac{1}{1+x^2} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$, oder wegen

$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$, sofort $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$, und aus dieser Gleichung: $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{1}{3}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{1}{5}$ u. s. w., so wie endlich mit diesen Werthen: $arc\,tang\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$ (Vergl. §. 310.)

3. Um endlich noch $(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 x + \mathfrak{t}_3 x^2 + \ldots)^n$ in eine Reihe nach Potenzen von x zu entwickeln, setze man

$$(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 x + \mathfrak{t}_3 x^2 + \ldots)^n = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 x + \mathfrak{T}_3 x^2 + \ldots,$$

so ist auch, wenn man beiderseits natürliche Logarithmen nimmt und hierauf differentiirt:

$$\frac{n(\mathfrak{t}_2 + 2\mathfrak{t}_3 x + 3\mathfrak{t}_4 x^2 + \ldots)}{\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 x + \mathfrak{t}_3 x^2 + \ldots} = \frac{\mathfrak{T}_2 + 2\mathfrak{T}_3 x + 3\mathfrak{T}_4 x^2 + \ldots}{\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 x + \mathfrak{T}_3 x^2 + \ldots},$$

oder nach Hinwegschaffung der Brüche:

$$n\mathfrak{T}_1\mathfrak{t}_2 + (2n\mathfrak{T}_1\mathfrak{t}_3 + n\mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_2)x + (3n\mathfrak{T}_1\mathfrak{t}_4 + 2n\mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_3 + n\mathfrak{T}_3\mathfrak{t}_2)x^2 + \ldots$$
$$= \mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_1 + (2\mathfrak{T}_3\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_2)x + (3\mathfrak{T}_4\mathfrak{t}_1 + 2\mathfrak{T}_3\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_3)x^2 + \ldots,$$

aus welcher Gleichung man nach dem oft genannten Satze der unbestimmten Coefficienten, wenn man früher aus der angenommenen Reihe (indem man wieder $x = 0$ setzt) $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{t}_1^n$ bestimmt hat, sofort $n\mathfrak{T}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_1$, $2n\mathfrak{T}_1\mathfrak{t}_3 + n\mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_2 = 2\mathfrak{T}_3\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{T}_2\mathfrak{t}_2$ u. s. w., also

$$\mathfrak{T}_2 = n\mathfrak{t}_1^{n-1}\mathfrak{t}_2,\quad \mathfrak{T}_3 = n\mathfrak{t}_1^{n-1}\mathfrak{t}_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\mathfrak{t}_1^{n-2}\mathfrak{t}_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und damit endlich die gesuchte, schon in §. 120 entwickelte Reihe, d. i. den **polynomischen Lehrsatz** erhält.

Drittes Capitel.

Das *Taylor*'sche Theorem auf Functionen *zweier* Variablen ausgedehnt. Die Differentiation der Functionen *mehrerer* Variablen. Die partiellen Differentiale. *Euler's* Lehrsatz der homogenen Functionen.

Das erweiterte *Taylor*'sche Theorem.

§. **671.** Es sei $u = f(x, y)$ eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x und y, und es gehe u in u' über, wenn man darin y als constant ansieht und x in $x + h$ verändert; ferner gehe u' in u'' über, wenn man in u' x als constant ansieht und y in $y + k$ übergehen lässt, so, dass also $u' = f(x + h, y)$ und $u'' = f(x + h, y + k)$ ist, wobei h und k zwei ganz beliebige Incremente oder Zunahmen bezeichnen. Schliesst man ferner die Differential-Quotienten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$, um anzudeuten, dass in u nur x als variabel genommen, oder bloss nach x differentiirt worden, in Parenthesen ein, und thut dasselbe hinsichtlich der Quotienten $\frac{du'}{dy}, \frac{d^2u'}{dy^2}, \ldots$, in welchen u' bloss nach y differentiirt ist; so erhält man nach der Formel I., §. 662:

$$u' = u + \left(\frac{du}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \frac{h^2}{2} + \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \frac{h^3}{2.3} + \ldots \text{ und}$$

$$u'' = u' + \left(\frac{du'}{dy}\right) k + \left(\frac{d^2u'}{dy^2}\right) \frac{k^2}{2} + \left(\frac{d^3u'}{dy^3}\right) \frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

Nun ist aber nach dem angedeuteten Sinne, wenn man für u' den Werth aus der vorigen Reihe setzt:

$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) h + \left(\frac{d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy}\right) \frac{h^2}{2} + \ldots,$$

wobei das 1. Glied $\left(\frac{du}{dy}\right)$ den Quotienten bezeichnet, welcher entsteht, indem man u bloss in Bezug auf y differentiirt, und durch dy dividirt; das 2. Glied den Quotienten bedeutet, welcher entsteht, wenn man die bereits einmal nach x differentiirte und durch dx dividirte Function u

noch einmal, and zwar nach y differentiirt und durch dy dividirt, welche zweimalige Operation kurz durch $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ angedeutet wird; das 3. Glied jene dreifache Differentiation bezeichnet, die analog durch $\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)$ angezeigt, und zufolge des eben Gesagten leicht verstanden wird, u. s. w. Man hat also jetzt, mit Anwendung dieser einfachern Bezeichnung:

$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) h + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

$$\left(\frac{d^2u'}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) h + \ldots,$$

$$\left(\frac{d^3u'}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) + \ldots, \text{ u. s. w.}$$

Werden sowohl diese, so wie auch der Werth von u' in der vorigen Gleichung von u'' substituirt; so erhält man:

$$(A)\quad u'' = u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right) h + \left(\frac{du}{dy}\right) k\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) h^2 + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) 2hk + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) k^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left[\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) h^3 + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) 3h^2k\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) 3hk^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) k^3\right] + \ldots$$

Anmerk. Hier ist das Gesetz des Fortganges für sich klar, und kann auch leicht für Functionen von 3 und mehreren Variablen erweitert werden. [Anwendung dieser Formel, um Functionen von 2 Variablen in unendliche Reihen zu verwandeln, III., 57.]

§. **672.** Zusatz. Kehrt man die Ordnung um, und lässt zuerst x ungeändert und y um k zunehmen, dann y ungeändert und x um h zunehmen; so erhält man genau eben so:

$$u'' = u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right) k + \left(\frac{du}{dx}\right) h\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) k^2 + \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) 2hk + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) h^2\right] + \ldots,$$

und da diese Entwickelung mit der vorigen (A) identisch sein muss, ferner h und k ganz willkürliche unabhängige Grössen sind; so hat man durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten:

$$(m) \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right), \quad \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) = \left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right) \text{ u. s. w.,}$$

und allgemein:

$$\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n}u}{dy^n\,dx^m}\right),$$

d. h. man erhält immer dasselbe Resultat, man mag die Function $u = f(x, y)$ zuerst m Mal nach x und hierauf n Mal nach y, oder umgekehrt, zuerst n Mal nach y und dann erst m Mal nach x differentiiren.

Für $u = x^3 \sin y$ z. B. ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 \sin y, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 6x \sin y \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) = 6x \cos y.$$

Kehrt man die Ordnung um, so erhält man: $\left(\frac{du}{dy}\right) = x^3 \cos y$, dann $\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = 3x^2 \cos y$, und endlich $\left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right) = 6x \cos y$, wie vorhin.

Total- und Partial-Differentiale.

§. **673.** Analog mit der in §. 632 gegebenen Erklärung ist, immer in der Voraussetzung, dass in $u = f(x, y)$ die beiden Variablen x und y von einander unabhängig sind, sofort $du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ das Differential von u. Setzt man daher in der Formel (A) des zweit vorhergehenden Paragraphes $h = dx$ und $k = dy$, so erhält man, da wieder die Glieder der höhern Ordnungen weggelassen werden müssen: (1) $du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$.

In diesem Ausdrucke heissen zum Unterschiede vom Total- oder vollständigen Differential du, die beiden Glieder

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) dy$$

beziehungsweise die partiellen Differentiale von u nach x und nach y, so, dass also das Total-Differential aus der Summe der partiellen Differentiale besteht; welcher Satz sich überhaupt auf Functionen von jeder beliebigen Anzahl von Variablen ausdehnen und erweisen lässt, so, dass z. B. für $u = f(x, y, z)$ sofort $du = d_x u + d_y u + d_z u$, oder nach der gewöhnlichen Bezeichnungsart (wobei jedoch auch öfter die Klammern ausgelassen werden):

$$(1') \quad du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz$$

ist, u. s. w. Hieraus folgt zugleich, dass die Differentiation der Functionen mehrerer von einander unabhängiger Variablen (indem nach und nach nur immer Eine als variabel angesehen wird) auf jener der Functionen Einer Variablen beruht, oder auf diese zurückgeführt werden kann.

§. **674**. Beispiele hierüber:

1) Für $u = xy$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) dx = y\,dx$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) dy = x\,dy$, also nach (1) des vorigen §. $du = y\,dx + x\,dy$.

2) Für $u = \frac{x}{y}$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) dx = \frac{dx}{y}$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) dy = \frac{-x\,dy}{y^2}$, demnach $du = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$.

3) Für $u = arc\,tang\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ wird wegen $arc\,tang\,\frac{x+y}{1-xy} = arc\,tang\,x + arc\,tang\,y$ sofort $\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{1+y^2}$, folglich $du = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$.

4) Für $u = xy^2 \sin z$ folgt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx = y^2 \sin z\,dx, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 2xy \sin z\,dy$$

$$\text{und} \left(\frac{du}{dz}\right) dz = xy^2 \cos z\,dz;$$

mithin ist nach Relation (1′) des vorigen Paragraphen:

$$du = y^2 \sin z\,dx + 2xy \sin z\,dy + xy^2 \cos z\,dz.$$

Anmerk. Man sieht, dass die im ersten Capitel für das Differentiiren der Functionen Einer Variablen abgeleiteten Regeln auch für Functionen zweier und mehrerer Variablen gelten; denn man hat z. B., ohne auf partielle Differentiale überzugehen, nach der für (§. 636) dXX' abgeleiteten Regel unmittelbar: $dxy = x\,dy + y\,dx$, wie vorhin im ersten Beispiele. Dasselbe gilt auch von allen übrigen Beispielen.

§. **675**. Die höhern Differentiale von $u = f(x, y)$ findet man wieder durch wiederholtes Differentiiren der obigen Gleichung (1) (§. 673), in welcher $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ im Allgemeinen wieder neue Functionen von x und y, hin-

gegen dx und dy constant sind. Man hat nämlich aus der genannten Gleichung (1): $d^2u = dx d\left(\frac{du}{dx}\right) + dy d\left(\frac{du}{dy}\right)$, oder [indem man wieder nach der nämlichen, in der Gleichung (1) ausgesprochenen Regel differentiirt, und dabei das in §. 671 über die einfache Bezeichnung der Differential-Quotienten Gesagte berücksichtiget] wegen

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dy \text{ und}$$

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy;$$

ferner mit Rücksicht auf die erste Relation (m) in §. 672, wenn man sogleich die gleichen Glieder zusammennimmt:

$$(2)\quad d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2.$$

§. **676**. Genau auf dieselbe Weise findet man auch, da die Quotienten $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ etc. im Allgemeinen wieder Functionen von x und y sind:

$$(3)\quad d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) dx^3 + 3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) dx^2dy + 3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) dx\,dy^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) dy^3 \text{ u. s. w.}$$

Auch würde man auf ähnliche Art durch wiederholtes Differentiiren der obigen Gleichung (1′) (§. 673) die höhern Differentiale von $f(x, y, z)$ finden, u. s. w.

Anmerk. Diese Ausdrücke (1) (§. 673), (2), (3), ... (des gegenwärtigen §.) verglichen mit den Gliedern der Reihe (A), §. 671, geben, wenn man dort

$$h = dx,\ k = dy \text{ und } f(x + dx,\ y + dy) = u'$$

setzt, wieder die bereits in §. 663 (Zusatz) für Functionen einer Variablen gefundene Reihe:

$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

§. **677**. Es ist für $u = f(x, y)$ [§. 673, Gleichung (1)] $du = Pdx + Qdy$, und dabei $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$; mithin, wenn man abermals partiell differentiirt:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) \text{ und } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right),$$

also [§. 672, Relation (m)] (1) $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; eine Bedingungsgleichung, welche immer besteht, wenn $Pdx + Qdy$ das wahre und vollständige Differential einer Function zweier Variablen x und y ist.

§. **678.** Für $u = f(x, y, z)$, wofür also $du = Pdx + Qdy + Rdz$ ist, findet man eben so, oder kürzer, indem man in dieser Gleichung nach und nach z, y, x als constant ansieht (wofür beziehungsweise die Glieder mit dz, dy, dx herausfallen), und auf die jedesmal stehen bleibenden beiden Glieder die vorige Bedingungsgleichung (1) anwendet, die drei nachstehenden Bedingungsgleichungen:

$$(2) \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

welche sofort bestehen müssen, wenn das vorige Differentiale du ein wahres und vollständiges Differential einer Function u von drei veränderlichen Grössen sein soll. — Zugleich ist hier der Weg angegeben, um die ähnlichen Bedingungsgleichungen für Functionen von noch mehreren Variablen aufzufinden.

Euler's Lehrsatz über die *homogenen* Functionen.

§. **679.** Nach §. 106 geht die gleichartige oder homogene Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ der m^{ten} Ordnung, wenn man statt $x, y, z, \ldots$ beziehungsweise $tx, ty, \ldots$ schreibt, wo t eine neue, von $x, y, z, \ldots$ ganz unabhängige Grösse ist, in ut^m, also auch, wenn man $t = 1 + \alpha$ setzt, wodurch sich x in $x + \alpha x$, y in $y + \alpha y$ u. s. w. verwandelt, in $u(1 + \alpha)^m$ über. Nach der erweiterten *Taylor*'schen Formel (§. 671, Anmerk.) findet man aber, wenn in der ursprünglichen Function u, x in $x + \alpha x$, y in $y + \alpha y$ u. s. w. übergeht, für die neue Function den Ausdruck:

$$u(1 + \alpha)^m = u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)\alpha x + \left(\frac{du}{dy}\right)\alpha y + \left(\frac{du}{dz}\right)\alpha z + \ldots\right] + \text{etc.}$$

Da aber auch von der andern Seite

$$u(1 + \alpha)^m = u + \binom{m}{1} u\alpha + \binom{m}{2} u\alpha^2 + \ldots$$

ist, so hat man durch Gleichsetzung der gleichnamigen Coefficienten der unabhängigen Grösse α:

$$u = u, \quad mu = \left(\frac{du}{dx}\right) x + \left(\frac{du}{dy}\right) y + \left(\frac{du}{dz}\right) z + \ldots \text{ u. s. w.},$$

indem diese zweite Gleichung für unsern Zweck schon hinreicht. Setzt man daher Kürze halber

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = P, \ \left(\frac{du}{dy}\right) = Q, \ \left(\frac{du}{dz}\right) = R, \ldots$$

so ist das Differential unserer homogenen Function u des m^{ten} Grades (§. 673): (p) $du = Pdx + Qdy + Rdz + \ldots$, und zufolge der vorigen zweiten Gleichung:

$$(q) \quad Px + Qy + Rz + \ldots = mu,$$

welche Relation sofort den *Euler*'schen Satz bildet. Dabei sind, wie man sieht, die Coefficienten P, Q, ... homogene Functionen von x, y, ... der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. [Beispiele III., 85.]

Viertes Capitel.

Von der Differentiation der *unentwickelten* Functionen oder *Gleichungen* mit zwei und mehreren veränderlichen Grössen.

§. **680**. Bisher haben wir immer entwickelte (explicite) Functionen von der Form $y = f(x)$, $u = f(x, y)$ u. s. w. betrachtet; nun soll gezeigt werden, wie in unentwickelten (impliciten) Functionen, wie z. B. in $f(x, y) = 0$, die Differentiation ausgeführt, und wenn y die Function von x sein soll, daraus die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. bestimmt werden.

§. **681**. Es sei $u = f(x, y) = 0$ die gegebene Gleichung, x die unabhängige Variable und y die davon abhängige oder $y = \varphi(x)$. Da also y in $y + dy$ übergeht, wenn sich x in $x + dx$ verändert (§. 631), so besteht auch die Gleichung: $f(x + dx, y + dy) = 0$, und wenn man davon die gegebene abzieht, auch jene: $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = 0$, oder

nach der Formel (A), §. 671, wenn man dort $h = dx$ und $k = dy$ setzt: $(l)\ \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = 0$, d. i. [§. 673, Gl. (1)] $df(x, y) = 0$, so angesehen, als ob y von x unabhängig wäre. Um also aus der Gleichung $f(x,y) = 0$, wo $y = \varphi(x)$ ist, und ohne die Gleichung erst in Beziehung auf y aufzulösen, den ersten Differential-Quotienten zu finden, wird man $f(x, y)$ nach §. 673 so differentiiren, als ob x und y von einander unabhängig wären, dieses Differential gleich Null setzen, und aus der so gebildeten Gleichung $\frac{dy}{dx}$ bestimmen; es folgt nämlich auf diese Weise:

$$(r)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}.$$

1) Ist z. B. $u = axy^2 + b = 0$ und y eine Function von x, so hat man nach dieser Regel: $d(axy^2 + b) = 0$, d. i. $ay^2dx + 2axy\,dy = 0$, und daraus $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}$. [Oder wenn man partiell differentiirt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = ay^2,\quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2axy,$$

auch nach Relation (r): $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}$.] Und in der That, bestimmt man (was hier möglich ist) die Function y aus der gegebenen Gleichung, so erhält man: $y = \sqrt{\frac{-b}{ax}}$, und daraus nach §. 638:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{ax^2 \cdot 2y} = \frac{by}{2ax^2y^2} = \frac{-y}{2x},\ \text{wegen}\ y^2 = -\frac{b}{ax}.$$

2) Aus der Gleichung (der Ellipse) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ folgt (ohne diese erst nach y aufzulösen) $2a^2y\,dy + 2b^2x\,dx = 0$, und daraus $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

So wie aber, wenn man die Gleichung nach y auflöst, y zwei Werthe erhält, so erhält auch dieser Quotient eben so viele Werthe $\left(\pm\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$.

§. **682.** Wiederholt man die Schlüsse des vorigen Paragraphen, nach welchem wir gefunden haben, dass für $u = f(x, y) = 0$ [obgleich dabei $y = \varphi(x)$ ist] auch $du = 0$ st; so findet man eben so: $d^2u = 0$, $d^3u = 0$ u. s. w. —

Nun war, Gl. (l), $du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$; differentiirt man daher abermals und bemerkt, dass dx constant, dagegen wegen $y = \varphi(x)$, dy variabel ist; so erhält man nach derselben Regel (l) des vorigen Paragraphen:

$$(n) \quad d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) dy\,dx + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx\,dy$$
$$+ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2 + \left(\frac{du}{dy}\right) d^2y = 0,$$

und aus dieser Gleichung, mit Rücksicht auf die erste Relation (m), §. 672, wodurch sich die beiden Glieder in $dx\,dy$ zusammenziehen lassen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}\right] : \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Ist z. B. $u = f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, so folgt

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = 0,$$

folglich wegen (§. 681, Relation r) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$, nach dieser letzten Relation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2 + 2\frac{x^2}{y^2}}{2y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Es ist in der That, wenn man die gegebene Gleichung zweimal differentiirt:

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0.$$

und (weil x die unabhängige Variable, also dx constant sein soll)

$$2dx^2 + 2dy^2 + 2y\,d^2y = 0.$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y} = -\frac{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}, \text{ wie zuvor.}$$

Auf dieselbe Art lassen sich auch, durch wiederholtes Differentiiren der vorigen Gleichung (n), die folgenden Differential-Quotienten bestimmen. [Weitere Ausführung sammt Beisp. III., 75 — 77.]

§. **683**. Ist $u = f(x, y, z) = 0$ und z eine Function der beiden unabhängigen Variablen x, y; so kann z verändert werden, indem sich bloss x oder y, oder auch, indem sich beide diese Grössen gleichzeitig ändern. Sieht man nun y als constant an, so hat man zufolge der obigen Gleichung (l) (§. 681) die Relation: $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dz}\right) d_x z = 0$ (nämlich dz

bloss nach x genommen). Sieht man dagegen x als constant an, so hat man eben so:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)\underset{y}{dz} = 0,$$

also durch Addition dieser beiden Gleichungen und der Berücksichtigung, dass (§. 673) $\underset{x}{dz} + \underset{y}{dz} = dz$ (das Totaldifferential) ist: $\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz = 0$, d. i. wieder [als ob x, y, z von einander unabhängig wären, §. 673, (1')] $du = 0$. — Eben so könnte man auch wieder die höhern Differentiale von u ableiten, und diese Entwickelungen überhaupt auf Functionen von jeder beliebigen Anzahl von Variablen ausdehnen.

Anmerk. Hinsichtlich der in solchen Gleichungen vorkommenden constanten Grössen gilt wieder, dass sie durchs Differentiiren hinausfallen; so ist z. B. die aus der Gleichung $y^2 = ax + b$ abgeleitete Differentialgleichung $2y\,dy = a\,dx$ von der Constanten b unabhängig und entspricht sonach allen besondern Gleichungen, welche aus der gegebenen entstehen, indem man der Grösse b nach und nach alle möglichen Werthe beilegt. — Die constante Grösse a betreffend, so kann diese zwar nicht durch unmittelbares Differentiiren herausfallen, immer aber lässt sich auch eine von a unabhängige Gleichung aufstellen, indem man diese Grösse aus der gegebenen und ihrer Differentialgleichung eliminirt; es ist nämlich aus der vorigen Differentialgleichung $a = 2y\,dy : dx$, und wenn man diesen Werth für a in der ursprünglich gegebenen substituirt, die erwähnte Gleichung: $y^2\,dx = 2xy\,dy + b\,dx$, eine Gleichung, welche zwischen y, x und dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für jeden Werth von a besteht. Eben so folgt aus der Gleichung (der Parabel) $y^2 = px$, sofort $y\frac{dx}{dy} = 2x$ (vergl. §. 708). [III., 79.]

Fünftes Capitel.

Anwendung und Gebrauch der Differentialrechnung in der *Analysis*.

I.

Bestimmung des Werthes einer Function, welche unter einer der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 0^0, 1^∞ erscheint.

§. **684**. Einleitung. Es gibt gebrochene Functionen, welche für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, und nichts desto weniger einen bestimmten, angebbaren Werth besitzen. Ist z. B. $y = \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, so wird für $x = a$, $y = \frac{0}{0}$. Berücksichtiget man aber, dass $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ und $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ ist, und kürzt diesen Bruch durch den gemeinschaftlichen (Nullmachenden) Factor $x - a$ ab; so wird noch immer ganz allgemein $y = \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$, und sonach für $x = a$ sofort $y = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$. Eben so geht die Bruchfunction $y = \frac{3 - \sqrt{x + 8}}{x^2 - 1}$ für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ über. Macht man jedoch den Zähler rational, wodurch $y = \frac{-(x-1)}{(x^2-1)(3+\sqrt{x+8})}$ wird; so entdeckt sich sogleich der gemeinschaftliche (Nullmachende) Factor $x - 1$ im Zähler und Nenner, so, dass wenn man mit diesem früher abkürzt, noch immer allgemein $y = \frac{-1}{(x+1)(3+\sqrt{x+8})}$, und daher für $x = 1$ sofort $y = -\frac{1}{12}$ wird. — Ist daher allgemein $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, und enthalten beide Functionen, d. i. Zähler und Nenner von y, den gemeinschaftlichen Factor $x - a$, so, dass der Form nach

$$F(x) = (x-a)^m P \text{ und } f(x) = (x-a)^n Q$$

ist; so wird offenbar für $x = a$, bevor man mit diesem Nullmachenden Factor $x - a$ abgekürzt hat, $y = \frac{0}{0}$, während doch, je nachdem $n = m$, $n < m$ oder $n > m$, beziehungsweise der wahre Werth von y für $x = a$ sofort $\frac{P}{Q}$, 0, oder ∞ ist.

§. **685.** Es sei nun a jener Werth von x, für welchen sowohl $F(x) = 0$, als auch $f(x) = 0$, folglich in $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, $y = \frac{0}{0}$ wird. Lässt man x um die willkürliche Grösse h zunehmen, und entwickelt $F(x+h)$ und $f(x+h)$ nach der Taylor'schen Formel (§. 662), wobei wir (so wie auch durchgehends in den folgenden §§.) den Rest R der Reihe auslassen, weil er mit h zugleich verschwindet; so erhält man:

$$(s) \quad \frac{F(x+h)}{f(x+h)} = \frac{F(x) + \frac{dF(x)}{dx} h + \frac{d^2F(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots}{f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots},$$

und wenn man jetzt $x = a$ setzt, wodurch nach der Voraussetzung $F\binom{x}{a}$ und $f\binom{x}{a}$ verschwinden, und auch gleich mit h abkürzt:

$$(t) \quad \frac{F\binom{x+h}{a}}{f\binom{x+h}{a}} = \frac{\frac{dF\binom{x}{a}}{dx} + \frac{d^2F\binom{x}{a}}{dx^2} \frac{h}{2} + \ldots}{\frac{df\binom{x}{a}}{dx} + \frac{d^2f\binom{x}{a}}{dx^2} \frac{h}{2} + \ldots}.$$

Setzt man endlich in diesem Ausdrucke die Hilfsgrösse $h = 0$, so findet man, wenn auch noch durch dx abgekürzt und der gesuchte Werth von y durch A bezeichnet wird:

$$A = \frac{F\binom{x}{a}}{f\binom{x}{a}} = \frac{dF\binom{x}{a}}{df\binom{x}{a}},$$ diesen Differentialquotienten so verstanden, dass nach der Differentiation $x = a$ gesetzt wird.

§. **686.** Würden aber bei diesem Werthe von $x = a$ auch noch $dF(x)$ und $df(x) = 0$, so hätte man aus (t),

wenn man durch $\frac{1}{2}h$ abkürzt und dann wieder $h = 0$ setzt (auch dx^2 im Zähler und Nenner weglässt):

$$A = \frac{F\binom{x}{a}}{f\binom{x}{a}} = \frac{d^2F\binom{x}{a}}{d^2f\binom{x}{a}}.$$

§. **687**. Verschwinden überhaupt bei diesem Werthe von $x = a$ hinter einander $F(x)$, $dF(x)$, . . . $d^{n-1}F(x)$ und $f(x)$, $df(x)$, . . . $d^{n-1}f(x)$; so ist der gesuchte Werth von $A = \frac{F\binom{x}{a}}{f\binom{x}{a}} = \frac{d^nF\binom{x}{a}}{d^nf\binom{x}{a}}$, nämlich nach vollendeter Differentiation wieder $x = a$ gesetzt.

§. **688**. Beispiele hierüber.

1) Für das oben gewählte Beispiel (§. 684) $y = \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1}$, in welchem für $x = 1$, $y = \frac{0}{0}$ wird, hat man nach dieser eben entwickelten Regel:

$$\frac{dF(x)}{df(x)} = \frac{d(3 - \sqrt{x+8})}{d(x^2 - 1)} = \frac{-1}{4x\sqrt{x+8}},$$

also wenn $x = 1$ gesetzt wird, $A = -\frac{1}{12}$ als wahren Werth für y. (Vergleiche §. 684.)

2) Um die Function $y = \frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$, wofür y die Form $\frac{0}{0}$ erhält, zu bestimmen, hat man $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, also für $x = 0$ sofort $A = \cos 0 = 1$. Hieraus folgt also, dass sich der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ bei der unendlichen Abnahme von x ohne Ende der Einheit nähert [diess folgt auch aus der Reihe (3), §. 308]. Eben so findet man aus $y = \frac{1 - \cos x}{x}$ für $x = 0$: $A = 0$, d. h. der Sinusversus eines unendlich kleinen Bogens ist in Beziehung auf diesen Bogen selbst wieder unendlich klein.

3) Für $x = 0$ erhält die Function

$$y = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

die Form $\frac{0}{0}$; dasselbe findet noch nach der ersten und zweiten Differentiation Statt; erst nach der dritten Differentiation erhält man den Bruch $\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$, also für $x = 0$ sofort $A = 2$, was man auch findet,

wenn man für e^x, e^{-x} und $\sin x$ die Reihen setzt und den entstehenden Bruch durch den nullmachenden Factor x^3 abkürzt.

4) Es sei noch $y = \frac{x^3 - a^2 x + 2a^3 - 2ax\sqrt{2ax - x^2}}{x^2 - 3ax + a^2 + \sqrt{2ax - a^2}}$ für $x = a$, wofür $y = \frac{0}{0}$ wird, zu bestimmen. Hier ist

$$\frac{dF(x)}{df(x)} = \frac{3x^2 - a^2 - (6a^2x - 4ax^2)(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x - 3a + a^2(2ax - a^2)^{-\frac{1}{2}}},$$

welcher Quotient für $x = a$ abermals in $\frac{0}{0}$ übergeht. Differentiirt man demnach noch ein Mal, so erhält man:

$$\frac{d^2F(x)}{d^2f(x)} =$$

$$\frac{6x - (6a^2 - 8ax)(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} + (a - x)(6a^2x - 4ax^2)(2ax - x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2 - a^3(2ax - a^2)^{-\frac{3}{2}}},$$

woraus für $x = a$, als gesuchter Werth von y, sofort $\frac{6a + 2a}{2 - 1} = 8a$ hervorgeht. [Weitere Beispiele III., 85—86.]

§. **689**. Da wir zur Ableitung der hier angewendeten Regel (§. 687) von der Taylor'schen Reihe Gebrauch gemacht haben, so wird diese Regel überall dort nicht anwendbar sein, wo sich diese Reihe selbst nicht anwenden lässt (§. 665). Ist z. B. $y = \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt[3]{x^2 - a^2}}$, welcher Bruch für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht; so erhält man, man mag auch Zähler und Nenner noch so oft differentiiren, für $x = a$ immer wieder $\frac{0}{0}$. Hier tritt aber auch in der That einer der in §. 665 erwähnten Fälle ein (nämlich der erste), in welchen für den speciellen Werth von $x = a$ weder $F(x + h)$ noch $f(x + h)$ in eine nach ganzen, positiven Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickelt werden kann.

§. **690**. In einem solchen Falle wird man auf den Gebrauch der Differentialrechnung verzichten (oder durch Herstellung gleicher Wurzelexponenten y auf die Form $\sqrt[n]{\frac{F(x)}{f(x)}}$ bringen, nach der obigen Regel den Werth $\frac{F\binom{x}{a}}{f\binom{x}{a}} = A'$ bestimmen, und sofort ebenfalls den gesuchten

Werth $A = \sqrt[n]{A'}$ erhalten), und sich der gewöhnlichen, in allen Fällen anwendbaren (obschon nicht immer bequemen) Methode bedienen, welche darin besteht, in $F(x)$ und $f(x)$, $x = a + h$ zu substituiren, hierauf den Bruch $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ so weit wie möglich zu reduciren, und dann wieder $h = 0$ zu setzen.

So ist für das hier (vorigen §.) angeführte Beispiel nach dieser Methode:

$$y = \frac{\sqrt{a+h-a}}{\sqrt[3]{(a+h)^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{2ah + h^2}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2a + h}},$$

und wenn man jetzt $h = 0$ setzt, der gesuchte Werth für $x = a$ sofort $A = 0$.

Anmerk. Manchmal kann dieses Verfahren selbst dort, wo sich die in §. 687 angegebene Regel zwar anwenden lässt, jedoch mehrere und complicirte Differentiationen nothwendig sind, vorzuziehen sein. So ist für das vierte Beispiel in §. 688 nach dieser Methode:

$$y = \frac{2a^3 + 2a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a(a+h)\sqrt{a^2 - h^2}}{-a^2 - ah + h^2 + a\sqrt{a^2 + 2ah}},$$

den Ausdruck so verstanden, dass man nach allen möglichen Reductionen $h = 0$ setzt. — Nun ist

$$\sqrt{a^2 - h^2} = a - \tfrac{1}{2}a^{-1}h^2 - \ldots \text{ und}$$

$$\sqrt{a^2 + 2ah} = a + h - \tfrac{1}{2}a^{-1}h^2 + \tfrac{1}{2}a^{-2}h^3 - \ldots,$$

also wenn man diese Werthe substituirt und die sich ergebenden Reductionen vornimmt, $y = \frac{8a + 4h + \ldots}{1 + a^{-1}h + \ldots}$ oder $h = 0$ gesetzt: $y = 8a$, wie oben.

§. **691**. Werden in $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ für $x = a$ beide Functionen Unendlich, erhält also dafür y die Form $\frac{\infty}{\infty}$; so darf man nur y unter der Form $y = \frac{1}{f(x)} : \frac{1}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ darstellen, um für y wieder $\frac{0}{0}$ zu bekommen und dafür den wahren Werth nach den vorigen Regeln zu finden. Nun ist aber $\frac{d\varphi(x)}{d\psi(x)} = \frac{-df(x)}{-dF(x)} \cdot \frac{F(x)^2}{f(x)^2}$, mithin, da für $x = a$ der wahre Werth des gegebenen Bruches wieder durch A bezeichnet werden soll:

$$A = \frac{df(x_a)}{dF(x_a)} \cdot A^2, \text{ woraus sonach}$$

$$A = \frac{dF(x_a)}{df(x_a)} \text{ folgt.}$$

Hieraus geht hervor, dass man den Werth eines unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinenden Bruches genau nach denselben Regeln bestimmen kann, nach welchen man die Brüche von der Form $\frac{0}{0}$ bestimmt.

1. So erhält z. B. der Bruch $\frac{lx}{x}$ für $x=\infty$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$; es ist aber $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$, folglich $A = \frac{1}{\infty} = 0$, woraus zugleich folgt, dass der Logarithmus einer unendlich grossen Zahl (obschon selbst Unendlich) gegen diese Zahl unendlich klein ist.

2. Für den Bruch $l\left(\frac{1}{x}\right) : cot\, x$, welcher für $x=0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, erhält man nach einer zweimaligen Differentiation $A=0$.

3. Soll endlich der Werth der Function $y = \frac{sec\, x}{tang\, x}$ für $x = \frac{1}{2}\pi$ bestimmt werden, wofür y die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt; so hat man auch $y = \frac{1}{tang\, x} : \frac{1}{sec\, x} = \frac{cot\, x}{cos\, x}$, eine Function, die jetzt bei dem genannten Werth von $x = 90^0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Nach der oben abgeleiteten Regel ist aber

$$\frac{d\, cot\, x}{d\, cos\, x} = \frac{-1}{-sin\, x^2\, sin\, x} = \frac{1}{sin\, x^3},$$

folglich, wenn man $x = \frac{1}{2}\pi$ setzt: $y = \frac{1}{1} = 1$, als gesuchter Werth.

§. **692**. Verschwindet in dem Producte $F(x)\, f(x)$ für $x=a$ die eine Function $F(x)$, während die andere $f(x)$ dabei Unendlich wird, so nimmt dieses Product die unbestimmte Form $0.\infty$ an, dessen wahrer Werth auf doppelte Weise gefunden werden kann, je nachdem man nämlich, wenn Kürze halber $\frac{1}{f(x)} = \varphi(x)$ und $\frac{1}{F(x)} = \psi(x)$ gesetzt wird, das Product $F(x) f(x)$ unter der Form $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ oder $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ darstellt, weil von diesen beiden Brüchen für $x=a$ der erstere die Form $\frac{0}{0}$ und der letztere jene $\frac{\infty}{\infty}$ erhält, auf welche wieder die vorigen Regeln angewendet werden.

So erhält z. B. das Product $(1-x)\,tang\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ für $x=1$ die Form $0.\infty$, und da $\frac{1}{tang\left(x\frac{\pi}{2}\right)}=cot\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ ist, so hat man $\frac{d(1-x)}{d\,cot\left(x\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\,sin^2\left(x\frac{\pi}{2}\right)$, folglich ist für $x=1$: $(1-x)\,tang\left(x\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

§. **693.** Nimmt endlich der Ausdruck $F(x)^{f(x)}$ für $x=a$ eine der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, oder 1^{∞} an, so berücksichtige man, dass auch $F(x)^{f(x)}=e^{f(x)\,lF(x)}$ ist, wobei $f(x)\,lF(x)$ für $x=a$ beziehungsweise in $-0.\infty$, $0.\infty$ $\infty.0$ übergeht, wofür man den wahren Werth nach dem vorhergehenden §. bestimmen kann; ist dieser gleich α, so ist für $x=a$, $F(x)^{f(x)}=e^{\alpha}$.

1) So ist z. B. für $x=0$, $x^x=0^0$, da aber dabei $xlx=-0.\infty$ und dieses Product (voriger Paragraph) $=-0$ wird, so ist für $x=0$, $x^x=e^{-0}=1$.

2) Für $x=0$ erhält die Function $\left(\frac{1}{x}\right)^{tang\,x}$ die Form ∞^0; da aber für diesen Werth von x, $tang\,x\,l\left(\frac{1}{x}\right)=0$ wird, so ist dafür

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{tang\,x}=e^0=1.$$

3) Für $x=\infty$ wird $x^{\frac{1}{x}}=\infty^0$; da aber $\frac{1}{x}\,lx$ nach dem vorigen §. für $x=\infty$ den Werth $\frac{1}{x}=0$ erhält, so ist der gesuchte Werth von $x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

4) Für $x=a$ nimmt der Ausdruck $\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tang\frac{\pi x}{2a}}$ die Form 1^{∞} an; nun ist aber das Product $tang\frac{\pi x}{2a}\,l\left(2-\frac{x}{a}\right)$ für $x=a$ gleich $\frac{2}{\pi}$, mithin ist der gesuchte Werth von $1^{\infty}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

5. Eben so wird $x^{\frac{1}{1-x}}$ für $x=1$, wofür die Function die Form 1^{∞} annimmt nach diesem Verfahren $=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

6. Schliesslich findet man auch auf ähnliche Weise für die Differenz $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{lx}$, welche für $x = 1$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt (wegen $y = \frac{lx - (x-1)}{(x-1)\,lx}$, also $\frac{0}{0}$ für $x = 1$), $y = -\frac{1}{2}$.

II.

Bestimmung der *grössten* und *kleinsten* Werthe der Functionen.

A) Für Functionen *einer* Variablen.

§. **694**. Erklärungen. 1) Ist $y = f(x)$ eine Function von x, ferner für die ganz willkürliche Grösse h, $f(x+h) = y'$ und $f(x-h) = y''$; so sagt man y werde für den Werth von $x = a$ ein Maximum oder Minimum, wenn dafür $y = f\binom{x}{a}$ im ersten Falle grösser, und im zweiten kleiner ausfällt, als die unmittelbar vorausgehenden und nachfolgenden, das ist die Nachbarwerthe: $y'' = f\binom{x-h}{a}$ und $y' = f\binom{x+h}{a}$, wenn nämlich h hinlänglich klein genommen wird. Es ist nämlich für $x = a$, y ein Maximum oder ein Grösstes, wenn für die kleinsten Werthe von h (y, y' und y'' so verstanden, dass darin $x = a$ gesetzt wird) $y > y'$ und zugleich $y > y''$, dagegen ein Minimum oder ein Kleinstes, wenn $y < y'$ und zugleich auch $y < y''$ Statt findet.

So ist z. B. unter den unzähligen Werthen, welche y in $y = b^2 - (a-x)^2$, je nach den verschiedenen Werthen von x, annehmen kann, jener für $x = a$ am grössten, denn es ist dafür $y = b^2$; während, wenn man $x = a \pm h$ setzt, die Nachbarwerthe $y' = y'' = b^2 - h^2$, selbst für die kleinsten Werthe von h, gleichzeitig kleiner ausfallen.

Dagegen erhält die Function $y = b^2 + (a-x)^2$ für $x = a$ ihren kleinsten Werth, indem dafür $y = b^2$, die benachbarten Werthe aber (für $x = a \pm h$) $y' = y'' = b^2 + h^2$, wenn auch h noch so klein gedacht wird, gleichzeitig grösser sind.

Die Function $y = ax$ endlich hat weder einen grössten noch kleinsten Werth, weil y mit x ohne Ende zu- oder abnimmt, je nachdem x positiv oder negativ ist.

§. **695.** 2) Aus dem Gesagten folgt endlich von selbst, dass y, je nach Beschaffenheit dieser Function, mehrere Maxima oder Minima, oder auch beides zugleich haben, und dass man daher unter diesen relativen, das absolute Maximum oder Minimum unterscheiden könne.

Ist z. B. $y = f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve $MBCDE$
Fig. 79. FGQ (Fig. 79), wobei AX die Abscissenaxe und A den Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten bezeichnet; so erhält die Ordinate y offenbar unter den positiven Ordinaten in den Puncten B und D, d. i. für $x = Ab$ und $x = Ad$ grösste, in C aber, oder für $x = Ac$ einen kleinsten Werth; unter den negativen Ordinaten aber erreicht y in den Puncten E und G, nämlich für $x = Ae$ und $x = Ag$ grösste, und in F für $x = Af$ einen kleinsten Werth, welche letztern jedoch, auf positive Werthe bezogen, beziehungsweise kleinste und einen grössten Werth darstellen, so dass also diese Function $y = f(x)$ eigentlich 3 Maxima und 3 Minima besitzt, von denen $y = dD$ für $x = Ad$ das absolute Maximum, und $y = gG$ für $x = Ag$ das absolute Minimum vorstellt.

§. **696.** Da nun (§. 633, Schluss der Anmerk. 1.) die Function $f(x)$ zunimmt oder im Wachsen begriffen ist, wenn bei einer steten Zunahme von x innerhalb eines gewissen Intervalles die derivirte Function $f'(x)$ fortwährend positiv bleibt, dagegen abnimmt, wenn dabei $f'(x)$ negativ ist; so folgt, dass die Function $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben kann, wenn bei der stetigen Zunahme von x die derivirte Function $f'(x)$ fortwährend dasselbe Zeichen beibehält.

Aendert dagegen $f'(x)$ das Zeichen, sobald bei dieser steten Zunahme x einen gewissen Werth a erreicht und überschreitet, so wird $f(x)$ für diesen Werth von $x = a$ ein Maximum, wenn $f'(x)$ vom Positiven zum Negativen, dagegen ein Minimum, wenn $f'(x)$ vom Negativen ins Positive übergeht. Nun kann aber die derivirte Function $f'(x)$ ihr Zeichen nur dann ändern, wenn diese (dabei stetig bleibend) durch Null, oder (discontinuirlich werdend) durch Unendlich geht. Es sind daher jene Werthe von x, welche $f(x)$ (ohne dass diese Function aufhört reell oder continuirlich zu bleiben) zu einem Maximum oder Minimum

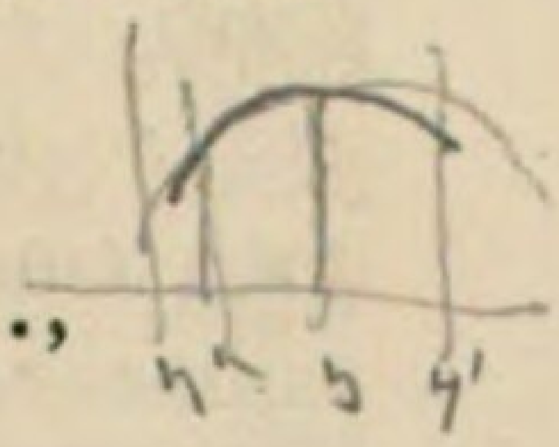
machen, bloss jene, für welche die derivirte Function $f'(x)$, bei Aenderung ihres Zeichens, Null oder Unendlich wird.

Für gewöhnlich jedoch entspricht das Maximum oder Minimum der Function $f(x)$ solchen Werthen von x, für welche die derivirte Function $f'(x)$ ihr Zeichen beim Durchgange durch Null ändert und dabei endlich und continuirlich bleibt. In diesem Falle lassen sich dann die Bedingungen für das Maximum und Minimum am bequemsten mit Hilfe der Taylor'schen Reihe auffinden, wie aus den nachstehenden Paragraphen erhellet.

§. **697**. Um nämlich in diesem Falle ein bequemes Verfahren aufzufinden, nach welchem man bestimmen kann, ob die Function $y = f(x)$ grösste oder kleinste Werthe, und zwar für welche Werthe von x, besitze, sei $x = a$ ein solcher Werth der Variablen, für welchen, wenn es überhaupt möglich, y ein Maximum oder Minimum wird, so, dass also (§. 694)

$$y' = f\left(\underset{a}{x} + h\right) \quad \text{und} \quad y'' = f\left(\underset{a}{x} - h\right)$$

die Nachbarwerthe dieses grössten oder kleinsten Werthes $y = f\left(\underset{a}{x}\right)$ sind. Nun hat man nach dem Taylor'schen Satze, wenn gleich y beiderseits abgezogen wird:



$$(1) \quad y' - y = + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

$$(2) \quad y'' - y = - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

wobei in den sämmtlichen Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist. Diese beiden Differenzen (1) und (2) müssen aber (§. 694) bei den kleinsten Werthen von h gleichzeitig negativ oder positiv, also immer von einerlei Zeichen sein, je nachdem für diesen Werth von $x = a$, y ein Maximum oder Minimum ist. Da nun aber (§. 151) bei diesen kleinsten Werthen von h in beiden Reihen das erste Glied grösser als die Summe aller nachfolgenden wird, also die Zeichen dieser Reihen mit jenem dieses ersten Gliedes $\frac{dy}{dx} h$ übereinstimmen; so erhalten diese Differenzen, wenn nicht

etwa für $x=a$ der Quotient $\frac{dy}{dx}=0$ wird, verschiedene Zeichen, und y kann daher bei diesem Werthe von x weder ein Maximum noch ein Minimum sein. Ist dagegen bei diesem Werthe der Quotient $\frac{dy}{dx}=0$, also

$$y'-y=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\ldots \text{ und}$$
$$y''-y=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\ldots;$$

so wird für $x=a$, y ein Maximum oder Minimum, je nachdem bei diesem Werthe der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ausfällt, weil bei den kleinsten Werthen von h dieses zugleich auch die Zeichen der genannten Differenzen (1) und (2) selbst sind.

Sollte aber für diesen Werth von $x=a$ auch $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, also $y'-y=\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\ldots$ und $y''-y=-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\ldots$ werden; so würde vom dritten Quotienten $\frac{d^3y}{dx^3}$ genau das gelten, was vom ersten Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bemerkt worden, d. h. es würde bei diesem Werthe von x die Function y weder ein Maximum noch Minimum sein, wenn nicht für $x=a$ dieser dritte Differentialquotient ebenfalls gleich Null wäre. Wird er aber Null, so findet ein Maximum oder Minimum Statt, je nachdem der folgende Quotient $\frac{d^4y}{dx^4}$ (wie es beim zweiten der Fall war) negativ oder positiv ausfällt, u. s. w.

§. **698.** Es folgt also, diese Schlüsse gehörig fortgesetzt, allgemein, dass die Function y für $x=a$ weder einen grössten noch kleinsten Werth besitzt (mit der seltenen, im zweitfolgenden §. zu bemerkenden Ausnahme), wenn bei diesem Werthe eine gerade Anzahl der auf einander folgenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, . . $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ (oder derivirten Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, . . .) verschwindet, also der

erste nicht Null werdende Quotient von ungerader Ordnung ist; dass hingegen, wenn diese Quotienten in ungerader Anzahl verschwinden, also der erste nicht Null werdende Quotient von gerader Ordnung ist, sofort y für $x=a$ ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem dieser letztgenannte Quotient für diesen Werth von $x=a$ beziehungsweise negativ oder positiv ausfällt.

§. **699.** Hieraus folgt nun weiters von selbst, dass man, um jene Werthe von x aufzufinden, für welche $y=f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, diese Gleichung [oder wenn die Function eine unentwickelte ist, jene $F(x, y)=0$, §. 681] differentiiren, daraus den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmen und gleich Null setzen müsse; findet man dann aus dieser Bedingungsgleichung für die Variable x die Werthe a, a', ..., so wird man diese in den durch weiteres Differentiiren erhaltenen zweiten Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ der Reihe nach substituiren, und auf die Zeichen der Resultate sehen; für jene Werthe nämlich, für welche dieser Quotient negativ oder positiv ausfällt, wird y beziehungsweise ein Maximum oder Minimum; für jene Werthe hingegen, für welche dieser zweite Quotient verschwindet, muss man auf den dritten und vierten Differentialquotienten übergehen, und dafür dasselbe berücksichtigen, was beziehungsweise vom ersten und zweiten Quotienten bemerkt wurde, u s. w.

§. **700.** Zusatz. Da es keineswegs unmöglich ist, dass sich bei dem bestimmten Werth von $x=a$ (§. 665) die benachbarten Werthe $y'=f\left(\underset{a}{x}+h\right)$, $y''=f\left(\underset{a}{x}-h\right)$ nicht, wie doch hier (§. 697) bei Anwendung der Taylor'schen Formel vorausgesetzt worden, in Reihen nach ganzen, positiven Potenzen von h entwickeln lassen, in welchem Falle aber (§. 666) die genannten Differential-Quotienten bei diesem Werthe von $x=a$ Unendlich werden; so muss man der nöthigen Vollständigkeit wegen und in Uebereinstimmung

mit dem im §. 696 Bemerkten (wenn nämlich $\frac{dy}{dx}$ als gebrochene Function erscheint) auch

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ oder } \frac{dx}{dy} = 0$$

setzen und nachsehen, ob sich aus dieser Gleichung Werthe für x ergeben *). Hat man daraus z. B. $x = \alpha$ gefunden, so muss man zur Beurtheilung, ob dieser Werth einem Max. oder Min. von y entspricht, da man nun aus dem zweiten (unendlich werdenden) Quotienten nichts schliessen kann, in $y = f(x)$ sofort $x = \alpha \pm h$ setzen und sehen, ob die Nachbarwerthe $y' = f\binom{x+h}{\alpha}$ und $y'' = f\binom{x-h}{\alpha}$ für hinlänglich kleine Werthe von h gleichzeitig kleiner oder grösser als der Werth $y = f\binom{x}{\alpha}$ ausfallen, woraus man dann beziehungsweise für $x = \alpha$ ein Max. oder Min. hätte.

§. **701.** Beispiele über das Max. und Min. der Functionen.

1) Um zu untersuchen, für welchen Werth von x die Function $y = 12x - 3x^2$ ein Max. oder Min. wird, hat man: $\frac{dy}{dx} = 12 - 6x$, also (§ 699) die Bedingungsgleichung $12 - 6x = 0$, und daraus $x = 2$. Da ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = -6$ negativ ist, so wird für $x = 2$ die Function y ein Max. Und in der That, man hat für $x = 2$ sofort $y = 12$, während für $x = 2 \pm h$ die Nachbarwerthe $y' = y'' = 12 - 3h^2$ gleichzeitig kleiner sind.

2) Für $y = x^2 + 4x + 2$ folgt die Bedingungsgleichung fürs Max. oder Min.: $\frac{dy}{dx} = 2x + 4 = 0$, und daraus $x = -2$; da ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, also positiv ausfällt, so ist y bei diesem Werth von x ein Min. Es ist in der That für $x = -2$ sofort $y = -2$, während für $x = -2 \pm h$, $y' = y'' = -2 + h^2$, also grösser ausfallen.

*) Grund hiezu kann jedoch nur bei entwickelten Irrational- und unentwickelten Functionen, keineswegs aber auch bei entwickelten rationalen Functionen vorhanden sein; weil diese für die nämlichen Werthe von x, wofür $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, ebenfalls Unendlich werden, indem durchs Differentiiren keine neuen Factoren in den Nenner der ursprünglichen ration. Function kommen können.

3) Um zu finden, für welche Werthe von x die Function $y = \frac{x}{1+x^2}$ ein Max. oder Min. wird, hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

Aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x = \pm 1$; da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = +1$ negativ $(= -\frac{4}{8})$, und für $x = -1$ positiv $(= +\frac{4}{8})$ ausfällt, so wird für $x = +1$ sofort $y\,(= \frac{1}{2})$ ein Maximum, und für $x = -1$ $y\,(= -\frac{1}{2})$ ein Minimum.

4) Für $y = \frac{lx}{x}$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-lx}{x^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x-2x(1-lx)}{x^4},$$

ferner aus $\frac{dy}{dx} = 0$ sofort $lx = 1$, d. i. (§. 291) $x = e$, und damit wird $\frac{d^2y}{dx^2}\left(= -\frac{1}{e^3}\right)$ negativ; es ist also $y\left(= \frac{1}{2 \cdot 71828..}\right)$ für $x = e$ ein Max. (Daher auch umgekehrt $\frac{x}{lx}$ dafür ein Min.)

Anmerk. Erhält, wie in diesen letzten Beispielen, der Quotient $\frac{dy}{dx}$ die Bruchform, und ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Z}{N}$, so ist für jene Werthe von x, wofür dieser Quotient verschwindet, auch $Z = 0$, und daher für diese Werthe (wegen $d\frac{Z}{N} = \frac{NdZ - ZdN}{N^2}$) $\frac{d^2y}{dx} = \frac{dZ}{N}$, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dZ}{dx} : N.$$

Durch diese Bemerkung wird die Ermittelung des Zeichens dieses zweiten Quotienten bedeutend erleichtert. So ist für das letzte Beispiel $\frac{dy}{dx} = \frac{1-lx}{x^2}$, also für $lx = 1$, oder $x = e$ (wegen $Z = 1 - lx$, $\frac{dZ}{dx} = \frac{-1}{x}$ und $N = x^2$) sofort $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{e^3}$ negativ.

5) Um zu untersuchen, ob die Function $y = a + \sqrt[3]{(x-b)^2}$ ein Max. oder Min. haben kann, hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-b)}{3\sqrt[3]{(x-b)^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}},$$

so, dass also aus der gewöhnlichen Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ sofort $2 = 0$ würde, was absurd ist. Bevor man aber aus diesem Umstande auf das Nichtvorhandensein eines Max. oder Min. schliessen darf, muss man auch (§. 700) $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x-b} = 0$ setzen, woraus man in der

That $x=b$ und dafür $y=a$, dagegen für $x=b\pm h$ die Nachbarwerthe $y=a+\sqrt[3]{(\pm h)^2}$, d. i. $y'=y''=a+\sqrt[3]{h^2}$, sonach also findet, dass $y(=a)$ für $x=b$ ein Min. wird.

6) Für $y=c\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (Gleichung der Ellipse, in welcher die Abscissenaxe mit der grossen Axe in dem nach abwärts gezählten Abstand $=c$ parallel läuft und die Ordinatenaxe durch den Mittelpunct der Curve geht, §. 463) erhält man

$$\frac{dy}{dx}=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Aus $\frac{dy}{dx}=0$ folgt also $x=0$, und mit diesem Werthe [Anmerk. zu 4)] $\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{b}{a\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\frac{b}{a^2}$; es ist daher für diesen Werth von $x=0$ (die Ordinate) y für das obere Zeichen der gegebenen Gleichung (für den obern Ast) ein Max., und für das untere ein Min. Ferner folgt aus $\frac{dy}{dx}=\infty$ auch noch (wegen $\sqrt{a^2-x^2}=0$) $x=\pm a$; setzt man also, um hiezu die Nachbarwerthe zu entwickeln, $x=\pm a\pm h$; so wird

$$y=c\pm\frac{b}{a}\sqrt{\pm 2ah-h^2},$$

oder für die kleinsten Werthe von h sofort $y=c\pm\frac{b}{a}\sqrt{\pm 2ah}$; woraus sonach folgt, dass y aus dem Reellen in's Imaginäre übergeht, also für $x=\pm a$ weder ein Max. noch Min. Statt finden kann.

Anmerk. Solche Werthe von x, wie diese letztern, wofür also die Function y aus dem reellen in den imaginären Zustand übergeht, heissen Grenzwerthe (hier sind es die den Scheiteln der Ellipse entsprechenden Abscissen).

7) Um zu untersuchen, für welche Werthe von x die Function $y=(2ax-x^2)^{\frac{2}{3}}$ ein Maximum oder Minimum wird, hat man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4(a-x)}{3\sqrt[3]{2ax-x^2}};$$

wird dieser Quotient $\frac{dy}{dx}=0$ gesetzt, so erhält man $x=a$, und damit wird [Anmerkung zu 4)] $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-4}{3\sqrt[3]{2a^2-a^2}}=\frac{-4}{3\sqrt[3]{a^2}}$ negativ, also y für $x=a$ ein Maximum.

Setzt man dagegen (Note zu §. 700) $\frac{dy}{dx}=\infty$, so erhält man auch $2ax-x^2=0$, und daraus $x=0$ und $x=2a$. Für $x=0$ ist auch $x=0$, und die Nachbarwerthe hiezu sind ($x=0\pm h$ gesetzt) $y'=y''=(\pm 2ah-h^2)^{\frac{2}{3}}$, oder für die kleinsten Werthe von h sofort $y'=y''$

$= (\pm 2ah)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4a^2h^2}$, also beide grösser als $y = 0$, folglich ist y für $x = 0$ ein Minimum. — Für $x = 2a$ ist wieder $y = 0$, und da ($x = 2a \pm h$ gesetzt) die Nachbarwerthe $y' = y'' = \sqrt[3]{4a^2h^2}$ wieder gleichzeitig grösser ausfallen, so ist auch dafür y ein Kleinstes.

8) Da man endlich für die Function $y = ax$, $\frac{dy}{dx} = a$ erhält, also weder $\frac{dy}{dx}$, noch $\frac{dx}{dy} = 0$ sein kann; so folgt, dass diese Function für gar keinen Werth von x weder ein Maximum noch ein Minimum werden kann. (Vergl. §. 697 am Schlusse.) [Weitere Beispiele III., 100—109.]

Aufgaben.

§. **702**. Aufgabe. Von zwei in einer bestimmten Entfernung von einander stehenden Lichtern leuchtet das eine n Mal so stark, als das andere. In der Voraussetzung nun, dass die Beleuchtung eines Körpers gerade der Intensität und umgekehrt dem Quadrat der Entfernung der Lichtquelle proportional ist, soll in der Verbindungslinie der beiden Lichter der Punct der schwächsten Beleuchtung bestimmt werden.

Auflösung. Bezeichnet man die Intensitäten beider Lichter durch 1 und n, ihre gegenseitige Entfernung durch 1, den Abstand des gesuchten Punctes vom letztern Lichte durch x, und endlich die Grösse der in diesem Puncte Statt findenden Beleuchtung durch y; so hat man nach der Voraussetzung: $y = \frac{n}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$, und da y ein Minimum werden soll: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2n}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3} = 0$, woraus $x = \frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$ folgt. Da ferner mit diesem Werthe der zweite Differential-Quotient $\left(= \frac{6n}{x^4} + \frac{6}{(1-x)^4}\right)$ positiv ausfällt, so wird dafür y in der That ein Kleinstes.

Für $n = 1$ oder bei gleichen Lichtern wird $x = \frac{1}{2}$, d. h. der Punct der schwächsten Beleuchtung liegt in diesem Falle in der Mitte zwischen beiden Lichtern.

§. **703**. Aufgabe. Einen senkrechten Cylinder von kreisförmiger Basis zu construiren, welcher bei gegebenem

Inhalte die kleinste Oberfläche besitzt, und zwar wenn nebst der Mantelfläche *a*) beide Kreisflächen und *b*) nur eine dieser Flächen hinzugerechnet wird.

Auflösung. *a*) Seien a^3 der Inhalt, x der Halbmesser der Grundfläche, und z die Höhe des Cylinders; so ist dessen Oberfläche im erstern Sinne: $y = 2\pi xz + 2\pi x^2$, oder, da aus $a^3 = x^2\pi z$, (α) $z = \frac{a^3}{\pi x^2}$ folgt, auch $y = \frac{2a^3}{x} + 2\pi x^2$. Da nun y ein Minimum werden soll, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^3}{x^2} + 4\pi x = 0,$$

und daraus $x = \frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{a\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$, wofür auch in der That der zweite Differential-Quotient $\left(= \frac{4a^3}{x^3} + 4\pi\right)$ positiv ausfällt. Es besitzt also, da bei diesem Werthe von x [wie aus (α) folgt] $z = 2x$ wird, der gleichseitige Cylinder bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche (oder bei gegebener Oberfläche den grössten Inhalt).

b) Die Oberfläche im letztern Sinne genommen, ist $y = 2\pi xz + \pi x^2$, oder für z wieder den Werth aus (α) substituirt: $y = \frac{2a^3}{x} + \pi x^2$; es folgt daher aus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{x^2} + 2\pi x = 0$$

sofort $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{a\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}$, für welchen Werth $z = x$ (also die Höhe gleich dem Halbmesser) und der zweite Quotient wieder positiv wird.

Anmerk. In den meisten Fällen kann die Entwickelung des zweiten Differential-Quotienten erspart werden, indem man gewöhnlich aus der Natur der Sache schon entscheiden kann, ob im betreffenden Falle ein Maximum, oder ob ein Minimum möglich ist. So folgt z. B. gleich hier in dieser letzten Aufgabe, dass die Oberfläche wohl ein Minimum, aber kein Maximum werden könne, indem diese zwei Mal, und zwar für $x = 0$ (wofür $z = \infty$) und $x = \infty$ (wofür $z = 0$) Unendlich wird, also zwischen diesen beiden Werthen nothwendig ein Werth von x liegen müsse, für welchen die Oberfläche am kleinsten wird, und von da zu beiden Seiten hin bis ins Unendliche

wächst. [Noch sehr viele andere hieher gehörige Aufgaben: III., 109—130.]

B) Für Functionen *zweier* veränderlichen Grössen.

§. **704**. Um die Werthe für x und y zu finden, für welche die Function $z=f(x, y)$ der beiden von einander unabhängigen Variablen x und y ein Maximum oder Minimum wird, lasse man x in $x+h$ und y in $y+k$ übergehen; so erhält man, $f(x+h, y+k)=Z$ gesetzt (§. 671):

$$(1)\quad Z-z=\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)h+\left(\frac{dz}{dy}\right)k\right]+\ldots,$$

wo fürs erste, da es sich wieder nur, wie in §. 697, um das Zeichen dieser Differenz handelt, das erste Glied der Reihe, welches bei den kleinsten Werthen von h und k hierüber entscheidet, hinreicht.

Soll nun z für $x=a$ und $y=b$ ein Maximum oder Minimum werden, so müssen wieder die benachbarten Werthe, deren es hier vier gibt und dadurch entstehen, dass man h und k positiv und negativ nimmt, und combinirt, im ersten Falle gleichzeitig kleiner, im letztern aber grösser als z sein, oder es müssen, wenn man für diese Werthe von x und y, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)=p'$ setzt, die vier Differenzen:

$$Z-z=ph+p'k,\quad Z'-z=ph-p'k,$$
$$Z''-z=-ph+p'k \text{ und } Z'''-z=-ph-p'k$$

für ein Maximum von z gleichzeitig negativ, und für ein Minimum positiv sein. Es ist aber wieder leicht zu sehen, dass dieses unmöglich ist, wenn bei diesen Werthen von $x=a$ und $y=b$ die partiellen Quotienten p und p' nicht Null werden. Verschwinden sie aber wirklich, so folgt ferner aus (1), wenn man noch für die nämlichen Werthe von x und y die Quotienten $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ durch P, Q und R bezeichnet:

$$(2)\quad Z-z=\tfrac{1}{2}(Ph^2+2\,Qhk+Rk^2)+\ldots,$$

und es wird z ein Maximum oder Minimum sein, je nachdem dieses erste Glied der Reihe (also auch $Z-z$) für die

kleinsten positiven und negativen Werthe von h und k negativ oder positiv ausfällt. Um aber sogleich den Einfluss, welchen der Zeichenwechsel von h und k sonst hervorbringt, zu beseitigen, stellen wir diese Differenz (2) unter folgender Form (indem wir $\frac{Q^2k^2}{2P}$ addiren und subtrahiren) dar:

$$(3)\quad Z-z=\tfrac{1}{2}P\left(h+\frac{Q}{P}k\right)^2+\tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{PR-Q^2}{P}\right),$$

woraus auch noch, wenn man P und R, dann h und k [wodurch, wie man sieht, die Relation (2) ungeändert bleibt] mit einander vertauscht, der Ausdruck folgt:

$$(4)\quad Z-z=\tfrac{1}{2}R\left(k+\frac{Q}{R}h\right)^2+\tfrac{1}{2}h^2\left(\frac{PR-Q^2}{R}\right).$$

Ist nun P negativ und $\frac{PR-Q^2}{P}$ Null oder auch negativ, d. i. (weil der Nenner P negativ) $PR-Q^2$ Null oder positiv; ferner auch R negativ und $\frac{PR-Q^2}{R}$ Null oder negativ, d. i. wieder $PR-Q^2$ Null oder positiv; so ist $Z-z$ [sowohl in (3) als in (4)] negativ und daher z ein Maximum. Sind dagegen bei derselben Voraussetzung von $PR-Q^2$ Null oder positiv, P und R gleichzeitig positiv; so ist $Z-z$ [in (3) und (4)] positiv, also z ein Minimum, d. h. also: die Function z wird für die Werthe von $x=a$, $y=b$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem bei diesen Werthen P und R gleichzeitig *negativ* oder gleichzeitig *positiv* ausfallen, und ausserdem noch in beiden Fällen $PR-Q^2$ *Null* oder *positiv* ist. [III., 133, Note.]

Anmerk. 1. Es ist zwar auch möglich, dass P, Q und R verschwinden, so, dass man also in (1) auf die dritten und höhern Differential-Quotienten übergehen müsste; da es sich indess, wenn bereits aus den beiden Bedingungsgleichungen $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ die Werthe $x=a$, $y=b$ gefunden worden, in der Regel aus der Natur der Sache entscheiden lässt, ob diese Werthe einem Maximum oder Minimum entsprechen, oder wo dieses nicht möglich wäre, jedenfalls die dem Werthe $z=f\begin{pmatrix}x, & y\\ a & b\end{pmatrix}$ entsprechenden vier Nachbarwerthe hierüber Aufschluss geben; so kann man diese fernere, ohnehin sehr complicirte Entwickelung ohne Weiteres fallen lassen. Eben so mag

der denkbare Fall, in welchem einer der partiellen Differential-Quotienten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, und in welchem, ohne dass die vorigen Bedingungen erfüllt werden, gleichwohl ein Max. oder Min. Statt findet, als ganz besonderer, sehr selten vorkommender Ausnahmsfall, hier einfach erwähnt werden.

Anmerk. 2. Analog mit den Schlüssen in §. 696 lassen sich auch hier die Bedingungen für das Max. oder Min. der Function z in folgender Weise entwickeln.

Soll z für $x = a$ und $y = b$ ein Max. oder Min. werden, so muss, nachdem man in $z = f(x, y)$ für y den bestimmten Werth b gesetzt hat, z sofort für $x = a$ ein Max. oder Min., folglich $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ oder $p = 0$, oder ∞ (discontinuirlich) sein.

Eben so muss in $z = f(a + y)$, z für $y = b$ ein Max. oder Min., folglich $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, d. i. $p' = 0$ oder ∞ (discontinuirlich) sein. Hieraus folgt also (ganz analog mit der Bemerk. in §. 700), dass auch hier im Allgemeinen ein Max. oder Min. nicht bloss für $p = 0$ und $p' = 0$, sondern auch noch in folgenden Fällen Statt finden kann:

$$p = 0,\ q = \infty,\quad p = \infty,\ q = 0 \quad \text{und} \quad p = \infty,\ q = \infty.$$

Findet man aus einem oder dem andern dieser drei Systeme reelle Werthe für x und y, so muss man zur Beurtheilung, ob sie einem Maximum oder Minimum von z entsprechen, wieder auf die Nachbarwerthe übergehen (s. das folgende Beispiel).

Beispiel. Um zu untersuchen, für welche Werthe von x und y die Function

$$z = 2x^2 - 2y + 6\sqrt[3]{(12 - x^2)^2} + 3\sqrt[3]{(y - 2)^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird, hat man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 4x\left(\frac{-2 + \sqrt[3]{12 - x^2}}{\sqrt[3]{12 - x^2}}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 2\left(\frac{1 - \sqrt[3]{y - 2}}{\sqrt[3]{y - 2}}\right).$$

I. Aus dem Systeme $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ erhält man nun $x = 0, \pm 2$ und $y = 3$. Um zu sehen, ob diese Werthe ein Maximum oder Minimum geben, hat man:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 4\left(1 - \frac{2}{\sqrt[3]{12 - x^2}}\right) - \frac{16}{3}\,\frac{x^2}{\sqrt[3]{(12 - x^2)^4}},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\tfrac{2}{3}(y - 2)^{-\frac{4}{3}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0;$$

nun wird daraus für $x=0$ und $y=3$ sofort $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=4\left(\frac{-2+\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{12}}\right)$ positiv, und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{2}{3}$ negativ, also findet für diese Werthe weder ein Maximum, noch Minimum Statt. — Dagegen ist für $x=\pm 2$ und $y=3$ sofort $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-\frac{4}{3}$ negativ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{2}{3}$ ebenfalls negativ, demnach geben diese Werthe, da ausserdem dafür

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=-\tfrac{4}{3}.-\tfrac{2}{3}-0=\tfrac{8}{9}$$

positiv ist, ein Maximum ($z=29$).

II. Aus dem Systeme $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\infty$ folgt $x=0, \pm 2$ und $y=2$. Für $x=0$ und $y=2$ wird $z=-4+6\sqrt[3]{144}$, und da für $x=0\pm h$ und $y=2\pm k$ die Nachbarwerthe

$$z'=z''=2h^2-4\mp 2k+6(12-h^2)^{\frac{2}{3}}+3(\pm k)^{\frac{2}{3}},$$

oder für die kleinsten Werthe von h und k (für welche sofort die höhern Potenzen wegfallen)

$$z'=z''=-4+6\sqrt[3]{144}+3\sqrt[3]{k^2},$$

also gleichzeitig grösser ausfallen; so ist für diese Werthe z, und zwar da, wie man sieht, die Aenderung von x keinen Einfluss hat (indem in den letzten Werthen von z' und z'' h nicht mehr vorkommt), für jeden Werth von x (so, als ob x constant wäre) und $y=2$ ein Minimum.

III. Das System $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\infty$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ gibt $x=\pm 2\sqrt{3}$ und $y=3$; dafür ist $z=21$ und (für $x=\pm 2\sqrt{3}\pm h$ und $y=3\pm k$, wenn man zugleich wieder nur die Glieder der niedrigsten Dimension beibehält) $z'=z''=21+12\sqrt{6}\,.\,h^{\frac{2}{3}}$, also, da die Aenderung von y keinen Einfluss hat, (indem in z' und z'' kein k mehr vorkömmt), unabhängig von y (so, als ob y constant wäre) z ein Minimum.

IV. Aus dem letzten Systeme endlich, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\infty$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\infty$, erhält man $x=\pm 2\sqrt{3}$ und $y=2$, und damit $z=20$. Da nun für $x=\pm 2\sqrt{3}\pm h$ und $y=2\pm k$ sofort $z'=z''=20+12\sqrt[3]{6}\,h^{\frac{2}{3}}+3k^{\frac{2}{3}}$ ist, also die Nachbarwerthe beide grösser ausfallen; so ist $z(=20)$ für diese Werthe von $x=\pm 2\sqrt{3}$ und $y=2$ wieder ein Minimum.

Aufgaben.

§. **705**. Aufgabe. Eine Zahl a in drei Theile so zu theilen, dass das Product derselben ein Maximum wird.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Theile durch x, y, $a-(x+y)$ und ihr Product durch z; so sind zufolge der Aufgabe die Werthe für x und y zu bestimmen, für welche $z = xy(a-x-y) = axy - x^2y - xy^2$ ein Maximum wird. — Nach der im vorigen §. abgeleiteten Regel hat man:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y(a-2x-y) = 0 \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x(a-x-2y) = 0,$$

aus welchen beiden Bedingungsgleichungen sofort (da jene $x=0$, $y=0$ unbrauchbar sind) $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{3}$, nämlich folgt, dass die Zahl a in drei gleiche Theile getheilt werden muss, wenn das betreffende Product ein Maximum oder Minimum sein soll. Um aber zu sehen, ob und welches von beiden Statt findet, hat man, auf die zweiten Differential-Quotienten übergehend, und in diese nach der Vorschrift für x und y die gefundenen Werthe setzend: $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -2y$, also $P = -\frac{2a}{3}$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = a - 2x - 2y$, also $Q = -\frac{a}{3}$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -2x$, demnach $R = -\frac{2a}{3}$. Da nun hier P und R negativ, und $PR - Q^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9}$ positiv ist, so ist das Product $z = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$ in der That ein Max.

§. **706**. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, welches bei gegebenem Umfang die grösste Fläche (oder bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang) besitzt.

Auflösung. Seien $2s$ der gegebene Umfang, x die eine, y die zweite, also $2s-(x+y)$ die dritte Seite des Dreiecks; so ist bekanntlich die Fläche desselben (§. 65)

$$z = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}.$$

Da nun z ein Maximum werden soll, so hat man nach der Regel:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{s(s-y)(2s-2x-y)}{2z} = 0,$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{s(s-x)(2s-x-2y)}{2z} = 0,$$

und aus diesen beiden Gleichungen (da $s-x$ und $s-y$ nicht Null sein können) $x=y=\frac{2s}{3}$. Mit diesen Werthen hat man ferner [wegen $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{s^2}{3z}$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=-\frac{s^2}{6z}$ und $z=\frac{1}{9}s^2\sqrt{3}$] $P=-\frac{3}{\sqrt{3}}$, $Q=-\frac{3}{2\sqrt{3}}$ und $R=-\frac{3}{\sqrt{3}}$; also sind P und R negativ, und $PR-Q^2=3-\frac{3}{4}$ positiv, folglich ist dafür z ein Maximum, d. h. unter allen Dreiecken von einerlei Umfang besitzt das gleichseitige die grösste Fläche.

§. **707**. Aufgabe. Die Dimensionen eines rechtwinkeligen parallelepipedischen Gefässes anzugeben, welches bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche, dazu auch den Deckel gerechnet, besitzt.

Auflösung. Seien a^3 der gegebene Inhalt und x, y, u die drei Seiten des Parallelepipedes; so ist dessen Oberfläche: $z=2xy+2xu+2yu$, oder wegen $a^3=xyu$, woraus (α) $u=\frac{a^3}{xy}$ folgt, auch: $z=2\left(xy+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}\right)$. Da nun z ein Minimum werden soll, so muss dafür

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=2\left(y-\frac{a^3}{x^2}\right)=0 \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=2\left(x-\frac{a^3}{y^2}\right)=0$$

Statt finden, woraus sofort $x=y=a$ folgt. Mit diesen Werthen hat man [wegen $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{4a^3}{x^3}$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)=2$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\frac{4a^3}{y^3}$] $P=R=4$ und $Q=2$, also P und R positiv und $PR-Q^2=16-4$ ebenfalls positiv; es ist daher dafür z ein Minimum, d. h. unter allen parallelopipedischen Gefässen besitzt der Würfel bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche, oder bei gegebener Oberfläche den grössten Inhalt.

§. **708**. Aufgabe. Unter allen in eine Kugel eingeschriebenen Parallelopipeden dasjenige zu finden, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Da alle der Kugel eingeschriebenen Parallelopipede rechtwinkelig sind, deren Mittelpuncte mit dem Mittelpunct der Kugel zusammenfallen und deren Diagonalen gleich dem Durchmesser D der Kugel sind; so folgt, dass wenn x, y zwei Seiten des gesuchten Parallelopipedes sind, sofort die dritte $u = \sqrt{D^2 - x^2 - y^2}$ sein muss.

Ist z das Volumen dieses Prisma, also

$$z = xy\sqrt{D^2 - x^2 - y^2},$$

so folgt nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{(D^2 - 2x^2 - y^2)\,y}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{(D^2 - 2y^2 - x^2)\,x}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}},$$

so wie aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$D^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad D^2 - 2y^2 - x^2 = 0$$

sofort $x = y = u = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

Da ferner für diese Werthe $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{4D}{\sqrt{3}}$ und $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{2D}{\sqrt{3}}$, folglich P und R negativ sind und $PR - Q^2 = \frac{16D^2}{3} - \frac{4D^2}{3} = 4D^2$ positiv ist; so ist das grösste eingeschriebene Parallelopiped ein Cubus von der Seite $\frac{D}{\sqrt{3}}$. [Noch mehrere Aufgaben: III, 136—143.]

Anmerk. Die hier entwickelten Sätze verhelfen uns nunmehr auch zu einem einfachen Beweis des im §. 157 aufgestellten Lehrsatzes: dass jede höhere Gleichung, selbst wenn ihre Coefficienten imaginär wären, eine in der Form $p + qi$, wobei i für $\sqrt{-1}$ steht, begriffene Wurzel besitzen müsse.

Setzt man nämlich in der allgemeinen Gleichung [(1), §. 146]

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

in welcher die Coefficienten, sie mögen reell oder imaginär sein, als in der Form $\alpha + \beta i$, wobei α und β (sowie oben p und q) nur reelle Grössen bezeichnen (die auch theilweise Null sein können), enthalten angesehen werden, sofort $x = p + qi$; so erhält man, wenn gehörig entwickelt und geordnet wird, einen Ausdruck von der Form:

$$(m) \quad X = P + Qi,$$

wobei P und Q reelle, von p und q abhängige Grössen bezeichnen.

Es muss nun gezeigt werden, dass immer reelle Werthe für p und q möglich sind, wofür $P = 0$ und $Q = 0$, oder was dasselbe ist, $P^2 + Q^2 = 0$ wird.

Setzt man, um dieses zu beweisen, $P^2 + Q^2 = Z$, so folgt zuerst, dass Z für alle reellen Werthe von p und q nur positive Werthe und im äussersten Falle den Werth Null haben könne, so dass es also nothwendig für p und q reelle Werthe geben müsse, wofür Z ein Minimum wird. Um diese Werthe zu finden, hat man nach der vorigen Regel (§. 704) $\left(\frac{dz}{dp}\right) = 0$ und $\left(\frac{dz}{dq}\right) = 0$ zu setzen, oder wenn man für z den Werth substituirt und wirklich differentiirt (dann mit z abkürzt):

$$P\left(\frac{dP}{dp}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dp}\right) = 0 \quad \text{und} \quad P\left(\frac{dP}{dq}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dq}\right) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun entweder $P = 0$ und $Q = 0$ oder

$$\left(\frac{dP}{dp}\right)\left(\frac{dQ}{dq}\right) - \left(\frac{dP}{dq}\right)\left(\frac{dQ}{dp}\right) = 0.$$

Es ist jedoch, ohne erst in eine weitere, auf die vorigen Regeln gestützte Untersuchung einzugehen, leicht zu sehen, dass diese letztere Gleichung keine Werthe für p und q liefern könne, wofür z ein Minimum wird, indem diese Gleichung nur eine dieser beiden Grössen bestimmt, wenn die andere willkürlich angenommen worden. Legt man nun z. B. der Grösse p unendlich viele, successiv auf einander folgende Werthe p', p'', . . . bei, und bestimmt nach dieser genannten Gleichung die zugehörigen Werthe von $q = q'$, q'', . . ., so müssten diese sämmtlichen Werthe von p', q', p'' q'', . . . eben so vielen, nämlich unendlich vielen Minima von z entsprechen, was absurd ist.

Dagegen überzeugt man sich leicht, dass die beiden Gleichungen

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 0$$

allen Bedingungen eines Minimums für z, den vorigen Regeln gemäss, vollständig entsprechen.

Da es nun gewiss ist, dass es für z einen kleinsten Werth geben muss, und dass ferner diejenigen reellen Werthe von p und q, welche diesem Minimum von z entsprechen, zugleich auch die beiden Grössen P und Q auf Null reduciren; so folgt von selbst [Relat. (m)], dass für die nämlichen Werthe von p und q auch $X = 0$ wird.

Sechstes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Curven.

Methode der Tangenten.

§. **709.** Es sei BMM'' (Fig. 80) irgend eine ebene Curve, AX die Abscissenaxe, A der Ursprung der rechtw. Coordinaten und $y=f(x)$ die Gleichung dieser Curve. Man ziehe zu irgend einem Puncte M derselben die Ordinate MP (wodurch also $AP=x$ und $PM=y$ wird), lasse die Abscisse x um das beliebige Stück $PP'=h$ zunehmen, und ziehe durch P' die Ordinate $P'M'$; so sind $AP'=x+h$ und $P'M'=y'=f(y+h)$ die Coordinaten von M'. Zieht man durch M und M' die Secante SMM', und durch M zu AX die Parallele MQ; so entstehen die beiden ähnlichen Dreiecke $M'MQ$ und MSP, aus welchen $M'Q:MQ=MP:SP$, und daraus die Subsecante $SP=\frac{MP.MQ}{M'Q}$, oder, wegen $MP=y, MQ=PP'=h, M'Q=M'P'-MP=f(x+h)-f(x)$ $=\frac{dy}{dx}h+ph^2+\ldots$ (§. 662) auch, wenn man gleich durch h abkürzt: $SP=\frac{y}{\frac{dy}{dx}+ph+qh^2+\ldots}$ folgt. Fig. 80.

§. **710.** Bei der unendlichen Abnahme von h nähert sich M' unendlich dem Puncte M, und die Secante SMM' ohne Ende der in M errichteten Tangente MT; für $h=0$ geht endlich, da nun beide Puncte M und M' zusammenfallen (§. 430), die erstere vollends in die letztere, also auch die Subsecante in die Subtangente (§. 528) über, und man hat sofort aus dem vorigen Ausdruck:

$$\text{Subtangente } PT=y:\frac{dy}{dx}=y\frac{dx}{dy}.$$

§. **711.** Wird ferner noch in M die Normale (§. 528) MN gezogen, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreieck

TMN sofort $MP^2 = PT . PN$, und daraus $PN = \frac{MP^2}{PT}$, oder wenn man substituirt ($MP = y$ und PT aus dem vorigen Paragraphe), die Subnormale $PN = y\frac{dy}{dx}$.

§. **712.** Weiters ist die

Tangente $MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$

und die

Normale $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$.

Ist z. B. die Curve die gemeine Parabel, so ist ihre Gleichung (§. 480) $y^2 = px$, und dafür $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, folglich (in Uebereinstimmung mit §§. 532 — 334)

$$PT = y\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x, \quad PN = y\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2},$$

$$MT = y\sqrt{1 + \frac{4x}{p}} = \sqrt{px + 4x^2} \text{ und}$$

$$MN = y\sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = \sqrt{px + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

§. **713.** Ist α der Winkel, welchen die Tangente MT mit der Abscissenaxe bildet, so ist

$$(1) \quad tang\,\alpha = \frac{MP}{PT} = y : y\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx}.$$

Lässt man daher x, y für die Coordinaten des Berührungspunctes gelten, und bezeichnet die allgemeinen oder laufenden Coordinaten der Curve durch x', y'; so erhält man für die Gleichung der Tangente (§. 395):

$$(2) \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

also auch für die Gleichung der Normale (§. 400, 2.):

$$(3) \quad y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Anmerk. Der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ ($= tang\,\alpha$) gibt zugleich (wie wir bereits in der Anmerk. 1. zu §. 633 angedeutet haben) Aufschluss über die Natur des Laufes der Curve in der Nähe des Berührungspunctes x, y; indem dieser positiv oder negativ ist, je nachdem
Fig. 80. Fig. 81. die Ordinate PM (Fig. 80) im Zu- oder (Fig. 81) Abnehmen

begriffen, dagegen verschwindet, wenn diese im ersten Falle ihren grössten, und im letztern ihren kleinsten Werth erreicht hat ($p'm'$ Fig. 81); weil der Winkel α beziehungsweise spitz, stumpf oder Null, also im letztern Falle die Tangente $m'n'$ mit der Abscissenaxe parallel ist.

Differential des Bogens und der Fläche.

§. **714.** Um das Differential des Bogens BM der Curve (Fig. 80) zu finden, sei Bog. $BM = s$ und $s = \varphi(x)$; so ist, wegen $PP' = h$ (§. 662): Fig. 80.

$$\text{Bog. } MM' = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{ds}{dx}h + ph^2 + \ldots$$

Für die Sehne des nämlichen Bogens folgt aus dem rechtw. Dreieck MQM':

$$\begin{aligned} MM' &= \sqrt{MQ^2 + M'Q^2} \\ &= \sqrt{\left[h^2 + \left(\frac{dy}{dx}h + p'h^2 + \ldots\right)^2\right]} \\ &= \left[\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)h^2 + Ah^3 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} h + Ph^2 + \ldots; \end{aligned}$$

man hat also, gleich durch h abkürzend:

$$\frac{\text{Sehne } MM'}{\text{Bogen } MM'} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} + Ph + Qh^2 + \ldots}{\frac{ds}{dx} + ph + qh^2 + \ldots}.$$

Bei der unendlichen Abnahme von h nähert sich der Bogen MM' ohne Ende seiner Sehne, also das hier dargestellte Verhältniss ohne Ende der Einheit; für $h = 0$ wird dieses vollends gleich 1, und man hat daraus, wenn unter einem mit $\frac{ds}{dx}$ multiplicirt wird: $\frac{ds}{dx} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; es ist also das Differential des Bogens:

$$(1) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Ist z. B. die gegebene Curve die Ellipse, so ist ihre Gleichung (§. 465) $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

so wie mit diesem Werthe aus der vorigen Formel (1) nach einer einfachen Reduction (und wegen $a^2 - b^2 = c^2$):

$$(m) \quad ds = \frac{dx\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Anmerk. Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) des vorigen und (1) des gegenwärtigen §. ist $ds = dx\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}$, daher

$$Cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}} = 1 : \frac{ds}{dx} = \frac{dx}{ds}.$$

Eben so ist, wenn β den Winkel der Tangente mit der Ordinatenaxe bezeichnet:

$$Cos\,\beta = Sin\,\alpha = \frac{tang\,\alpha}{\sqrt{1 + tang\,\alpha^2}} = \frac{dy}{dx} : \frac{ds}{dx} = \frac{dy}{ds};$$

was Alles auch unmittelbar aus dem Elementar-Dreieck Mmn folgt.

§. **715**. Um das Differential des Flächensegments $ABMP = z$ zu bestimmen, sei $z = f(x)$, wo $f(x)$ eine noch unbestimmte Function von x bezeichnet; so hat man wieder:

$$\text{Segm. } PM' = f(x+h) - f(x) = \frac{dz}{dx}h + ph^2 + \ldots \text{ (§. 662).}$$

Nimmt man ferner statt des Bogens MM' die zugehörige Sehne, so ist

$$\begin{aligned}\text{Trapez } PM' &= \tfrac{1}{2}(MP + M'P')PP' \\ &= \tfrac{1}{2}\left(y + y + \frac{dy}{dx}h + p'h^2 + \ldots\right)h \\ &= yh + Ph^2 + Qh^3 + \ldots;\end{aligned}$$

folglich auch, wenn man gleich wieder mit h abkürzt:

$$\frac{\text{Segm. } PM'}{\text{Trap. } PM'} = \frac{\frac{dz}{dx} + ph + qh^2 + \ldots}{y + Ph + Qh^2 + \ldots}.$$

Da sich nun dieser Quotient bei der unendlichen Abnahme von h wieder ohne Ende der Einheit nähert, und für $h = 0$ vollkommen gleich 1 wird; so hat man daraus, wenn man gleich mit y multiplicirt: $y = \frac{dz}{dx}$, also ist das Differential der Fläche: (2) $dz = y\,dx$.

§. **716**. Um auch noch das Differential des Sectors Fig. 81, a) BAM [Fig. 81, a)] auszudrücken, hat man

$$\begin{aligned}\text{Segm. } AMB &= \text{Dreieck } AMP + \text{Segm. } PMB \\ &= \tfrac{1}{2}xy + \text{Segm. } PMB,\end{aligned}$$

also auch

$$d.\text{Segm.}\,AMB = \tfrac{1}{2}\,dxy + d.\text{Segm.}\,PMB$$
$$= \tfrac{1}{2}x\,dy + \tfrac{1}{2}y\,dx - y\,dx$$

[es ist nämlich $d.\text{Segm.}\,PMB = dz$ aus der Formel (2) und dieses Differential negativ zu nehmen, weil hier, die Abscissen von A gezählt, mit einer Zunahme von x eine Abnahme von z verbunden, also, wenn dx positiv ist, sofort dz negativ sein muss]; es ist also

$$(3)\quad d.\text{Segm.}\,AMB = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Für die Ellipse z. B. ist (siehe das vorige Beispiel) das Flächenelement:

$$(n)\quad dz = y\,dx = \frac{b}{a}\,dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

und vermöge der vorigen Formel (3), nach einer leichten Reduction, für das Element des Sectors:

$$(p)\quad \frac{-ab\,dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Anmerk. Nach der Leibnitz'schen oder der Methode des unendlich Kleinen werden die vorigen Ausdrücke (von §. 710 bis §. 715) ganz kurz und einfach auf folgende Weise gefunden. Lässt man [Fig. 80, a)] die Abscisse $AP = x$ um ihr Differential $Pp = dx$ zunehmen, so wächst die Ordinate $MP = y$ um ihr Differentiale $mn = dy$, der Bogen $BM = s$ um das Element $Mm = ds$ (welches überdiess als eine gerade Linie angesehen wird, die verlängert, zugleich die Tangente MT bildet), und die Fläche des Segments $ABMP = z$ um $Pm = dz$. Da nun das kleine (charakteristische oder Elementar-) Dreieck Mmn jenem MPT ähnlich ist, so hat man Fig. 80, a)

$$MP : PT = mn : Mn \quad \text{oder} \quad y : PT = dy : dx,$$

und daraus $PT = y\dfrac{dx}{dy}$, wie in §. 710, mit welchem Werthe man dann wieder aus den rechtwinkeligen Dreiecken TMN, TMP und PMN, wie oben, ganz einfach PN, MT und MN erhält. — Es ist ferner $Mm = \sqrt{Mn^2 + mn^2}$, d. i. $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, wie in §. 714 (eigentlich muss zuerst bewiesen werden, dass der Unterschied zwischen dem Bogen und der Sehne Mm eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung ist). Ferner ist die Fläche, diese als Trapez angesehen: $Pm = \tfrac{1}{2}(y + y + dy)\,dx = y\,dx = dz$ wie in §. 715 (es ist nämlich das ausgelassene Dreieck Mmn, da es jedenfalls kleiner als das Rechteck nt, dessen Fläche $dx\,dy$ ist, unendlich klein der zweiten Ordnung). — Endlich ist, wenn x, y und x', y' die rechtwinkeligen Coordinaten der Puncte M und m

Fig. 81, a) [Fig. 81, a)] bezeichnen, bekanntlich (und wie auch sehr leicht zu finden):

$$\text{Dreieck } MAm = \tfrac{1}{2}(yx' - xy'),$$

also, wenn Mm das Element des Bogens bezeichnet, wegen $x' = x + dx$ und $y' = y + dy$, sofort:

$$d.AMB = \text{Dreieck } MAm = \tfrac{1}{2}(y\,dx - x\,dy),$$

welcher Ausdruck (da das Segment AMB abnimmt, wenn x zunimmt) negativ genommen, dem obigen genau gleich ist. (Man vergleiche auch §. 633, Anmerk. 2.).

Von den Asymptoten.

§. 717. Besitzt eine ebene Curve Asymptoten, d. i. (§. 474, 7.) gerade Linien, welchen sich die Curve ohne Ende nähert, ohne diese jemals zu erreichen, so lassen sich diese ganz einfach auf folgende Weise finden.

Es seien (1) $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve, so wie (2) $y = \alpha x + \beta$ jene einer der etwa vorhandenen Asymptoten, von welcher wir jedoch zuerst annehmen wollen, dass sie mit der Axe der y nicht parallel ist; so geht die derselben Abscisse x entsprechende Ordinate der Curve offenbar um so mehr in die Ordinate der Asymptote über, je grösser x wird, so dass man die erstere unter der Form $y = \alpha x + \beta \pm \omega$ darstellen kann, wobei ω eine Grösse bezeichnet, welche für $x = \pm \infty$ verschwindet.

Nun folgt aber aus dieser letztern Gleichung:

$$\alpha = \frac{y}{x} - \frac{\beta}{x} \mp \frac{\omega}{x},$$

mithin wird, wenn man $x = \pm \infty$ setzt und bemerkt, dass wenn etwa β Unendlich wäre, die in unendlich weiter Entfernung liegende Asymptote ohnehin nicht existirt, sofort $\alpha = lim. \frac{y}{x}$.

Man findet sonach den Werth der Constanten α, wenn man in der Gleichung (1) der Curve $\frac{y}{x} = u$ oder $y = ux$ setzt und untersucht, gegen welche Grenze oder Grenzen bei dem unendlichen Wachsen von x die Variable u convergirt. Hat man diese Grenze oder α gefunden, so erhält

man zuerst aus der vorigen Gleichung $\beta = y - \alpha x \mp \omega$, und wenn man $x = \pm\infty$ setzt, sofort

$$\beta = lim.\,(y - \alpha x).$$

Um also auch die zweite Constante β zu bestimmen, wird man in der Gleichung (1) der Curve $y - \alpha x = v$ setzen, und untersuchen, was aus v wird, wenn man $x = \pm\infty$ setzt. Jedem Systeme von zusammengehörigen Werthen von α und β entspricht dann eine Asymptote der gegebenen Curve.

Bei Vertauschung der Variablen x und y gegen einander erhält man durch dieselben Schlüsse offenbar auch jene Asymptoten, welche mit der Axe der x nicht parallel sind.

§. **718.** Zusatz. Da der Quotient $\frac{y}{x}$ für $x = \infty$ im Allgemeinen die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, der wahre Werth aber nach §. 691 gefunden wird, wenn man im Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ $x = \infty$ setzt, so wird auch $\alpha = \frac{dy}{dx}$ und $\beta = y - \frac{dy}{dx}x$, in dieser letztern Gleichung ebenfalls $x = \infty$ gesetzt.

§. **719.** Beispiele.

1. Aus der Gleichung der logarithmischen Linie (III. 228) $y = a^x$ folgt $\alpha = lim.\frac{y}{x} = lim.\frac{a^x}{x}$, und wenn man $x = -\infty$ setzt, sofort $\alpha = 0$; ferner ist mit diesem Werth

 $\beta = lim.(y - \alpha x) = lim. y$ (wegen $\alpha x = 0$) $= lim.\, a^x = a^{-\infty} = 0$.

 Die Gleichung der Asymptote (2) ist demnach $y = 0$, d. h. die logarithmische Linie besitzt die Abscissenaxe als Asymptote, und diese nähert sich der Curve ohne Ende gegen die Seite der negativen x.

2. Aus der Gleichung der Hyperbel (§. 471) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ folgt

 $$\alpha = lim.\frac{y}{x} = lim. \pm\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a} \text{ (für } x = \infty),$$

 und damit

 $$\beta = lim.(y - \alpha x) = lim.\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

 Die obige Gleichung (2) ist demnach $y = \pm\frac{b}{a}x$, woraus sofort folgt,

dass die Hyperbel zwei durch diese Gleichungen $\left(y = +\frac{b}{a}x\right.$ und $\left.y = -\frac{b}{a}x\right)$ bestimmte Asymptoten besitzt. (Vergl. §. 474, 7.)

§. **720.** Mit den Werthen von α und β in §. 718 erhält die Gleichung (2) (§. 717) der Asymptote die Form

$$y' = \frac{dy}{dx}x' + y - \frac{dy}{dx}x,$$

wenn wir nämlich die laufenden Coordinaten zum Unterschiede von jenen x, y (in welchen $x = \infty$ zu setzen ist) durch x', y' bezeichnen. Nun ist aber (§. 713) die Gleichung der Tangente an irgend eine ebene Curve:

$$y' = y + \frac{dy}{dx}x' - \frac{dy}{dx}x,$$

wobei x', y' ebenfalls die laufenden, und x, y die Coordinaten des Berührungspunctes bezeichnen. Die Vergleichung dieser beiden Gleichungen zeigt sonach, dass man die Asymptote als eine Tangente an die Curve ansehen kann, deren Berührungspunct unendlich weit liegt (weil man auch in dieser letztern Gleichung, um sie mit der erstern identisch zu machen, $x = \infty$ setzen muss).

Diese Bemerkung kann in gewissen Fällen das Aufsuchen der Asymptoten erleichtern, indem man nur zu untersuchen braucht, welche Form die Gleichung der Tangente annimmt, wenn man den Berührungspunct unendlich weit hinausrückt.

Am einfachsten ist es aus der Gleichung der Tangente [(12), §. 713] die Durchschnittspuncte T und S dieser Geraden mit der Abscissen- und Ordinatenaxe zu bestimmen, wofür man die Werthe (für $y' = 0$) $-x' = AT = y\frac{dy}{dx} - x$ und (für $x' = 0$) $y' = AS = y - x\frac{dy}{dx}$ erhält, und in diesen Ausdrücken [so wie in der Gleichung der Curve $y = f(x)$] $x = \infty$ zu setzen. Erhalten dadurch diese Segmente die endlichen Werthe AT' und AS', so besitzt die Curve eine durch die Puncte T' und S' gehende Asymptote. Wird dabei AS' endlich, dagegen AT' unendlich, so läuft die durch S' gehende Asymptote mit der Abscissenaxe, dagegen mit der Ordinatenaxe parallel, wenn für $y = \infty$, AT' eine endliche, hingegen AS' eine unendliche Grösse wird.

So erhält man z. B. aus der Gleichung der Linien der zweiten Ordnung (§. 486) $y^2 = px + qx^2$ für die beiden genannten Segmente

$$AT = p : \left(\frac{p}{x} + 2q\right) \quad \text{und} \quad AS = p : 2\sqrt{\frac{p}{x} + q},$$

folglich, wenn man $x = \infty$ setzt (wofür auch $y = \infty$ wird):

$$AT' = \frac{p}{2q} \text{ und } AS' = \frac{p}{2\sqrt{q}}.$$

Aus diesen Ausdrücken folgt nun, dass wenn q Null oder negativ ist (was beziehungsweise, §. 486, für die Parabel und Ellipse gilt), die Curve keine Asymptote besitzt, dass hingegen, wenn q reell und positiv ist (was bei der Hyperbel der Fall), die Curve eine durch T' und S' gehende Asymptote hat. (III. S. 155.)

Kennzeichen, ob eine Curve gegen die Abscissenaxe *concav* oder *convex* sei.

§. **721.** Es seien für einen beliebigen Punct M der Curve BMM'' [Fig. 80, a) und b)] $AP = x$, $PM = y = f(x)$ Fig. 80, a) u. b). die rechtwinkeligen Coordinaten und $PP' = P'P'' = h$ eine beliebige Zunahme der Abscisse, demnach $P'M' = f(x+h)$ und $P''M'' = f(x+2h)$ die entsprechenden Ordinaten. Zieht man durch M und M' die Secante $SMM'O$, und mit AX parallel die Geraden MV, $M'V'$, wodurch (wegen Congruenz der beiden Dreiecke $MM'Q$ und $M'OV'$) $OV' = M'Q$ wird; so ist in Fig. b): $M''O = M''V' - M'Q$, und in Fig. a): $M''O = M'Q - M''V'$, also überhaupt: (r) $M''V' - M'Q = \pm M''O$, je nachdem die Curve in M gegen die Abscissenaxe convex oder concav ist. — Nun ist aber mit Zuhilfenahme der Taylor'schen Reihe:

$$M'Q = P'M' - PM = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \text{ und}$$

$$M''V' = P''M'' - P'M' = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{2} + \ldots,$$

folglich: (m) $M''V' - M'Q = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + p\,h^3 + \ldots$

Da sich aber unsere Untersuchung nur auf die zunächst bei M liegenden Puncte zu erstrecken hat, so kann man h wieder so klein annehmen, dass das Zeichen der Differenz (m), von jenem des 1. Gliedes der Reihe, also (da h^2 immer positiv ist) von dem Zeichen des Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ abhängt; dieses muss also [Relation (r)] für Puncte M oberhalb der Abscissenaxe, oder für positive Ordinaten positiv oder negativ sein, je nachdem die Curve in diesen Puncten gegen diese Axe convex oder concav ist; dagegen

für Puncte der Curve unterhalb dieser Axe oder für negative Ordinaten (wie man durch Verlängerung des Curvenastes $M''MB$, nach abwärts, leicht sieht) gerade umgekehrt in diesen beiden Fällen negativ oder positiv sein; eine Curve ist demnach in irgend einem Puncte gegen die Abscissenaxe convex oder concav, je nachdem der 2. Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ in diesem Puncte mit der entsprechenden Ordinate y dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen besitzt.

Da z. B. aus der Gleichung der Parabel $y^2 = px$ sofort

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}$$

folgt, und dieser Quotient immer das entgegengesetzte Zeichen von y erhält; so beweist dieses, dass die Curve sowohl ober- wie unterhalb der Abscissenaxe gegen diese Axe concav ist. [III., 162.]

Anmerk. An solchen Puncten m (Fig. 80, b) einer Curve, in welchen die Convexität in eine Concavität oder umgekehrt übergeht, und welche Puncte Inflexionspuncte genannt werden, muss offenbar der zweite Differentialquotient sein Zeichen wechseln, wobei derselbe wieder durch Null oder Unendlich gehen kann. Um daher diese merkwürdigen Puncte zu finden, darf man nur jene Werthe von x und y (Ap und pm) bestimmen, für welche $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder $= \infty$ wird. (III., S. 187. Eben so über die Rückkehr-, einfachen und conjugirten Puncte S. 191, 196 und 204.)

Von den berührenden Curven.

§. **722.** Einleitung. Es seien (1) $y = f(x)$ und (2) $y' = \varphi(x')$ die Gleich. zweier Curven QMN und $Q'MN'$
Fig. 83. (Fig. 83), welche einen Punct M, dessen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ sein sollen, mit einander gemein haben.

Lässt man die genannte Abscisse $AP = x$ um ein beliebiges Stück $Pp = h$ zunehmen und zieht die Ordinaten pm, pm'; so ist für die Curve (1):

$$pm = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

so wie für jene (2):

$$pm' = \varphi(x'+h) = y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

folglich die Differenz

$$mm' = pm - pm' = (y - y') + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy'}{dx'}\right)\right] h + \ldots;$$

und es folgt sogleich, dass diese beiden Curven im Puncte M um so näher zusammenfallen, oder sich hier um so inniger berühren werden, je mehr correspondirende Glieder dieser beiden letzten Reihen von vorne herein, bei den kleinsten Werthen von h, einander gleich sind.

§. **723**. Erklärung. Findet demnach ausser der Bedingung von $x' = x$, wodurch auch $y' = y$ wird, noch jene: $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ für diesen Punct M Statt (wornach sie also in diesem Puncte eine gemeinschaftliche Tangente haben); so sagt man, die beiden Curven (1) und (2) berühren sich in diesem Puncte nach der ersten Ordnung [sie haben zwei unendlich nahe liegende Puncte (x, y), $(x + dx,\ y + dy)$ gemein]. Besteht überdiess noch die Gleichung $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, so heisst die Berührung eine der zweiten Ordnung [beide Curven haben drei unendlich nahe liegende Puncte (x, y), $(x + dx,\ y + dy)$, $(x + 2dx,\ y + 2dy + d^2y)$ gemein], und allgemein sagt man, dass zwischen den beiden Curven in M eine Berührung der n. Ordnung bestehe, wenn für diesen Punct die correspondirenden Differential-Quotienten bis einschliessig zu jenem der n. Ordnung wechselweise einander gleich sind.

§. **724**. Besteht aber im Puncte M zwischen den beiden Curven (1) und (2) eine Berührung der n. Ordnung, so kann keine dritte Curve, wenn sie nicht mit jener (1) eine Berührung von einer wenigstens eben so hohen Ordnung besitzt, zwischen den beiden erstern Curven durchgehen. Denn sei $Y = F(X)$ die Gleichung einer dritten Curve, welche in M die Curve (1) bloss in der m. Ordnung berührt, und wobei $m < n$ sein soll; so bestehen nach dem vorigen §. die Gleichungen:

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^n y'}{dx'^n} = \frac{d^n y}{dx^n},\ \text{ferner}$$

$$Y = y,\ \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^m Y}{dX^m} = \frac{d^m y}{dx^m},$$

(man sieht von selbst, dass hier $X = x' = x$ ist), und es ist,

wie oben, für diese dritte Curve:

$$pm'' = F(X+h) = Y + \frac{dY}{dX}h + \frac{d^2Y}{dX^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Mit Rücksicht auf die vorigen Relationen hat man daher:

$$pm - pm' = \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}}\right)\frac{h^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)} + \ldots (\alpha) \text{ und}$$

$$pm - pm'' = \left(\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} - \frac{d^{m+1}Y}{dX^{m+1}}\right)\frac{h^{m+1}}{2.3\ldots(m+1)} + \ldots,$$

wobei wieder rechts der Gleichheitszeichen für die kleinsten Werthe von h nur das erste Glied der Reihe zu berücksichtigen kommt. Da aber (wegen $n+1 > m+1$) in dem erstern dieser beiden Ausdrücke h in einer höhern Potenz als im letztern vorkommt; so folgt, dass bei den kleinsten Werthen von h,

$$pm - pm' < pm - pm'', \text{ d. i. } mm' < mm''$$

sei, und daher die dritte Curve nicht zwischen den beiden erstern durchgehen könne.

Wollte man die Grenzmethode anwenden, so würde

$$\frac{mm'}{mm''} = \frac{D}{D'}\frac{h^{n-m}}{(m+2)(m+3)\ldots(n+1)},$$

wenn man nämlich die eingeklammerten Differenzen der Differential-Quotienten mit D und D' bezeichnet und sogleich die mit h zugleich gegen Null convergirenden Reste R und R' der beiden Reihen weglässt; und hieraus folgt, dass für die kleinsten Werthe von h auch das Verhältniss $\frac{mm'}{mm''}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, oder dafür $\lim.\frac{mm'}{mm''} = 0$ ist.

Anmerk. Besitzen die beiden Curven $y = f(x)$ und $y' = \varphi(x')$ im Puncte M eine Berührung der n. Ordnung, und ist n gerad, so ändert die Differenz $pm - pm'$, wie die vorige Reihe (α) zeigt, ihr Zeichen zugleich mit h, weil dann $n+1$ ungerad ist; in diesem Falle liegt daher (wie in Fig. 83) von der Curve QMm der Theil rechts vom Berührungspunct M oberhalb der Curve $Q'Mm'$, wenn jener Theil links unterhalb derselben liegt, und umgekehrt, so dass sich also die beiden Curven im Puncte M durchkreuzen. Ist dagegen n ungerad, folglich $n+1$ gerad, so ändert die genannte Differenz $pm - pm'$ für die kleinsten Werthe von h das Zeichen nicht mit h, folglich findet in diesem Falle in der Nähe des Berührungspunctes M kein solches Durchkreuzen Statt, wie z. B. bei der Berührung einer Curve mit einer Geraden (als Berührung er-

ster Ordnung. Nur in einem Inflexionspunct entsteht eine Berührung der 2. Ordnung, und die Tangente durchschneidet die Curve).

§. **725**. Es sei nun die Curve (1) [$y = f(x)$] vollständig, dagegen jene (2) [$y' = \varphi(x')$] bloss der Gattung nach gegeben, so, dass die in der Gleichung $y' = \varphi(x')$ vorkommenden constanten Grössen (wie z. B. in der Gleichung der Geraden $y = ax + b$, jene a und b), deren Anzahl wir allgemein gleich n setzen wollen, noch unbestimmt sind. Bestimmt man diese aber aus den Bedingungsgleichungen $y' = y$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ [wobei die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ aus der Gleichung $y = f(x)$ der gegebenen Curve zu entwickeln sind]; so wird diese letztere Curve, je nachdem man dazu die 2, 3, ... n ersten dieser Gleichungen in Rechnung bringt, mit der erstern, im Puncte $M(x, y)$ beziehungsweise eine Berührung der ersten, zweiten, ... $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung [über welche hinaus aber bei n Constanten der Gleichung (2), die Berührung nicht gesteigert werden kann] eingehen.

§. **726**. Beispiele hierüber.

1. Es sei die Curve (2) eine gerade Linie, also (α) $y' = ax' + b$ [$y' = \varphi(x')$] ihre Gleichung; da hier bloss zwei constante, unbestimmte Grössen vorkommen, so kann auch diese Linie oder die Gerade mit irgend einer Curve $y = f(x)$ nur eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, wozu also von den vorigen Bedingungsgleichungen die beiden ersten zu erfüllen sind. Da nun aus der gegebenen Gleichung $\frac{dy'}{dx'} = a$ folgt, so hat man nach der ersten der beiden genannten Bedingungsgleichungen ($y' = y$, also auch $x' = x$): $y = ax + b$, und nach der zweiten

$$\left(\text{d. i. } \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}\right) \text{ sofort } a = \frac{dy}{dx};$$

aus welchen beiden Gleichungen aber

$$a = \frac{dy}{dx} \text{ und } b = y - \frac{dy}{dx}x$$

folgt. Diese Werthe oben in (α) substituirt, erhält man für die Gleichung der Geraden, welche die Curve $y = f(x)$ im Puncte x, y berührt: $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$, wobei x', y' die allgemeinen Coordina-

ten bezeichnen, und der Quotient $\frac{dy}{dx}$ aus der gegebenen Gleichung der Curve $y=f(x)$ zu entwickeln ist. [Vergl. 2), §. 713.]

Anmerk. Hier hat man nun wieder einen neuen Weg, um den allgemeinen Ausdruck für die Subtangente, und daraus, wie oben in §. 711 und §. 712, die Subnormale, Tangente und Normale zu finden.
Fig. 80, b). Es ist nämlich [Fig. 80, b)] die Abscisse AT als positiv angesehen:
Fig. a). $PT = AP - AT$ [liegt A zwischen P und T, wie in Fig. a), so ist AT negativ zu nehmen]; nun ist $AP = x$ und AT die Abscisse des Durchschnittspunctes der Tangente mit der Abscissenaxe, also, wenn man in der vorhin gefundenen Gleichung der Tangente $y'=0$ setzt, $x' = AT = x - y\frac{dx}{dy}$ (liegt A zwischen P und T, so ist $-x'$ zu bestimmen), folglich, wenn man substituirt, wie oben §. 710, Subtangente $PT = y\frac{dx}{dy}$.

2. Es sei die Curve (2) ein Kreis, also ihre Gleichung: $(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \varrho^2$, und ihre Differentialgleichung: (m) $(x'-\alpha)\,dx' + (y'-\beta)\,dy' = 0$, woraus $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}$ folgt. Soll der Kreis mit der Curve (1) bloss eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, so erhält man aus den beiden Bedingungsgleichungen $y'=y$ (wodurch auch $x'=x$) und $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, sofort: (1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$ und (2) $-\frac{x-a}{y-\beta} = \frac{dy}{dx}$. Da sich aber aus diesen beiden Gleichungen nicht alle drei unbestimmten Constanten α, β, ϱ bestimmen lassen; so muss es unzählig viele Kreise geben, welche die Curve $y=f(x)$ im Puncte x, y in der ersten Ordnung berühren können. Man erhält in der That aus diesen beiden Gleichungen zur Festsetzung der Lage der Mittelpuncte dieser Kreise:

$$\text{(I)}\quad x-\alpha = \frac{\mp\varrho\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},\quad y-\beta = \frac{\pm\varrho\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

wobei der Halbmesser ϱ gänzlich unbestimmt oder willkürlich ist.

Um den geom. Ort dieser Mittelpuncte zu finden, bemerke man, dass sich die vorige Gleichung (2) auch so darstellen lässt:

$$(2')\quad \beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

und da diess (§. 713) die Gleichung der Normale für den Berührungspunct x, y ist, wobei α, β (welche Grössen auch in der That, sammt ϱ, von einem Berührungspuncte zum andern veränderlich sind) die allgemeinen Coordinaten bezeichnen; so folgt, dass die Mittelpuncte dieser sämmtlichen Kreise, in der durch den Berührungspunct x, y gehenden Normale der Curve $y=f(x)$ liegen, also die in diesem Puncte an

die Curve gezogene Tangente, eine gemeinschaftliche Tangente für alle diese Kreise bildet. [Man gelangt auch zu dieser Gleichung (2'), indem man aus den beiden Gleichungen (I), da der gesuchte Ort der Mittelpuncte vom Halbmesser ϱ unabhängig ist, die Grösse ϱ eliminirt.]

Krümmungskreis.

§. **727.** Unter allen diesen eben erwähnten unzähligen berührenden Kreisen wird jener, welcher mit der Curve (1) eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt, für welchen also ausser den beiden vorigen Bedingungsgleichungen auch noch jene $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ Statt findet, und welcher (§. 723) mit der Curve drei unendlich nahe liegende Puncte gemein hat, die stärkste oder innigste Berührung eingehen. Um diesen Kreis zu finden, hat man ausser den beiden vorigen Gleichungen (1), (2), wenn man die Gleichung (m) (vorig. §.) noch einmal differentiirt und zufolge der erwähnten Bedingungsgleichung die Accente gleich weglässt, noch:

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\, d^2y = 0, \text{ daraus}$$

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

und damit aus Relation (2) des vorigen Paragraphes:

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y};$$

mit diesen Werthen erhält man endlich aus (1):

$$\varrho = \mp \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$$

für den Halbmesser dieses genannten Berührungskreises. Da aber dieser Kreis, welcher unter allen möglichen die Curve $y = f(x)$ im Puncte x, y am innigsten berührt, zugleich die Eigenschaft besitzt, dass seine Krümmung jener der Curve im erwähnten Puncte x, y am nächsten kommt, also diese letztere durch die Krümmung dieses Kreises gleichsam gemessen werden kann; so nennt man diesen nämlichen Kreis auch Krümmungskreis und dessen Halbmesser Krümmungshalbmesser der Curve $y = f(x)$ im Puncte x, y. Der dem Curvenelement ds entsprechende Mittelpunctswinkel dv, wofür also $ds = \varrho\, dv$ oder $\frac{dv}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho}$ ist, heisst Winkel der Contingenz.

Anmerk. Da die Krümmung einer Curve (welche sofort dem Krümmungshalbmesser umgekehrt, also dem Quotienten $\frac{1}{\varrho}$ proportional ist) in jedem Puncte gegen beide Seiten hin verschieden, und zwar gegen die eine Seite grösser, gegen die andere geringer ist, folglich der an diesem Puncte x, y gezogene Krümmungskreis gegen diese beiden Seiten hin beziehungsweise ausser- und innerhalb der Curve liegt; so schneidet und berührt dieser Kreis (übereinstimmend mit der Bemerk. in §. 724) die Curve im Puncte x, y gleichzeitig, d. h. die in diesem Puncte an die Curve gezogene Tangente berührt zugleich auch diesen genannten Kreis.

Alle übrigen die Curve in diesem Puncte x, y berührenden Kreise, deren Mittelpuncte ebenfalls in der durch x, y gehenden Normale liegen, deren Halbmesser jedoch grösser oder kleiner als ϱ sind, liegen zu beiden Seiten dieses Punctes x, y ausser- oder innerhalb der Curve, und entfernen sich sonach in der Nähe des Berührungspunctes von der Curve mehr als der Krümmungskreis, wesshalb dieser auch (nach Huygens) der osculatorische Kreis (*cercle osculateur*) genannt wird; er bildet sonach die Grenze zwischen den Kreisen, welche die Curve zu beiden Seiten des Punctes x, y ausserhalb, und jenen, welche diese Curve innerhalb berühren.

Nur in jenen Puncten schneidet der Krümmungskreis die Curve nicht, in welchen ϱ in ein Maximum oder Minimum übergeht, indem in diesen beiden Fällen dieser Kreis (wie diess z. B. bei der Ellipse an den Endpuncten der kleinen und grossen Axe der Fall) zu beiden Seiten der Curve beziehungsweise ausser- oder innerhalb liegt.

§. **728.** Man hat also für den Krümmungskreis, wenn die im vorigen §. gefundenen Werthe zusammengestellt werden, die Ausdrücke:

$$\text{II)}\begin{cases} x-\alpha=\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right)=\dfrac{dy}{dx}\left\{\dfrac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right\}, \\ y-\beta=-\dfrac{dx^2+dy^2}{d^2y}=-\dfrac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \\ \varrho=\mp\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}=\mp\dfrac{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}. \end{cases}$$

Anmerk. 1. Von diesen doppelten Zeichen hat man zur Bestimmung des absoluten Werthes von ϱ das obere oder untere zu nehmen, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv, nämlich die Curve in der Gegend des Berührungspunctes (§. 721) gegen die Abscissenaxe concav oder convex ist.

Da ferner, wie die zweite dieser drei Gleichungen zeigt, die Differenz zwischen der Ordinate der Berührungspuncte und jener des Mittelpunctes des Berührungskreises $y - \beta$ immer das entgegengesetzte Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ besitzt; so folgt, dass der Mittelpunct des Berührungskreises immer in der Concavität der Curve liegt.

Anmerk. 2. Mit Hilfe der in §. 660 entwickelten Relationen können die vorigen Ausdrücke leicht so umgewandelt werden, dass dafür das hier als constant genommene Differential dx ebenfalls als veränderlich erscheint; so wird z. B. dann der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

[Beispiele: III, 172.]

Von den *Evoluten* der krummen Linien.

§. **729.** Da die Coordinaten des Mittelpunctes α, β des Krümmungskreises für den Punct x, y der Curve $y = f(x)$, so wie dessen Halbmesser ϱ Functionen von x sind; so sind diese drei Grössen (wie bereits in §. 727 bemerkt worden) von einem Punct der Curve zum andern veränderlich. Denkt man sich aber an alle Puncte der Curve die Krümmungskreise gezogen, so liegen die sämmtlichen oder auf einander folgenden Mittelpuncte derselben in einer eigenthümlichen Curve, die wir sofort untersuchen wollen.

§. **730.** Die Gleichungen, aus denen wir (§§. 727, 728) die Werthe von α, β, ϱ gefunden haben, waren:

$$(1)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

$$(2)\quad (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0 \text{ und}$$

$$(3)\quad dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0,$$

von welchen die zweite, wie bereits (§. 726) bemerkt, weil sie auch die Form (α) $\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x)$ annimmt, die Gleichung der Normale MO (Fig. 84) der Curve $y = f(x)$ oder $BM'C$ ist. Fig. 84.

§. **731**. Differentiirt man nun die Gleichungen (1) und (2) in Bezug auf alle darin vorkommenden Grössen, und behandelt dabei y, α, β, ϱ als Functionen von x; so erhält man: $(x-\alpha)\,dx-(x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,dy-(y-\beta)\,d\beta=\varrho\,d\varrho$ und $dx^2-d\alpha\,dx+dy^2-d\beta\,dy+(y-\beta)\,d^2y=0$, oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) und (3):

(4) $(x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,d\beta=-\varrho\,d\varrho$ und

(5) $d\alpha\,dx+d\beta\,dy=0$,

woraus $\frac{dx}{dy}=-\frac{d\beta}{d\alpha}$ folgt, und mit welchem Werthe die obige Gleichung (a) die Form erhält: (6) $y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)$. Diese letztere Gleichung zeigt, dass [§. 713, (2)] die Normale MO (mit welcher der Richtung nach der Krümmungshalbmesser ϱ zusammenfällt) die gesuchte Mittelpunctscurve DOE im Puncte α, β berührt.

§. **732**. Setzt man diesen Werth von $y-\beta$ aus (6) in die Gleichungen (1) und (4), und eliminirt aus den entstehenden beiden Gleichungen $x-\alpha$; so erhält man $d\varrho=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$, und da (§. 714) $\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}=ds$ das Element des Bogens bezeichnet; so ist also das Differential des Krümmungshalbmessers dem Differential des Bogens der gesuchten Mittelpunctscurve gleich. Da aus $d\varrho=ds$ auch, wenn c eine constante Grösse bezeichnet, $d\varrho=d(s+c)$, und daraus $\varrho=s+c$, folglich für einen zweiten Punct $\varrho'=s'+c$, also $\varrho'-\varrho=s'-s$ folgt; so sind die Differenzen des Krümmungshalbmessers den Differenzen der Bögen der gesuchten Curve gleich.

§. **733**. Diese Eigenschaften der beiden letzten §§. nun charakterisiren die gesuchte Mittelpunctscurve DOE hinlänglich. Denkt man sich nämlich einen um die convexe Seite dieser Curve geschlagenen, vollkommen biegsamen undehnbaren Faden nach und nach bis O so abgewickelt, dass er dabei immer straff angespannt bleibt; so wird er (§. 731) die Tangente OM dieser Curve DOE im Puncte O bilden. Liegt dabei der Endpunct des Fadens in der Curve

$y = f(x)$ oder $BM'C$, und schreitet die Abwickelung bis O' fort, wodurch der Faden in O' wieder die Tangente $M'O'$ bildet; so muss, zufolge der Eigenschaft im vorigen §., d. i. wegen $O'M' - OM =$ Bog. OO', der Endpunct des Fadens immer noch in dieser Curve $BM'C$ liegen, so, dass er dieselbe nirgends verlassen, sondern eigentlich durch diese Abwickelung beschrieben hat. — Weil nun auf diese Weise die Curve $y = f(x)$ oder BMC durch Abwickelung oder Evolution entsteht, so wird die Curve der Mittelpuncte DOE die Evolute oder Abgewickelte der Curve $y = f(x)$, diese letztere hingegen, in Bezug auf diese Evolute DOE, die Evolvente oder durch Abwickelung erzeugte genannt. (Von den französischen Geometern werden diese beiden Curven beziehungsweise *développée* und *développante* genannt.)

Anmerk. Da der Mittelpunct des Krümmungskreises zugleich auch der Durchschnitt zweier nächsten Normalen ist [III., 177, Note], so ist die Evolute DOE zugleich auch der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspuncte; was man auch ohne weitere Entwickelung schon daraus ersehen kann, dass der Durchschnittspunct L mit der Curve DOE um so mehr zusammenfällt, je mehr sich die beiden Puncte M und M' einander nähern.

§. **734.** Um endlich die Gleichung der der gegebenen Curve (1) $y = f(x)$ entsprechenden Evolute zu finden, wird man aus dieser Gleichung (1) die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{d^2x}$ ableiten, diese, so wie auch den Werth von y in die Gleichung (2) und (3), §. 730, oder noch einfacher, in die beiden ersten von (II), §. 728, substituiren, und endlich aus den beiden resultirenden Gleichungen, welche sofort nur noch α, β, x enthalten, x eliminiren; dadurch erhält man die Relation zwischen α, β, d. i. die gesuchte Gleichung der Mittelpunctscurve oder Evolute (*développée*).

Beispiel. Um für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, die Evolute zu finden, hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}$; folglich, wenn man diese Werthe, sammt jenem $y = \sqrt{px}$ in die beiden erstern Glei-

chungen (II), §. 728, substituirt: $3x + \frac{p}{2} - \alpha = 0$ und $\frac{4x\sqrt{px}}{p} + \beta = 0$, folglich, wenn man daraus x eliminirt: $\beta^2 = \frac{16}{27p}\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^3$, als Gleichung der Evolute.

Diese Curve besteht also aus zwei gleichen entgegengesetzten Aesten
Fig. 85. $A'D$, $A'D'$ (Fig. 85), die sich ober- und unterhalb der Abscissenaxe (gegen welche die Curve, wie man nach §. 721 findet, convex ist) ins Unendliche erstrecken. Für $\beta = 0$ erhält man aus dieser Gleichung für die Abscisse des Durchschnittspunctes A' der Curve mit der Abscissenaxe: $\alpha = AA' = \frac{1}{2}p$. Nimmt man aber diesen Punct A' zum Ursprung der Coordinaten, setzt demnach in der obigen Gleichung $\alpha + \frac{1}{2}p$ statt α; so erhält man für die Evolute die einfachere Gleichung: $(r)\ \beta^2 = \frac{16}{27p}\alpha^3$; eine Gleichung, welche der cubischen (oder Neil-schen Parabel) angehört.

Es ist leicht zu sehen, dass von der gemeinen oder Apolonischen Parabel der obere und untere Ast, beziehungsweise durch Abwickelung des Fadens, vom untern und obern Ast der cubischen oder Neil'schen Parabel entsteht; dass im Scheitel der Faden die Länge $AA' = \frac{p}{2}$ haben muss, welches, wie man nach §. 728 leicht findet, auch in der That der Werth des Krümmungshalbmessers für diesen Punct der gemeinen Parabel ist.

[Das Capitel über die besondern Puncte der Curven: III, 181—206]

Siebentes Capitel.

Uebertragung mehrerer im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf *Polarcurven.*

§. **735.** Erklärung. So wie bei einer Curve BMC (Fig. 86) auf rechtwinkelige Axen AX, AY bezogen, das Fig. 86.
Stück PT der auf der Ordinate perpendikulär stehenden Geraden AX, zwischen dem Fusspunct der Ordinate und dem Durchschnitt der Tangente Subtangente, und das auf derselben Geraden liegende Stück PN, zwischen dem genannten Fusspunct und Durchschnitt der Normale Subnormale heisst; eben so wird hiemit analog, wenn man die Ordinaten aus einem Puncte A zählt, nämlich die Curve auf Polar-Coordinaten bezieht, und dabei A als Pol, AM als Leitstrahl, der sofort die Stelle der Ordinate bei Parallel-Coordinaten vertritt, annimmt, jenes Stück AT' der durch A auf AM normalen Geraden AX', zwischen dem Pol und Durchschnitt der Tangente sofort Subtangente, und das zwischen Pol und Normale liegende Stück AN', Subnormale genannt. Daraus folgt also, dass bei Polar-Coordinaten die Subtangente und Subnormale keine unveränderliche Lage wie beim Parallel-System besitzen, sondern diese von einem Punct der Curve zum andern variirt.

§. **736.** Um nun die Subtangente und Subnormale für irgend einen Punct M der Polarcurve BMC zu bestimmen, sei $AM = u$ der Leitstrahl und $MAQ = \varphi$ der Drehungswinkel, welcher von der festen Geraden AQ, die mit der Axe AX den gegebenen Winkel $XAQ = \alpha$ bildet, gezählt werden soll, also W. $MAX = \varphi - \alpha$; so ist

$$(l) \quad y = u \sin(\varphi - \alpha) \quad \text{und} \quad x = u \cos(\varphi - \alpha),$$

folglich, wenn man differentiirt und dabei φ als die unabhängige Variable ansieht, von welcher u, x, y abhängen:

$$(m) \begin{cases} dy = u \cos(\varphi - \alpha) d\varphi + \sin(\varphi - \alpha) du, \\ dx = - u \sin(\varphi - \alpha) d\varphi + \cos(\varphi - \alpha) du. \end{cases}$$

§. **737.** So wie aber die auf rechtwinkelige Coordinaten sich beziehende Gleichung einer Curve für Polar-Coordinaten transformirt wird, indem man für x und y die obigen Ausdrücke (l) substituirt, eben so werden die auf rechtwinkelige Coordinaten sich beziehenden Formeln (§§. 710 und 711) $y\frac{dx}{dy}$, $y\frac{dy}{dx}$ der Subtangente PT und Subnormale PN für Polar-Coordinaten umgewandelt, wenn man zuerst die Differentialquotienten nach §. 660 so verändert, wie sie verändert werden müssen, wenn, wie hier, früher bloss y eine Function von x (und diese letztere Grösse die unabhängige Variable) war, jetzt aber sowohl x wie y von einer dritten Variablen (hier φ) abhängen, und dann erst für y, dy, dx die vorigen Werthe aus (l) und (m) substituirt. Da nun (§. 660) der 1. Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ durch die neue Beziehung unverändert bleibt, so hat man nach dieser Substitution:

$$PT = u \sin(\varphi - \alpha) \frac{\cos(\varphi - \alpha)\, du - u \sin(\varphi - \alpha)\, d\varphi}{\sin(\varphi - \alpha)\, du + u \cos(\varphi - \alpha)\, d\varphi},$$

$$PN = u \sin(\varphi - \alpha) \frac{\sin(\varphi - \alpha)\, du + u \cos(\varphi - \alpha)\, d\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)\, du - u \sin(\varphi - \alpha)\, d\varphi}.$$

§. **738.** Nimmt man nun, da die Axe AX beliebig gewählt werden kann, α so an, dass W. $\varphi - \alpha = 90^0$ wird, also AX die Lage AX' erhält, und MP, PT und PN beziehungsweise mit MA, AT' und AN' zusammenfallen: so hat man, da unter dieser Voraussetzung $\cos(\varphi - \alpha) = 0$ und $\sin(\varphi - \alpha) = 1$ wird, für Polar-Coordinaten: die Subtangente (1) $AT' = -u^2\frac{d\varphi}{du}$ und Subnormale (2) $AN' = -\frac{du}{d\varphi}$. Ohne erst die ähnliche Transformation in §. 712 vorzunehmen, findet man jetzt einfacher aus den rechtwinkeligen Dreiecken AMT' und AMN': die Tangente (3) $MT' = u\sqrt{1 + u^2\frac{d\varphi^2}{du^2}}$ und Normale

$$(4)\quad MN' = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}}.$$

§. **739**. Man erhält ferner durch gehörige Substitution in die Formel (1), §. 714, und Reduction, für das Element des Bogens: (5) $ds = d\varphi\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}}$.

Das Flächenelement ist hier, wenn W. $MAm = d\varphi$ ist, sofort der Sector MAm. Nun ist (§. 716):

$$d.BAM = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

folglich, wenn man für x, y, dx, dy wieder die obigen Werthe (aus §. 736) substituirt und reducirt:

(6) Sector MAm = Element der Fläche $= \frac{1}{2}u^2 d\varphi$.

Anmerk. Nach der Methode des unendlich Kleinen erhält man die hier entwickelten Ausdrücke directe auf folgende Art: Denkt man sich aus A als Mittelpunct mit dem Halbmesser $AM = u$ den unendlich kleinen Kreisbogen $Mn = u\,d\varphi$ beschrieben, so kann dieser mit seiner, so wie der Bogen $Mm = ds$ der Curve mit der Sehne Mm verwechselt werden, und da $mn = du$ ist, so hat man aus den ähnlichen Dreiecken Mnm, MAT' und MAN' (ohne Rücksicht auf die Lage) $du : u\,d\varphi = u : AT' = u^2\frac{d\varphi}{du}$ und $u\,d\varphi : du = u : AN' = \frac{du}{d\varphi}$. Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke Mnm selbst folgt $ds = \sqrt{u^2 d\varphi^2 + du^2}$; ferner ist Sector:

$$MAm = \tfrac{1}{2}(u + du)\,u\,d\varphi = \tfrac{1}{2}u^2 d\varphi;$$

Alles wie oben.

§. **740**. Um endlich noch den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser zu erhalten, hat man zuerst aus der betreffenden Formel in (II), §. 728, da man der obigen Bemerkung (in §. 737) gemäss, nach §. 660, statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen muss: $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, sofort $\varrho = \frac{-(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$, wobei alle Differentiale in Bezug auf φ zu nehmen sind. — Die obigen Gleichungen (m) (§. 736) noch einmal differentiirt (wobei $d\varphi$ constant ist), erhält man:

$$d^2y = \sin(\varphi - \alpha)\,d^2u + 2\cos(\varphi - \alpha)\,du\,d\varphi - u\sin(\varphi - \alpha)\,d\varphi^2$$

und

$$d^2x = \cos(\varphi - \alpha)\,d^2u - 2\sin(\varphi - \alpha)\,du\,d\varphi - u\cos(\varphi - \alpha)\,d\varphi^2,$$

mithin

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -u\,d^2u\,d\varphi + u^2 d\varphi^3 + 2\,du^2 d\varphi,$$

und daher, wegen $dx^2 + dy^2 = u^2 d\varphi^2 + du^2$; endlich den Krümmungshalbmesser:

$$(7)\quad \varrho = \frac{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u\frac{d^2u}{d\varphi^2} - 2\frac{du^2}{d\varphi^2} - u^2}.$$

Anmerk. In allen diesen Ausdrücken müssen die Differentialquotienten $\frac{du}{d\varphi}$ und $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ aus der gegebenen Polargleichung der Curve $u = F(\varphi)$ entwickelt werden.

§. **741.** Will man umgekehrt die Polargleichung $u = F(\varphi)$ einer Curve, deren Pol A und Axe AQ ist, für die rechtwinkeligen Coordinatenaxen AX, AY umwandeln; so hat man aus den Gleichungen (l), §. 736:

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{y}{u},\quad \cos(\varphi - \alpha) = \frac{x}{u};$$

woraus man sofort die Werthe für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch x, y, u finden kann. Setzt man sodann diese Werthe, sammt jenem $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ in die gegebene Polargleichung; so erhält man eine Gleichung von der Form $f(x, y) = 0$, als Gleichung der Curve auf die Axen AX, AY bezogen. Ferner ist wegen $tang(\varphi - \alpha) = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{y}{x}$ noch $\varphi = \alpha + arc\,tang\left(\frac{y}{x}\right)$, und wenn man aus den Gleichungen (m) (§. 736) du eliminirt, auch $\cos(\varphi - \alpha)\,dy - \sin(\varphi - \alpha)\,dx = u\,d\varphi$, woraus endlich noch $d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{u^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ folgt. — Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich die sämmtlichen oben für Polarcoordinaten entwickelten Formeln für PT, PN u. s. w. in die correspondirenden für die rechtwinkeligen Coordinatenaxen AX, AY umwandeln.

Soll z. B. das in §. 737 durch Polarcoordinaten ausgedrückte Stück
Fig. 86. PT für rechtwinkelige auf den Axen AX, AY (Fig. 86) gezählten Coordinaten umgewandelt werden; so hat man:

$$PT = u\frac{\frac{y}{u}}{u}\,\frac{\frac{x}{u}du - u\frac{y}{u}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{u^2}\right)}{\frac{y}{u}du + u\frac{x}{u}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{u^2}\right)}$$

$$= y\,\frac{x\,u\,du - x\,y\,dy + y^2dx}{y\,u\,du + x^2dy - x\,y\,dx}.$$

oder, wenn man für $u\,du$ den Werth $x\,dx + y\,dy$ setzt (welcher durch das Differentiiren aus $u^2 = x^2 + y^2$ folgt) und reducirt: $PT = y\,\frac{dx}{dy}$, wie es sein soll.

Sind dagegen die auf der Axe AX', wofür der Winkel $\varphi - \alpha = 90$ ist, liegenden Stücke AT', AN' etc., d. i. die für Polarcurven sogenannte Subtangente, Subnormale etc. gegeben; so werden dafür (wegen $\varphi - \alpha = 90$) die obigen Ausdrücke einfacher, indem man hat $u = y$, also $du = dy$ und $d\varphi = -\frac{dx}{y}$. — So erhält man aus den vorigen Werthen (§. 738) von AT' und AN', sofort auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen, die Subtangente $= -y^2 \times -\frac{dx}{y\,dy} = y\,\frac{dx}{dy}$; die Subnormale:

$$= -dy \times -\frac{y}{dx} = y\,\frac{dy}{dx} \text{ u. s. w.}$$

Achtes Capitel.

Entwickelung einiger *transcendenter* Curven.

Die gemeine *Cycloide* oder *Radlinie*.

Fig. 87. §. **742**. Erklärung. Der Bogen ADB (Fig. 87) der gemeinen Cycloide wird durch einen Punct M des über die Gerade AB (ohne zu gleiten) hinrollenden Kreises MEN während einer Umwälzung desselben beschrieben. Dabei heisst AB die Grundlinie, M der beschreibende Punct, MEN der erzeugende Kreis, der höchste Punct D (in welchem sich der beschreibende Punct nach der halben Wälzung des Kreises befindet) der Scheitel, so wie endlich das durch diesen auf AB gefällte Perpendikel DC die Axe der Cycloide, oder besser, des cycloidischen Bogens ADB, welcher durch diese in zwei symmetrische Theile getheilt wird.

§. **743**. Um eine Gleichung dieser Curve zu erhalten, nehmen wir die Gerade AB zur Abscissenaxe, den Punct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordin., und setzen, wenn zu einem beliebigen Punct M der Curve die Ordinate MP gezogen wird, $AP = x$ und $PM = y$. Zieht man ferner durch diesen Punct M den Erzeugungskreis O, dessen Halbmesser a heissen soll, ferner den Durchmesser EN perpendiculär auf AB, so wie DC mit EN und MG mit AB parallel, und setzt den variablen Winkel $MON = \varphi$; so folgt unmittelbar aus der Erzeugungsart der Cycloide, dass AB dem Umfang des erzeugenden Kreises, und in einer beliebigen Lage O desselben, Bogen $MN = AN$ ist; indem nämlich alle Puncte dieses Bogens MN nach und nach mit allen Puncten dieser Geraden AN in Berührung waren. Es ist also $AN = a\varphi$, $PN = Mp = a \sin\varphi$ und $PM = Np$ $= a(1 - \cos\varphi)$;

$$\text{mithin } x = a(\varphi - \sin\varphi)\ldots(m)$$
$$\text{und } y = a(1 - \cos\varphi)\ldots(n).$$

Obschon jede dieser beiden Gleichungen als Gleichung der Cycloide angesehen werden kann, indem jede diese Curve charakterisirt; so verlangt man doch für gewöhnlich eine Gleichung zwischen x und y dafür, die man erhält, wenn man aus diesen beiden Gleichungen φ eliminirt.

Nun folgt aber aus (n) $\cos\varphi = \frac{a-y}{a}$, also $\varphi = arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right)$ und $\sin\varphi = \frac{\pm\sqrt{2ay - y^2}}{a} \ldots (0)$. Es ist daher endlich zufolge der Gleichung (m) die gesuchte Gleichung der Cycloide:

$$x = a\, arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right) \mp \sqrt{2ay - y^2} \ldots (1),$$

in welcher man das erste Glied auch durch $a\, arc\, sinv\left(\frac{y}{a}\right)$ oder durch $a\, arc\sin\left[\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}\right]$ u. s. w. ersetzen kann (welche Curve sonach, §. 488, eine transcendente, und zwar ihrer vielen merkwürdigen Eigenschaften und ihrer mehrseitigen Anwendung in der Mechanik wegen eine der berühmtesten ist).

Da die Anzahl der fortrollenden Umläufe des erzeugenden Kreises unbegrenzt ist; so besteht die Cycloide eigentlich aus unendlich vielen vollkommen congruenten Bögen wie jener ADB. Um dieses unbegrenzte Fortrollen auszudrücken, muss man sich vorstellen, dass der veränderliche Winkel φ sowohl positiv als negativ sein kann, und dessen absoluter Werth jede beliebige Anzahl von Kreisperipherien überschreiten kann.

Was das doppelte Zeichen vor $\sin\varphi$ in (0) betrifft; so gilt das obere, wenn sich der Punct M auf dem aufsteigenden Bogen AMD befindet, weil dafür $\varphi < \pi$; dagegen das untere, wenn sich M auf den Bogen $DM'B$ bezieht, indem dafür $\varphi > \pi$ ist.

In der Gleichung (1) endlich entspricht jedem Werth von x nur immer einer der unzähligen Werthe von $a\, arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right)$, so wie von den doppelten Zeichen niemals beide zugleich genommen werden dürfen, indem das obere (wie vorhin bemerkt) für den Ast AMD und das untere für jenen $DM'B$ gilt, dieses also bei jedem Uebergang sowohl durch den Scheitel D als Fusspunct eines Bogens wechselt. (Weitere Discussion dieser Curve III, S. 215.)

§. **744**. Die Gleichung (1) differentiirt, erhält man nach einer leichten Reduction, als **Differentialgleichung** dieser Curve: (2) $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$.

Anmerk. Um diese Differentialgleichung für den Fall zu finden, dass man (wie es in der Mechanik gewöhnlich geschieht) die Coordinaten vom Scheitelpunct D aus zählt, und sonach $DG = x$ und $GM = GM' = y$ setzt, darf man in dieser Gleichung (2) bloss $a\pi - y$ statt x, und $2a - x$ statt y setzen; dadurch erhält man

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Aus der vorigen Gleichung (1) würde man durch dieselbe Substitution, wegen $arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right) = arc\,sinv\left(\frac{y}{a}\right)$ und $arc\,sinv\left(2 - \frac{x}{a}\right)$ $= \pi - arc\,sinv\left(\frac{x}{a}\right)$ erhalten:

$$\pm y = a\,arc\,sinv\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2}.$$

§. **745**. Nach den in den §§. 710 — 713 entwickelten Ausdrücken erhält man mittelst der vorigen Gleichung (2) für die Cycloide: **Subtangente** $PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}$, **Subnorm.** $PN = \sqrt{2ay - y^2}$, **Tangente** $MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}}$ und **Normale** $MN = \sqrt{2ay}$; durchaus leicht zu construirende Ausdrücke, aus denen sich zugleich ergibt, dass die Sehne MN die Normale und die verlängerte Sehne EM die Tangente der Curve im Puncte M ist.

Beschreibt man daher über der Geraden DC als Durchmesser den festen Kreis $DmCF$, so werden zu irgend einem Puncte M der Cycloide die Tangente und Normale am einfachsten dadurch construirt, dass man durch diesen Punct MG mit AB parallel zieht, den Durchschnittspunct m mit D und C verbindet, und endlich in M zu mD und mC die Parallelen MT und MN zieht; weil nämlich, wie leicht zu sehen, die Sehnen mD und mC mit jenen ME und MN parallel sind.

§. **746**. Die obige Gleichung (2) (§. 744) noch einmal differentiirt, erhält man, wenn mit dx^2 dividirt wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a}{2ay - y^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

wenn man nämlich für $\frac{dy^2}{dx^2}$ den aus (2) folgenden Werth setzt. (Die Curve ist also, §. 721, gegen die Abscissenaxe concav.) Setzt man diese beiden, für den 1. und 2. Differentialquotienten gefundenen Werthe in den Ausdruck für ϱ, in (II), §. 728; so erhält man noch: Krümmungshalbmesser $\varrho = 2\sqrt{2ay}$; dieser ist also der doppelten Normale gleich.

Man findet ferner nach den beiden ersten Formeln in (II) (§. 728): $\alpha = x \pm 2\sqrt{2ay - y^2}$ und $\beta = -y$ für die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises im Puncte x, y der Cycloide.

§. **747.** Setzt man in der ersten dieser beiden letztern Gleichungen für x den Werth aus der Gleichung (1), §. 743 (wobei man *arc sinv* anstatt *arc cos* nehmen kann), und eliminirt dann aus dieser und der letzten Gleichung $\beta = -y$ die Grösse y; so erhält man (§. 733) als Gleichung der Evolute dieser Curve:

$$\alpha = a \, arc\, sinv \left(\frac{-\beta}{a}\right) \pm \sqrt{-2a\beta - \beta^2};$$

woraus sofort folgt, dass bei dem angenommenen Coordinatensysteme diese Curve nur für negative Ordinaten β besteht. Will man statt diesen $(-\beta = QM'')$ die positiven Ordinaten $\beta' = P'M''$, welche von der im Abstande $CA' = 2a$ mit AB parallel geführten Geraden $A'B'$ gezählt werden, einführen; so muss man $\beta = -(2a - \beta')$, und wenn man überdiess die Abscissen nicht von C', sondern von A' aus zählen will, auch noch $A'C' - \alpha = a\pi - \alpha$ statt α setzen, so, dass wenn man endlich noch berücksichtigt, dass

$$\pi - arc\, sinv \left(2 - \frac{\beta'}{a}\right) = arc\, sinv \left(\frac{\beta'}{a}\right)$$

ist (indem sich die Sinusversus zweier Supplementsbögen immer zum Durchmesser ergänzen), sofort die Gleichung der Evolute der Cycloide in jene:

$$\alpha = a \, arc\, sinv \left(\frac{\beta'}{a}\right) \mp \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$$

übergeht, und offenbar [vergl. (1), §. 743] wieder einer Cycloide vom nämlichen Erzeugungskreis (dessen Halbmesser $= a$) angehört, deren Scheitel im Puncte A liegt.

Anmerk. Man kann auch die Relation der Coordinaten (wie es in den folgenden §§. bei der Epi- und Hypoclycoide geschieht) durch zwei Gleichungen ausdrücken; es ist nämlich $AP = AN - Mp$ und $PM = ON - Op$, d. i. $x = a\varphi - a \sin\varphi$ und $y = a - a\cos\varphi = 2a \sin\frac{1}{2}\varphi^2$ [welches sofort die obigen Gleichungen (m) und (n), §. 743, sind]. Daraus folgt, wenn φ die unabhängige Variable ist, $dx = (a - a\cos\varphi)d\varphi = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi$, $dy = a\sin\varphi\, d\varphi$, $d^2x = a\sin\varphi\, d\varphi^2$ und $d^2y = a\cos\varphi\, d\varphi^2$ mithin nach ganz leichten Reductionen:

$$dx^2 + dy^2 = 4a^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 d\varphi^2 \text{ und}$$
$$dx d^2y - dy d^2x = -2a^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 d\varphi^3.$$

In Bezug auf diese Variable φ ist also die Subtangente $y\frac{dx}{dy} = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \tang\frac{1}{2}\varphi$, Subnormale $y\frac{dy}{dx} = a\sin\varphi$ und Krümmungs-Halbmesser (§. 728, Anmerk. 2):

$$\frac{-(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = 4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

[Die gedehnte und verkürzte Cycloide: III, 219.]

Die Epicycloide.

§. **748.** Erklärung. Wälzt sich der erzeugende Kreis anstatt auf einer Geraden auf der convexen Seite eines zweiten Kreises, des Grundkreises; so beschreibt irgend ein Punct der Peripherie des erstern oder erzeugenden Kreises die Epicycloide.

§. **749.** Um eine Gleichung dieser Curve abzuleiten,
Fig. 88. sei davon AM (Fig. 88) ein Bogen, welcher vom Puncte A des Erzeugungskreises beschrieben wird, während dieser aus der Lage c in jene c', der beschreibende Punct A nach M, also ein Punct a, für welchen Bogen $Aa =$ Bogen Aa' ist, mit dem Grundkreis zur Berührung gelangt. Zieht man die Centrilinien Cc, Cc', aus M und c' auf Cc die Perpendikel MP, $c'd$ und Mm zu Cc parallel; setzt den Halbmesser des Grundkreises $CA = R$, jenen des erzeugenden $Ac = Mc' = r$; den Mittelpunctswinkel $ACa' = \varphi$, jenen $Aca = Mc'a' = \varphi'$, und nimmt endlich $CP = x$ zur Abscisse und

$PM = y$ zur Ordinate des Punctes M; so ist offenbar: $x = CP = Cd + Mm$ und $y = PM = c'd - c'm$. Es folgt aber aus den beiden rechtwinkeligen Dreiecken $Cc'd$ und Mmc' sofort: $c'd = (R+r) \sin\varphi$, $Cd = (R+r)\cos\varphi$ und $Mm = r \sin Mc'm$, $c'm = r \cos Mc'm$, oder wegen W. $Mc'm = \varphi' - (90 - \varphi) = \varphi + \varphi' - 90$, auch $Mm = -r\cos(\varphi + \varphi')$ und $c'm = r \sin(\varphi + \varphi')$, so, dass man, wenn diese Werthe in den vorigen Ausdrücken von x und y substituirt werden, sofort als Gleichungen der Epicycloide erhält:

$$x = (R+r)\cos\varphi - r\cos(\varphi + \varphi'),$$
$$y = (R+r)\sin\varphi - r\sin(\varphi + \varphi'),$$

aus welchen auch mittelst der aus der Natur der Wälzung resultirenden Relation $r\varphi' = R\varphi$ immer einer der beiden Winkel φ oder φ' eliminirt werden kann. [Discussion dieser Curve: III., 222.]

Die Kreisevolvente.

§. **750.** Setzt man bei der vorigen Erzeugungsart $r = \infty$, so geht der erzeugende Kreis in eine Gerade Aa (Fig. 89) Fig. 89.
und die Epicycloide (§. 733) in die Evolvente des Kreises AMA'..., welche durch Abwickelung des Grundkreises entsteht, d. i. in eine Curve über, deren Evolute der Grundkreis C ist. — Um die Gleichungen dieser Curve zu erhalten, folgt aus jenen des vorigen Paragraphes, wenn man entwickelt:

$$x = R\cos\varphi + r\cos\varphi - r\cos\varphi\cos\varphi' + r\sin\varphi\sin\varphi'$$

und

$$y = R\sin\varphi + r\sin\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi' - r\cos\varphi\sin\varphi',$$

wobei noch $r\varphi' = R\varphi$, also für $r = \infty$, $\varphi' = \frac{R\varphi}{r} = 0$, folglich $r\cos\varphi' = r$ und $r\sin\varphi' = R\varphi\frac{\sin\varphi'}{\varphi'} = R\varphi\frac{\sin 0}{0} = R\varphi$ (wegen $\frac{\sin 0}{0} = 1$, §. 688, 2.) ist; man hat demnach als Gleichungen der Kreisevolvente:

$$(a) \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi, \\ y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Die Hypocycloide.

Fig. 90. §. **751.** Da die Hypocycloide durch einen Punct A (Fig. 90) der Peripherie des Erzeugungskreises beschrieben wird, wenn sich dieser Kreis auf der concaven Seite des Grundkreises wälzt; so erhält man mit Beibehaltung der in §. 749 angenommenen Bezeichnung, d. i. für W. $ACa' = \varphi$, W. $Aca =$ W. $Mc'a' = \varphi'$, $CA = R$, $cA = c'a = r$ und (wenn MP und $c'd$ perpendiculär auf CA) $CP = x$, $PM = y$, ganz einfach aus den Gleichungen der Epicycloide, §. 749, indem man nur r negativ zu nehmen braucht, als Gleichungen der Hypocycloide:

$$x = (R - r) \cos \varphi + r \cos (\varphi + \varphi'),$$
$$y = (R - r) \sin \varphi + r \sin (\varphi + \varphi'),$$

aus welchen Gleichungen wieder mittelst der Relation $R\varphi = - r\varphi'$, φ' oder φ eliminirt werden kann.

Anmerk. Interessant und in der Mechanik von Wichtigkeit ist der besondere Fall, in welchem $2r = R$ ist; indem man dafür aus den vorigen Gleichungen wegen $\varphi' = -\frac{R}{r}\varphi = -2\varphi$, sofort

$$x = r \cos \varphi + r \cos (-\varphi) = 2r \cos \varphi \text{ und}$$
$$y = r \sin \varphi + r \sin (-\varphi) = 0$$

erhält, woraus also (§. 394, 6.) folgt, dass in diesem Falle die Hypocycloide in die Abscissenaxe, also in eine durch den Mittelpunct des Grundkreises gehende gerade Linie übergeht. (Ueber Spirallinien und mehrere andere Curven: III, 228 — 248.)

Neuntes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen und der Curven von *doppelter* Krümmung.

Berührungen der krummen Flächen.

§. **752.** Einleitung. Es seien (1) $z=f(x, y)$ und (2) $z'=\varphi(x', y')$ die auf ein und dasselbe Axensystem sich beziehenden Gleichungen zweier krummen Flächen (1) und (2) (§. 600), welche den Punct x, y, z mit einander gemein haben sollen. Lässt man die beiden unabhängigen Variablen x, y in $x+h$, $y+k$ übergehen; so erhält man nach dem erweiterten Taylor'schen Satze (§. 671), wenn man Kürze halber (nach Euler) $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=q$, $\left(\frac{dp}{dx}\right)=r$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right)=s$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)=t$ u. s. w., dann eben so $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)=p'$, u. s. w. setzt, für die entsprechende Ordinate der Fläche (1):

(3) $z_1=z+(ph+qk)+\frac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+\ldots,$

und der Fläche (2):

(4) $z'_1=z'+(p'h+q'k)+\frac{1}{2}(r'h^2+2s'hk+t'k^2)+\ldots$

Der Abstand der beiden entsprechenden, in der nämlichen Ordinate liegenden Puncte beider Flächen, oder der Unterschied d der betreffenden Ordinaten (3) und (4) ist sonach, wegen $z'=z$ (also auch $x'=x$ und $y'=y$):

(5) $d=[(p-p')h+(q-q')k]$
$+\frac{1}{2}[(r-r')h^2+(s-s')2hk+(t-t')k^2]+\ldots,$

und wird um so kleiner, je mehrere Anfangsglieder dieser Reihe bei den kleinsten Werthen von h und k verschwinden.

§. **753.** Erklärung. Ist nun $p-p'=0$ und $q-q'=0$, oder $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right)$, wodurch in der vorigen Reihe (5) die beiden ersten Glieder wegfallen; so sagt man (analog mit §. 723), es finde zwischen den beiden Flächen (1) und (2) im Puncte x, y, z eine Berüh-

rung der ersten Ordnung Statt, und es lässt sich genau eben so, wie in §. 724 nachweisen, dass im Berührungspuncte zwischen diesen beiden Flächen keine dritte durchgehen kann, wenn sie nicht wenigstens auch den beiden (den obigen analogen) Bedingungsgleichungen $p'' = p$ und $q'' = q$ Genüge leistet. — Finden nebst den vorigen beiden Bedingungsgleichungen noch die folgenden Statt: $r' = r$, $s' = s$ und $t' = t$, wodurch in der obigen Differenz (5) auch noch die Glieder der zweiten Ordnung wegfallen; so sagt man, dass die beiden Flächen (1), (2) im Puncte x, y, z eine Berührung der zweiten Ordnung besitzen, u. s. w.

§. **754**. Ist nun wieder (analog mit §. 725) die Fläche (1) vollständig, dagegen jene (2) nur der Gattung nach gegeben, und bestimmt man die in der Gleichung der letztern Fläche vorkommenden unbestimmten Constanten (deren z. B. die Gleichung der Ebene drei besitzt) aus den genannten 2, oder 5 u. s. w. Bedingungsgleichungen, wodurch in der obigen Differenz (5) sofort beziehungsweise 2, 5, 9, ... erste Glieder der Reihe verschwinden; so wird diese Fläche (2) mit jener (1) im Puncte x, y, z respective eine Berührung der ersten, zweiten, dritten, . . . Ordnung eingehen.

Berührungsebene.

§. **755**. Nehmen wir als einfachsten Fall für die Fläche (2) die Ebene, so ist ihre Gleichung (§. 559, Zusatz 2.): $(m)\ z' = Ax' + By' + D$. Zufolge der ersten Bedingung von $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, nach welcher nämlich die Ebene [oder Fläche (2)] mit der Fläche (1) den Punct x, y, z gemein haben soll, hat man $(n)\ z = Ax + By + D$. Da ferner aus (m) $\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = A$ und $\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = B$ folgt, so hat man nach den beiden darauf folgenden Bedingungsgleichungen $(p' = p,\ q' = q)$: $A = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $B = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, wobei diese partiellen Differential-Quotienten aus der gegebenen Gleich. $z = f(x, y)$ der Fläche (1) abzuleiten sind. Mit diesen Werthen und der Gleichung (n) erhält man aus (m) für die

Ebene, welche die Fläche (1) im Puncte x, y, z in der ersten Ordnung berührt, d. i. für die Berührungsebene die Gleichung: (I) $z'-z=\left(\frac{dz}{dx}\right)(x'-x)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(y'-y)$; dabei sind x', y', z' die allgemeinen oder laufenden, und x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes.

Beispiel. Wäre z. B. die gegebene Fläche (1) die Kugel, also (§. 604) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ ihre Gleichung, so würde man daraus $\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}$, und daher nach der vorigen Gleichung (I) für die Gleichung der Berührungsebene an die Kugel:

$$(x-\alpha)(x'-x)+(y-\beta)(y'-y)+(z-\gamma)(z'-z)=0$$

erhalten. [Vergl. §. 605, (m)].

Die Normale.

§. **756**. Erklärung. Das im Berührungspuncte einer krummen Fläche auf die Berührungsebene errichtete Perpendikel heisst Normale, und jede durch diese Gerade gelegte Ebene, Normalebene der Fläche.

§. **757**. Die Gleichungen der durch den Berührungspunct x, y, z gehenden Normallinie sind [§. 574, (m)] von der Form: $[x'-x=a(z'-z),\ y'-y=b(z'-z)]$, und da diese Gerade auf der Ebene (I) (§. 755) perpendiculär stehen soll, so muss (§. 594)

$$a=-\left(\frac{dz}{dx}\right)=-p \quad \text{und} \quad b=-\left(\frac{dz}{dy}\right)=-q$$

sein; folglich hat man für die Gleichungen der Normale:

(g) $[(x'-x)+p(z'-z)=0,\ (y'-y)+q(z'-z)=0]$, wobei wieder x', y', z' die allgemeinen oder laufenden Coordinaten bezeichnen.

Zusatz. Mit Rücksicht auf diese Gleichungen (g) ist der Abstand irgend eines Punctes x'', y'', z'' der Normale vom Berührungspuncte x, y, z (§. 557): $(z-z'')\sqrt{1+p^2+q^2}$; folglich ist auch die Länge der Normale zwischen dem Berührungs- und Durchschnittspuncte derselben mit der coordin. Ebene der xy, wegen $z''=0$, sofort: $z\sqrt{1+p^2+q^2}$. [Ueber die Krümmung der Flächen: III. 262—272.]

Anmerk. Erscheint die Gleichung der krummen Fläche in der impliciten Form $f(x, y, z) = 0$, wobei $z = \varphi(x, y)$ sein soll, so hat man nach §. 683, wenn man auch gleich beziehungsweise mit dx und dy dividirt:

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

woraus sofort

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\left(\frac{df}{dx}\right) : \left(\frac{df}{dz}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\left(\frac{df}{dy}\right) : \left(\frac{df}{dz}\right) \quad \ldots (m)$$

folgt. Werden diese Werthe in der obigen Gleichung (I) der Tangentialebene (§. 755) substituirt und wird zugleich durchaus mit dem Factor $\left(\frac{df}{dz}\right)$ multiplicirt; so erhält man auch als Gleichung dieser Tangentialebene:

$$(\mathrm{I}') \quad \left(\frac{df}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{df}{dy}\right)(y' - y) + \left(\frac{df}{dz}\right)(z' - z) = 0.$$

Auf gleiche Weise erhalten damit die vorigen Gleichungen (g) der Normale, wenn man für p und q die Werthe setzt und reducirt:

$$\frac{x' - x}{z' - z} = \left(\frac{df}{dx}\right) : \left(\frac{df}{dz}\right) \quad \text{und} \quad \frac{y' - y}{z' - z} = \left(\frac{df}{dy}\right) : \left(\frac{df}{dz}\right).$$

Steht nun aber irgend eine Gerade p auf der Ebene

$$(s) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

perpendiculär, und sind $(p.x)$, $(p.y)$, $(p.z)$ die Winkel dieser Geraden p mit den 3 Coordinatenaxen, so ist (§. 589) $\cos(p.x) = \frac{A}{N}$, $\cos(p.y) = \frac{B}{N}$, $\cos(p.z) = \frac{C}{N}$ und $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Soll nun diese Ebene (s) in die obige Tangentialebene (I') übergehen, so muss

$$A = \left(\frac{df}{dx}\right), \quad B = \left(\frac{df}{dy}\right), \quad C = \left(\frac{df}{dz}\right) \quad \text{und}$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$$

gesetzt werden, und es sind dann die Cosinus der Winkel, welche die Normale n mit den Axen der x, y und z bildet, beziehungsweise:

$$\cos(n.x) = \left(\frac{df}{dx}\right) : N, \quad \cos(n.y) = \left(\frac{df}{dy}\right) : N \quad \text{und} \quad \cos(n.z) = \left(\frac{df}{dz}\right) : N.$$

Die Curven von *doppelter* Krümmung.

Das Element der Curve.

§. 758. Das Element einer Curve von doppelter Krümmung ist ganz einfach (§. 557): $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$;

denn dieses ist nichts anderes als der Abstand des Punctes x, y, z von dem unendlich nahe liegenden Puncte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$.

Bei Anwendung der Grenzmethode muss man die Länge einer Curve als die Grenze ansehen, welcher sich der Umfang oder die Länge eines in die Curve eingeschriebenen Polygons, dessen Endpuncte mit den Endpuncten des Bogens zusammenfallen, ohne Ende nähert, wenn die Seitenzahl desselben ohne Ende zu-, also jede Seite ohne Ende oder unbestimmt abnimmt.

Berührungen.

§. **759**. Einleitung. Sind (§. 626)

$$(1)\quad [f(x, y) = 0,\ F(x, z) = 0]$$

die Gleichungen der Curve (1), und

$$(2)\quad [f'(x', y') = 0,\ F'(x', z') = 0]$$

jene der Curve (2), und nimmt man an, dass beide den Punct x, y, z gemein haben, wofür also $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ wird; so erhält man (analog mit §§. 722 und 752), wenn die Variable $x = x'$ (von welcher man y und z als abhängig ansieht) in $x + h$ übergeht, für die der Abscisse $x + h = x' + h$ entsprechenden Ordinaten der Curven (1) und (2) beziehungsweise:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots,$$

$$z_1 = z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots,$$

und

$$y'_1 = y' + \frac{dy'}{dx'} h + \frac{d^2 y'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \ldots,$$

$$z'_1 = z' + \frac{dz'}{dx'} h + \frac{d^2 z'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \ldots$$

Man hat daher, wegen $y' = y$ und $z' = z$ sofort:

$$D = y_1 - y'_1 = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) h + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y'}{dx'^2}\right) \frac{h^2}{2} + \ldots$$

und

$$d = z_1 - z'_1 = \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dz'}{dx'}\right) h + \left(\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z'}{dx'^2}\right) \frac{h^2}{2} + \ldots$$

für die Unterschiede der gleichnamigen Ordinaten beider Curven; welche Gleichungen (für D und d) sich augenscheinlich (vergl. §. 724) auf die Berührungen der Projec-

tionen dieser Curven in den coordin. Ebenen der xy und xz beziehen.

§. **760.** Erklärung. Da nun zwischen den beiden Curven im Raume (1) und (2) im Puncte x, y, z ($= x', y', z'$) eine um so innigere Berührung Statt findet, je inniger sich ihre Projectionen in irgend einer Ebene, also auch in den coordin. Ebenen der xy und xz beziehungsweise im Puncte $x = x'$, $y = y'$ und $x = x'$, $z = z'$ (als Projectionen des Punctes x, y, z auf diese Ebenen) berühren; so sagt man auch hier, dass die beiden Curven im Raume (1), (2) im Puncte x, y, z eine Berührung der n^{ten} Ordnung besitzen, wenn ausser $(x' = x)\, y' = y$, $z' = z$ noch die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^ny'}{dx'^n} = \frac{d^ny}{dx^n}\ \text{und}$$
$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^nz'}{dx'^n} = \frac{d^nz}{dx^n}.$$

§. **761.** Ist daher wieder die Curve (1) vollkommen, dagegen jene (2) bloss der Gattung nach bestimmt, so wird die letztere mit der erstern im Puncte x, y, z eine Berührung der n^{ten} Ordnung eingehen, wenn man die in den Gleichungen (2) enthaltenen unbestimmten constanten Grössen aus den vorigen $2n + 2$ Bedingungsgleichungen bestimmt.

Die Tangente.

§. **762.** Nehmen wir als einfaches Beispiel für die Curve (2) die gerade Linie im Raume, so sind ihre Gleich. (§. 568) $[y' = ax' + \alpha,\ z' = bx' + \beta]$. Um nun die darin enthaltenen 4 unbest. Constanten so zu bestimmen, dass diese Gerade mit der Curve (1) im Puncte x, y, z eine Berührung der ersten Ordnung eingeht, hat man daraus: $\frac{dy'}{dx'} = a$ und $\frac{dz'}{dx'} = b$, folglich nach den vorigen, dieser Ordnung zukommenden Bedingungsgleichungen

$$\left(x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},\ \frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx}\right)$$

sofort:

$$y = ax + \alpha,\quad z = bx + \beta,\quad a = \frac{dy}{dx},\quad b = \frac{dz}{dx},$$

und mit diesen Werthen:

$$y' - y = a(x' - x),\quad z' - z = b(x' - x),\ \text{d. i.}$$

$$(s)\quad \left[y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),\quad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x)\right]$$

als Gleichungen der Tangente der Curve (1) im Puncte x, y, z; dabei sind wieder x', y', z' die allgemeinen oder laufenden Coordinaten, und die Quotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right)$ aus den Gleich. der Curve (1) zu entwickeln. Auch erhält man durch Division aus diesen beiden Gleichungen für die Gleichung der Projection der Tangente auf die dritte Ebene yz sofort $y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z)$, und es zeigen diese Gleichungen, dass die Projection der Tangente auf jede coordinirte Ebene eine Tangente an die Projection der Curve auf dieselbe Ebene ist.

Endlich lassen sich diese drei Gleichungen sehr einfach und symmetrisch unter folgender Form darstellen und zusammenziehen:

$$\frac{dx}{x' - x} = \frac{dy}{y' - y} = \frac{dz}{z' - z} \quad \ldots (t).$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist analog mit den Ausdrücken in §. 714. Anmerk.:

$$Cos\,\alpha = \frac{dx}{ds},\quad Cos\,\beta = \frac{dy}{ds},\quad Cos\,\gamma = \frac{dz}{ds}$$

[wobei, §. 758: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist, was auch aus der bekannten Relation $Cos\,\alpha^2 + Cos\,\beta^2 + Cos\,\gamma^2 = 1$ folgt].

Tangential- und Osculations- oder Berührungsebene.

§. **763.** Erklärung. Geht man von irgend einem Punct m einer Curve von doppelter Krümmung aus und sind m', m'' zwei darauf folgende, einander unendlich nahe liegende weitere Puncte derselben; so heisst jede durch die beiden Puncte m, m' gelegte Ebene, welche sonach durch die in m an die Curve gezogene Tangente geht und eine Berührung der ersten Ordnung besitzt, Tangentialebene; solcher Ebenen sind sonach durch jeden Punct m unendlich viele möglich.

Jene Ebene dagegen, welche durch die drei Puncte m, m', m'' geht, und sonach mit der Curve eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt, wird analog mit dem Osculationskreis (§. 727) Osculations- oder Krümmungsebene genannt.

Dass die Osculationsebene mit der Curve die innigst mögliche Berührung eingeht und keine andere Berührungsebene zwischen dieser und der Curve durchgehen kann, lässt sich auf ähnliche Weise, wie diess (§. 724) bei den sich berührenden Curven geschehen, beweisen.

Sind nämlich $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ die Gleichungen der gegebenen Curve und (§. 560) $z' - z = a(x' - x) + b(y' - y)$ die einer beliebigen Ebene, welche jedoch mit der Curve den Punct x, y, z gemein haben soll (so, dass hier x', y', z' die laufenden Coordinaten bezeichnen); so erhält man, wenn die Abscisse x in $x + h$ übergeht und Kürze halber

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p', \ldots \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q' \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird, für den entsprechenden Punct der Curve:

$$y' = y + ph + p'\frac{h^2}{2} + \ldots \quad \text{und} \quad z' = z + qh + q'\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

so wie für den Punct der Ebene, welcher der Abscisse $x' = x + h$ und Ordinate $y' = y + ph + p'\frac{h^2}{2} + \ldots$ entspricht:

$$z' = z + ah + b\left(ph + p'\frac{h^2}{2} + \ldots\right);$$

die Differenz δ zwischen diesen beiden Ordinaten z' der Curve und Ebene ist daher:

$$\delta = (q - a - bp)\,h + (q' - bp')\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Soll nun die Ebene mit der Curve im Puncte x, y, z eine Berührung der ersten Ordnung besitzen, so muss das erste Glied dieser Differenz δ verschwinden, also $q - a - bp = 0$, d. i. $q = a + bp$. . (α) sein, aus welcher Gleichung sofort folgt, dass diese Ebene durch die im Puncte x, y, z an die Curve gezogene Tangente geht *).

*) Die Gleichungen der Tangente sind nämlich (§. 762) $y' = px'$, $z' = qx'$, und die Gleichung der Ebene ist $z' = ax' + by'$. Soll nun die Tangente in dieser Ebene liegen, so müssen diese drei Gleichungen durch die nämlichen Werthe von x', y', z' befriediget werden; setzt man daher die Werthe von y' und z' aus den beiden erstern Gleichungen in die dritte und kürzt mit x' ab, so erhält man in der That die obige Gleichung (α).

Zugleich folgt auch (wie schon oben bemerkt), dass unendlich viele solcher Tangentialebenen möglich sind, weil sich aus dieser einzigen Gleichung nicht beide unbestimmte Grössen a und b bestimmen lassen.

Verbindet man dagegen mit dieser Gleichung (α) auch noch die folgende $q' - bp' = 0$, wodurch sofort auch noch das folgende Glied in der obigen Differenz δ verschwindet; so erhält man jene, nunmehr vollkommen bestimmte, Ebene, welche mit der Curve im Puncte x, y, z eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt, d. i. die Osculations- oder Berührunsebene, und zwar findet man aus diesen beiden Gleichungen

$$a = \frac{p'q - pq'}{p'} \quad \text{und} \quad b = \frac{q'}{p'} \;.\;.\;.\; (s),$$

womit sofort auch die Gleichung dieser Berührungsebene

$$z' - z = a(x' - x) + b(y' - y) \;.\;.\;.\; (s')$$

gegeben ist, die wir jedoch im folgenden §. noch allgemeiner entwickeln wollen.

§. **764.** Die Gleichung der durch den Punct m oder x, y, z der Curve gehenden Osculationsebene hat, wenn x', y', z' die laufenden Coordinaten derselben sind, die Form (§. 560)

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0 \;.\;.\;.\; (a),$$

wobei X, Y, Z die zu bestimmenden Coefficienten sind.

Nun muss aber nach der Definition dieser Ebene diese Gleichung auch bestehen, wenn man $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ statt x, y, z setzt; thut man diess und zieht die dadurch entstehende Gleichung von der erstern (a) ab, so entsteht die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \;.\;.\;.\; (a').$$

Endlich müssen diese beiden Gleichungen auch bestehen, wenn man statt x, y, z, dx, dy, dz beziehungsweise $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ und $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$ setzt [wobei man also der grösseren Allgemeinheit wegen auch dx als variabel, nämlich (§. 659) x, y, z als Functionen irgend einer unabhängigen Variablen ω ansieht]; dadurch erhält man aber noch die Gleichung:

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0 \;.\;.\;.\; (a'').$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man nun ganz einfach durch Elimination:

$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,\; Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,\; Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x \,..\, (t)$, mit welchen Werthen sofort die Gleichung (a) der Osculationsebene bestimmt ist.

Dieselbe Form nimmt auch die obige Gleichung (s') in §. 763 an, wenn man in den Werthen von a und b [Relat. (s)], um Alles auf eine beliebige unabhängige Variable ω zu beziehen und auch dx als variabel zu nehmen, nach §. 659

$$p' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} \quad \text{und} \quad q' = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx^2} \text{ setzt.}$$

Die Normale.

§. **765.** Die Aufgabe, in irgend einem Puncte x, y, z einer Curve von doppelter Krümmung eine Normale zu ziehen, ist eine unbestimmte, weil sich in diesem Puncte auf die in demselben gezogene Tangente rings herum unzählige Perpendikel errichten lassen. Diese Perpendikel oder Normalen liegen jedoch sämmtlich in einer Ebene, welche Normalebene heisst. — Mit Berücksichtigung der vorigen Gleichungen (s) der Tangente (§. 762) ist sonach (§. 594), wenn man auch gleich mit dz durchaus multiplicirt, die Gleichung der Normalebene:

$$(b) \quad (x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0.$$

Der Krümmungs- oder Osculationskreis.

§. **766.** Auch hier wird (wie in §. 727) jener Kreis, welcher mit der Curve (1) eine Berührung der zweiten Ordnung besitzt, also durch drei auf einander folgende, unendlich nahe liegende Puncte der Curve geht, Krümmungs- oder Osculationskreis, so wie dessen Halbmesser Krümmungshalbmesser genannt.

Da nun aber dieser Kreis für irgend einen Punct m (x, y, z) der Curve zugleich auch durch die unendlich nahe liegenden beiden Puncte m', m'' geht; so liegt er in der betreffenden (nämlich durch dieselben drei Puncte m, m', m'' gehenden) Osculationsebene (§. 763), so wie dessen Mittelpunct im Durchschnitt jener Geraden, welche aus dem Durchschnitt zweier nächsten (durch m und m' gehenden) Normalebenen entsteht, mit dieser Osculationsebene.

Nun erhält man aber aus der vorigen Gleichung (b) der Normalebene jene für die nächste Normalebene, welche nämlich durch einen dem Puncte x, y, z unendlich nahe liegenden Punct der Curve geht, indem man diese Gleichung in Beziehung auf alle darin vorkommenden Variablen differentiirt; dadurch entsteht die Gleichung:

$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z-(dx^2+dy^2+dz^2)=0,$$

oder auch (§. 758)

$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z-ds^2=0\ \ldots\ (b').$$

Für die Durchschnittslinie dieser beiden nächsten Normalebenen bestehen beide Gleichungen (b) und (b') gleichzeitig, so wie die Coordinaten α, β, γ des Durchschnittspunctes dieser Geraden mit der Osculationsebene (als Mittelpunct des Krümmungskreises) den drei Gleichungen (b), (b') und (a) gleichzeitig Genüge leisten müssen.

Ist nun ϱ der Krümmungshalbmesser für die Curve im Puncte x, y, z, so ist (§. 557)

$$\varrho^2=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2\ \ldots\ (d).$$

Sind a, b, c die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser ϱ beziehungsweise mit den drei Axen bildet; so ist

$$\varrho\cos a=\alpha-x,\quad \varrho\cos b=\beta-y,\quad \varrho\cos c=\gamma-z.$$

Die Krümmung der Curve hat in der Krümmungsebene das Mass $\frac{1}{\varrho}$, so wie der Winkel der Contingenz dv (§. 727) aus der Relation $\frac{1}{\varrho}=\frac{dv}{ds}$ bestimmt wird.

§. **767**. Setzt man zur Bestimmung der Coordinaten α, β, γ, so wie des Krümmungshalbmessers ϱ in den vorhin genannten drei Gleichungen (a), (b) und (b') statt x', y', z' sofort α, β, γ und eliminirt daraus die Binome $\alpha-x$ und $\beta-y$; so erhält man für das dritte Binom:

$$\gamma-z=\frac{ds^2(X\,dy-Y\,dx)}{X(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+Y(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+Z(dx\,d^2y-dy\,d^2x)},$$

oder kürzer [Relationen (t) in §. 764]

$$\gamma-z=\frac{ds^2(X\,dy-Y\,dx)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

so wie daraus, durch blosses Vertauschen der Buchstaben:

$$\beta-y=\frac{ds^2(X\,dz-Z\,dx)}{X^2+Y^2+Z^2}\quad\text{und}\quad \alpha-x=\frac{ds^2(Z\,dy-Y\,dz)}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Mit diesen Werthen erhält man ferner aus der Gleich. (d):

$$\varrho = \pm \frac{ds^2 \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)\, ds^2 - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

oder mit Rücksicht auf die obige Gleichung (a'), §. 764, wenn man abkürzt:

$$\varrho = \frac{\pm\, ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \quad \ldots (g),$$

wobei X, Y, Z die oben in §. 764, Relationen (t) angegebenen Werthe haben.

Da $X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)$ ist, so kann der Krümmungshalbmesser auch unter der Form

$$\varrho = \frac{\pm\, ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

oder auch unter jener

$$\varrho = \frac{\pm\, ds}{\sqrt{\left[\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2\right]}}$$

dargestellt werden.

Anmerk. Nimmt man an, dass die durch den Punct x, y, z der Curve gehende Osculationsebene mit der Ebene der xy parallel läuft (was immer möglich ist, weil man die Ebene der xy mit der Osculationsebene parallel annehmen kann), so ist, wegen $z = C$, sofort $dz = 0$ und $d^2z = 0$, folglich $X = 0$ und $Y = 0$, daher

$$\varrho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

und diess ist (§. 728, Anmerk. 2.) der entsprechende Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der Projection unserer Curve auf die Ebene der xy; so wie man auch für $\alpha - x$ und $\beta - y$ Werthe erhält, welche mit den Coordinaten des Mittelpunctes der Krümmung einer ebenen Curve übereinstimmen. Hieraus folgt also, dass der Krümmungshalbmesser für irgend einen Punct einer im Raume gezogenen Curve, sowohl der Grösse als Lage nach, mit dem Krümmungshalbmesser der Projection dieser Curve auf die durch diesen Punct gehenden Osculationsebene zusammenfällt.

Siebenter Abschnitt.

Die Integralrechnung.

Einleitung.

Erklärungen.

§. **768.** Die Integralrechnung ist die der Differentialrechnung entgegengesetzte Rechnungs-Operation, und hat zum Zwecke, aus einem gegebenen Differential-Ausdruck die ursprüngliche Function her- oder zurückzuleiten, aus welcher dieser Ausdruck durchs Differentiiren entstanden ist oder entstehen kann. Diese Operation, das Integriren genannt, wird angedeutet, indem man dem gegebenen Differential-Ausdruck das (Integral-) Zeichen $\int$ vorsetzt, welcher dann (oder eigentlicher die gesuchte Function) das Integral des gegebenen Differential-Ausdruckes heisst. Ist nämlich $X dx$ das Differential der Function $f(x)$, so ist $\int X dx = \int d.f(x) = f(x)$ das Integral von $X dx$, und sofort der ursprünglichen Function $f(x)$ gleich; so ist z. B. x^m das Integral von $m x^{m-1} dx$ oder $\int m x^{m-1} dx = \int d.x^m = x^m$. — Zugleich folgt hieraus, dass sich die beiden entgegengesetzten Operationszeichen $\int$ und d, wo diese zusammen vorkommen, aufheben.

§. **769.** Ist aus der Relation $y = \varphi(x)$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = X$ oder die Differentialgleichung $dy = X dx$ abgeleitet worden, so wird man aus dieser ebenfalls wieder auf die ursprüngliche, zwischen y und x bestehende Relation zurückgeführt, indem man beide Theile der Gleichung integrirt; man hat nämlich: $\int dy = \int X dx$, d. i. $y = \int X dx = \varphi(x)$, und nennt diese Gleichung die Integralglei-

chung oder auch nur das Integral der gegebenen Differentialgleichung $dy = Xdx$.

§. 770. Die ursprüngliche oder gesuchte Function heisst auch in Beziehung auf ihr 2^{tes}, 3^{tes}, ... n^{tes} Differential: das Integral der 2^{ten}, 3^{ten}, ... n^{ten} Ordnung, und es folgt aus der Entstehung der höhern Differentiale (§. 657), dass man aus dem n^{ten} Differentiale die ursprüngliche Function findet, indem man dasselbe n Mal nach einander integrirt, oder dass, wenn $d^n.\varphi(x) = f(x)\,dx^n$ ist, wieder umgekehrt $\varphi(x) = \int^n f(x)\,dx^n$ Statt findet.

§. 771. Der einfachste und leichteste Fall der Integralrechnung ist der, in welchem der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ bloss eine Function von x oder y, oder was dasselbe, wenn entweder $dy = Xdx$ oder $dx = Ydy$ ist; in diesem Falle hat man es nämlich nur mit der Aufsuchung einer Function von einer Variablen, oder mit der Bestimmung des Integrals $\int Xdx$ zu thun.

§. 772. Auf diesen einfachen Fall wird auch die Integration der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ zurückgeführt, wenn entweder P und Q bloss Functionen von x oder y, oder P eine Funct. von x und Q eine Funct. von y, oder umgekehrt ist; denn in diesen Fällen hat man beziehungsweise: $dy = -\frac{P}{Q}dx = Xdx$, $dx = -\frac{Q}{P}dy = Ydy$, $Pdx = -Qdy$, d. i. $Xdx = Ydy$ und $\frac{dx}{Q} = \frac{-dy}{P}$, d. i. wieder $Xdx = Ydy$, so, dass es in allen diesen Fällen nur auf die Integration des einfachen Differential-Ausdruckes Xdx oder Ydy ankommt.

§. 773. Complicirter und schwieriger sind die Fälle, in welchen der genannte Quotient als Function von x und y erscheint, oder in denen man die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$, in welcher P und Q Functionen von x und y zugleich sind, zu integriren hat. — Kommen endlich

vollends auch höhere Differentiale in den zu integrirenden Ausdrücken oder Differentialformeln vor; so erscheint die Integralrechnung vorerst nur als eine Sammlung von Regeln und Kunstgriffen, die nur in wenigen Fällen das leistet, was von ihr gefordert wird, und man gelangt bald zu der Ueberzeugung, dass sich zwar alle Functionen differentiiren, aber bei weitem nicht alle Differential-Ausdrücke oder Gleichungen integriren lassen.

§. **774**. So wie in der Differentialrechnung der Fall, in welchem die Function unmittelbar oder explicit, von jenem unterschieden wurde, in welchem diese noch unentwickelt oder implicit gegeben ist; so erscheinen auch hier in der Integralrechnung zwei solche Fälle, in deren einem der Differentialquotient oder die gesuchte Function unmittelbar durch die unabhängig variablen Grössen, im zweiten aber, dieser Quotient mit den Variablen noch auf irgend eine Art verbunden, in der Gleichung vorkommt.

Wir werden uns in diesem Lehrbuche grösstentheils auf die Integration des einfachsten Falles oder die Bestimmung des Integrals $\int X dx$ beschränken und dabei berücksichtigen, dass X eine algebraische oder transcendente Function von x, und im erstern Falle rational oder irrational, ganz oder gebrochen sein kann.

Erstes Capitel.

Integration des Differential-Ausdrucks $X dx$, *A)* wenn X eine *rationale*, und *B)* wenn X eine *irrationale* algebraische Function von x ist.

Einleitung.

§. **775.** Bei Bestimmung des Integrals $\int X dx$ kann man aus der Differentialrechnung erstens einige der einfachsten Fälle, wie (1) $\int n x^{n-1} dx = x^n$, (2) $\int \frac{dx}{x} = lx \, (= \frac{1}{2} l x^2)$, (3) $\int \frac{dx}{x\, lx} = llx$, (4) $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$, (5) $\int a^x la\, dx = a^x$, (6) $\int e^x dx = e^x$, (7) $\int \cos x\, dx = \sin x$, (8) $\int \sin x\, dx = -\cos x$, (9) $\int \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tang} x$, (10) $\int \frac{dx}{\sin x^2} = -\cot x$, (11) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x^2} = \sec x$, (12) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x^2} = -\operatorname{cosec} x$, (13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x$, (14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, (15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x$, (16) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sinv} x$ (welche Formeln noch weiter zu vermehren nicht räthlich ist) als **Fundamentalformeln**, und zweitens einige, wie die im folgenden §. erwähnten Regeln, als bekannt voraussetzen.

Anmerk. In allen diesen Formeln kann man x eben sowohl als die unabhängige Variable, als auch als Function einer unabhängigen Variablen ansehen. Setzt man z. B. in der Formel (1) $f(x)$ statt x, so wird immer noch $\int n\, [f(x)]^{n-1} d.f(x) = [f(x)]^n$ sein.

§. **776.** So fanden wir (§. 635), dass das Differential einer algebraischen Summe gefunden wird, indem man jedes einzelne Glied differentiirt; es wird also auch umgekehrt eine algebraische Summe von Differentialen integrirt, indem man jedes einzelne Glied integrirt, d. h. es folgt aus $d(x+y-z+) = dx + dy - dz +$, umgekehrt: $\int(dx + dy - dz +) = x + y - z + = \int dx + \int dy + \int -dz +$. Eben so folgt aus der Regel $d.AX = A dX$ auch wieder umgekehrt: $\int A dX = AX = A \int dx$, also die Regel, dass man

die constanten Factoren der zu integrirenden Differential-Ausdrücke gleich vor das Integralzeichen setzen kann.

A) Bestimmung des Integrales $\int X dx$, wenn X eine *rationale* Function von x ist.

a) Für *ganze* Functionen X.

§. 777. Aus $d(ax^n + B) = nax^{n-1}dx$, wo B irgend eine constante Grösse bezeichnet, folgt umgekehrt durch Integration: $ax^n + B = \int nax^{n-1}dx$, oder wenn man $n - 1 = m$, also $n = m + 1$ und $na = A$, d. i. $a = \frac{A}{m+1}$ setzt, auch:

$$\int A x^m dx = A\frac{x^{m+1}}{m+1} + B,$$

welcher Ausdruck sofort die allgemeine (leicht in Worten auszudrückende) Regel für die Integration der algebraischen Monome enthält.

§. 778. Die constante Grösse B, die übrigens, hier bloss auf das Integral bezogen, ganz willkürlich ist, indem man für jeden Werth derselben $d\left(A\frac{x^{m+1}}{m+1} + B\right) = Ax^m dx$ (zum Beweis der richtigen Integration) erhält, und die jedem Integral, wenn es vollständig oder allgemein sein soll, beigefügt werden muss, heisst willkürliche Constante, und wird hier durchaus mit C (*Const.*, *Constans*) bezeichnet. In besondern oder bestimmten Fällen lässt sie sich aus der Natur der Sache immer leicht bestimmen. Wäre z. B. aus der Aufgabe oder der Natur des betreffenden Gegenstandes bekannt, dass das vorige Integral für $x = a$ den Werth b annimmt; so hätte man $b = A\frac{a^{m+1}}{m+1} + B$ und daraus die unbestimmte Constante: $B = b - A\frac{a^{m+1}}{m+1}$; mithin wäre, wenn man diesen Werth substituirt, das bestimmte oder besondere Integral:

$$\int A x^m dx = b + \frac{A}{m+1}(x^{m+1} - a^{m+1}),$$

welches nun auch in der That für $x = a$ gleich b wird.

Sehr häufig ist $b = 0$, d. h. jener Werth der Variablen (z. B. $x = a$) bekannt, für welchen das Integral verschwindet.

Anmerk. Von der im §. 777 abgeleiteten Regel für die Integration algebr. Monome, welche sonst für jeden constanten Exponenten n gilt, ist der einzige Fall von $n = -1$ ausgeschlossen; denn in diesem Falle hätte man $\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0}$, was offenbar zu Nichts führt. Allein man weiss aus der Differentialrechnung, dass

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lx, \text{ oder allgemeiner } \tfrac{1}{2} l x^2$$

ist, und man kann dieses Integral nach der obigen Regel aus dem einfachen Grunde nicht finden, weil es unmöglich ist, die transcendente Grösse lx als eine einzige Potenz von x, d. h. als algebr. Monom darzustellen.

§, 779. Beispiele hierüber:

1) Nach der (§. 777) entwickelten Regel ist $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

2) Eben so ist $\int \frac{3\,dx}{x^2} = 3\int x^{-2} dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{3}{x}$.

3) Es ist $\int (ax^m + bx^n - cx^p)\, dx = a\int x^m dx + b\int x^n dx - c\int x^p dx$ $= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} - \frac{cx^{p+1}}{p+1} + C$. (Dabei ist es offenbar hinreichend, eine einzige unbestimmte Constante C beizufügen.)

4) Auf gleiche Art erhält man für das irrationale Monom (welche Monome man gleich hier mit behandeln kann, indem auch n gebrochen sein darf) $\int a\sqrt{x^3}dx = a\int x^{\frac{3}{2}} dx = ax^{\frac{5}{2}} : \frac{5}{2} = \frac{2}{5} a\sqrt{x^5} + C$.

5) Es ist ferner $\int dx (1-2x)^2 = \int dx (1 - 4x + 4x^2) = \int dx - 4\int x dx + 4\int x^2 dx = x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + C$. Auf dieselbe Art verfährt man, wenn n eine ganze, positive Zahl ist, mit der Bestimmung des Integrals $\int dx (a + bx + cx^2 + \ldots)^n$ (unter Anwendung des polynomischen Lehrsatzes §. 120).

6) Zur Bestimmung des Integrals $\int dx (a + bx)^m$ setze man, m mag dabei was immer für einen Werth haben, $a + bx = z$; so wird $b\,dx = dz$ oder $dx = \frac{1}{b} dz$, also $\int dx (a + bx)^m = \frac{1}{b}\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{b(m+1)} + C$, oder, wenn man für z den Werth in x wieder herstellt: $\int dx (a + bx)^m$ $= \frac{(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C$. (Bei einiger Uebung wird die Substitution entbehrlich; zugleich bildet dieses Beispiel einen speciellen Fall von jenem, welcher in §. 808 erwähnt wird,)

7) Auf dem nämlichen Wege der Substitution wird man, die Exponenten n und m mögen was immer für Werthe haben, das Integral $\int x^{n-1} dx (a + bx^n)^m$ bestimmen können; weil, von den constanten Factoren abgesehen, der Theil ausserhalb der Klammer das

Differential von jenem innerhalb der Klammer ist. Man setze nämlich wieder $a+bx^n=z$; so folgt daraus, wenn man differentiirt: $x^{n-1}dx=\frac{dz}{bn}$, und man hat

$$\int x^{n-1}dx(a+bx^n)^m=\frac{1}{bn}\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{bn(m+1)}+C=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{bn(m+1)}+C.$$

Anmerk. Man ist also im Stande, auf diesem Wege ganz allgemein das Integral $\int AX^m dX$, bei welchem dX das Differential der Grösse X unterm Exponenten m ist, zu bestimmen. Uebrigens bilden diese beiden Beispiele 5) und 7) nur besondere Fälle von dem allgemeinen Integrale $\int x^n dx(a+bx^m)^p$, welches im nächstfolgenden Capitel noch besonders behandelt wird.

b) Für *gebrochene* Functionen.

§. 780. Bevor wir zur allgemeinsten Form der ration. gebrochenen Differentialformeln übergehen, wollen wir einige besondere, einfachere Fälle behandeln.

Es sei zuerst $dy=\frac{Adx}{x^n}$, so ist

$$y=A\int x^{-n}dx=\frac{Ax^{-n+1}}{-n+1}+C=C-\frac{A}{(n-1)x^{n-1}}.$$

Anmerk. Für den besondern, schon in der Anmerk. des §. 778 bemerkten Fall von $n=1$, kann diese Formel den wahren Werth von $y=C+Alx$ aus dem dort angeführten Grunde nicht geben.

Ist überhaupt $dy=\frac{AdX}{X}$, nämlich vom constanten Factor abstrahirt, der Zähler das Differential des Nenners; so ist $y=A\int\frac{dX}{X}=AlX+C=\frac{1}{2}AlCX^2$, wenn man, was immer gestattet ist, der unbestimmten Constanten die Form lC gibt und wieder $\frac{1}{2}lx^2$ statt lx setzt.

Beispiel. Für $dy=\frac{2x^4dx}{a+bx^5}$ ist, $a+bx^5=X$ gesetzt, $x^4dx=\frac{dX}{5b}$, also $y=\frac{2}{5b}\int\frac{dX}{X}=\frac{2}{5b}lX=\frac{2}{5b}l(a+bx^5)+C$. (Auch hier wird durch einige Uebung die Substitution bald entbehrlich.)

§. 781. Zur Integration der Gleichung $dy=\frac{Ax^n dx}{(a+bx)^m}$ setze man wieder $a+bx=z$; so folgt daraus:

$$x = \frac{z-a}{b},\ dx = \frac{dz}{b} \text{ und } x^n = \frac{(z-a)^n}{b^n};$$

also ist

$$dy = \frac{A(z-a)^n dz}{b^{n+1} z^m} \text{ und } y = \frac{A}{b^{n+1}} \int \frac{(z-a)^n}{z^m} dz;$$

ein Integral, welches sich für jeden Werth von m bestimmen lässt, wenn [§. 779, (5)] n eine ganze, positive Zahl ist.

Beispiel. So wäre für $dy = \frac{Ax^3 dx}{(a+bx)^2}$ sofort

$$y = \frac{A}{b^4} \int z^{-2} dz (z-a)^3 = \frac{A}{b^4} \int dz (z - 3a + 3a^2 z^{-1} - a^3 z^{-2}), \text{ d. i.}$$

$$y = \frac{A}{b^4}\left(\tfrac{1}{2} z^2 - 3az + 3a^2 lz + \frac{a^3}{z}\right) + C, \text{ wobei } z = a + bx \text{ ist.}$$

Anmerk. Auf dieselbe Weise wird man mit der allgemeinen Formel

$$dy = \frac{Ax^n dx + Bx^p dx + \ldots}{(a+bx)^m} \text{ verfahren.}$$

§. **782.** Um das Integral $\int \frac{dx}{a+bx^2}$ zu bestimmen, setze man in der Formel (14), §. 775, $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, also $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt dx; so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$(m)\quad \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\, arc\, tang\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Anmerk. Für jenen Fall, in welchem a und b verschiedene Zeichen besitzen, also diese Integral-Formel eine imaginäre Form erhält, wird weiter unten (§. 785) eine zweite Formel entwickelt werden.

§. **783.** Um endlich auf die allgemeine Form der rationalen echt gebrochenen Function

$$x = \frac{t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \ldots + t_{n-1} x + t_n}{\mathfrak{T}_1 x^n + \mathfrak{T}_2 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{T}_n x + \mathfrak{T}_{n+1}},$$

auf die sich (§. 253) jede gebrochene Function zurückführen lässt, überzugehen; so besteht die allgemeine Methode, das Integral $\int X dx$ zu bestimmen, darin, dass man die gebrochene Function $X = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ (nach §§. 256 — 259) in Partialbrüche zerlegt. Dadurch entstehen aber folgende Fälle:

§. **784.** I. Wenn der Nenner $f(x)$ lauter reelle, ungleiche (d. h. sich nicht wiederholende) Factoren besitzt. In diesem Falle zerfällt $\int X\,dx$ in lauter Integrale von der Form $z = \int \frac{A\,dx}{a + bx}$, welche sich nach §. 780 bestimmen lassen, und $z = \frac{A}{b} l(a + bx)$ geben.

Beispiel. Zur Bestimmung des Integrals $y = \int \frac{dx}{1 - x^2}$ hat man $X = \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1 + x)} + \frac{1}{2(1 - x)}$ (§. 257); daher ist

$$y = \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x},$$

oder wegen $\int \frac{dx}{1 + x} = l(1 + x)$ und $\int \frac{dx}{1 - x} = -l(1 - x)$ auch

$$(h) \int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} l(1 + x) - \tfrac{1}{2} l(1 - x) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) + C',$$

wobei, wenn es sich um diese Beziehung handeln würde, $C' = C \pm l\sqrt{-1}$ wäre.

§. **785.** Setzt man in der vorigen Integral-Formel (h) wieder $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, also $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt dx; so erhält man nach einer einfachen Reduction die etwas allgemeinere Formel:

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} l\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + C.$$

§. **786.** II. Enthält der Nenner auch einfache imaginäre, also reelle quadratische Factoren von der Form $(x - p)^2 + q^2$ (§. 164); so kommen nebst den vorigen auch noch Integrale von der Form (§. 258): $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(x - p)^2 + q^2}$ vor. Um aber dieses Integral zu bestimmen, setze man $x - p = z$, so wird $x = p + z$, $dx = dz$, und für $A + Bp = A'$ sofort

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(x - p)^2 + q^2} = \int \frac{(A' + Bz)\,dz}{z^2 + q^2} = A' \int \frac{dz}{z^2 + q^2} + B \int \frac{z\,dz}{z^2 + q^2},$$

und endlich (§. 780):

$$\int \frac{z\,dz}{z^2 + q^2} = \tfrac{1}{2} l(z^2 + q^2) = l\sqrt{z^2 + q^2},$$

und (§. 782, für $a = q^2$, $b = 1$, $x = z$):

$$\int \frac{dz}{z^2 + q^2} = \frac{1}{q} \, arc\,tang\left(\frac{z}{q}\right).$$

Zuletzt wird man für A' und z wieder die ursprünglichen Werthe $A + Bp$ und $x - p$ herstellen.

Beispiel. Um das Integral $y = \int \frac{(2 - x^2)\,dx}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3}$ zu bestimmen, hat man (§. 258)

$$\frac{2 - x^2}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1 - 3x}{2(x^2 - 4x + 5)},$$

daher

$$y = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{(1 - 3x)\,dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

Nun ist aber $\int \frac{dx}{x-1} = l\,(x-1)$, und nach der vorigen Entwickelung, wobei $A = 1$, $B = -3$, $p^2 + q^2 = 5$, $2p = 4$, also $p = 2$ und $q = 1$ ist:

$$\int \frac{(1 - 3x)\,dx}{x^2 - 4x + 5} = -3\,l\,\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 5\,arctang\,(x - 2);$$

folglich y bestimmt.

§. 787. III. Besitzt der Nenner auch gleiche einfache Factoren; so kommt man auf Integrale von der Form $\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^m}$, welche sich sofort ganz einfach nach §. 779, 7) bestimmen lassen, indem man

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^m} = \frac{-A}{b(m-1)(a + bx)^{m-1}} + C$$

erhält.

So findet man z. B.

$$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)} = \int dx \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2lx - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\,l\,(x-1) - \frac{1}{4}\,l\,(x+1) + C.$$

§. 788. IV. Enthält endlich der Nenner gleiche quadratische Factoren, so entstehen von daher Integrale von der Form $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{[(x-p)^2 + q^2]^m}$. Dieses Integral lässt sich nach dem Verfahren von §. 786 in die beiden folgenden $A'\int \frac{dz}{(z^2 + q^2)^m} + B\int \frac{z\,dz}{(z^2 + q^2)^m}$ auflösen, von welchen das letztere nach der Regel der Monome [§. 779, 7)] bestimmt, das erstere hingegen nach einer weiter unten (§. 817) zu

entwickelnden Reductionsformel auf das (§. 782) bekannte Integral $\int \frac{dz}{z^2 + q^2}$ reducirt wird.

Trinomische Integral-Formeln.

§. **789**. Um die in der Anwendung sehr häufig vorkommenden Integrale von der Form $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ zu entwickeln, setze man in der Formel (m), §. 782, $c + x$ statt x; so erhält man, da dx dadurch nicht geändert wird, wenn man noch Kürze halber $a + bc^2 = \alpha$, $2bc = \beta$ und $b = \gamma$ setzt, wodurch $c = \frac{\beta}{2\gamma}$, $a = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, also $ab = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4}$ und $\frac{b}{a} = \frac{4\gamma^2}{4\alpha\gamma - \beta^2}$ wird, sofort

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \, arc\,tang \left(\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \right) + C.$$

§. **790**. Setzt man eben so in der Formel von §. 785 $c + x$ statt x; so geht $a - bx^2$ in $a - bc^2 - 2bcx - bx^2$, oder wenn man $a - bc^2 = \alpha$, $-2bc = \beta$ und $-b = \gamma$ setzt, wodurch $b = -\gamma$, $c = \frac{\beta}{2\gamma}$, $a = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, also $ab = \frac{1}{4}(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ wird, wieder in $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ über, und es verwandelt sich die dortige Formel, wenn man gleich Zähler und Nenner des unterm Logarithmenzeichen l stehenden Bruches mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, in die folgende:

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \, l \left[\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} - (\beta + 2\gamma x)}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + (\beta + 2\gamma x)} \right] + C.$$

Anmerk. Um das Integrale $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ immer in einer reellen Form zu erhalten, wird man sich also der vorigen oder der gegenwärtigen Formel bedienen, je nachdem $4\alpha\gamma >$ oder $< \beta^2$ ist. Für $4\alpha\gamma = \beta^2$ kann jedoch, wie man sieht, keine von beiden angewendet werden; in diesem Falle ist aber auch das gesuchte Integral algebraisch (also unmöglich in einer der beiden genannten Formeln enthalten), und lässt sich nach der Regel der Monome [§. 779, 7)] finden. Denn es ist bei dieser Voraussetzung: $\beta = \pm 2\sqrt{\alpha\gamma}$, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = (\sqrt{\alpha} \pm x\sqrt{\gamma})^2$, und daher:

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=C\mp\frac{1}{(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})\sqrt{\gamma}};$$

dabei gilt von den doppelten Zeichen gleichzeitig das obere oder untere, je nachdem β positiv oder negativ ist.

§. **791.** Setzt man $\alpha+\beta x+\gamma x^2=X$, so wird $l(\alpha+\beta x+\gamma x^2)=lX$, und wenn man differentiirt: $\frac{\beta+2\gamma x}{X}dx=d.lX$, also $\frac{x\,dx}{X}=\frac{1}{2\gamma}d.lX-\frac{\beta}{2\gamma}\frac{dx}{X}$, und daher auch

$$\int\frac{x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}l(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-\frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

in welcher Formel das letzte Integral in den beiden vorhergehenden Paragraphen bestimmt ist.

Anmerk. Man kann also nun überhaupt Differentialausdrücke von der Form $\frac{(A+Bx)dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ auf diese Weise integriren; denn es ist, wenn man Kürze halber $\alpha+\beta x+\gamma x^2=X$ setzt, sofort

$$\int\frac{(A+Bx)dx}{X}=A\int\frac{dx}{X}+\frac{B}{2\gamma}lX-\frac{B\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{X}$$
$$=\frac{B}{2\gamma}lX+\frac{2\gamma A-\beta B}{2\gamma}\int\frac{dx}{X}.$$

B) Bestimmung des Integrals $\int X dx$, wenn X eine *irrationale* Function von x ist.

§. **792.** Um zuerst das Integral $y=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ zu bestimmen, setze man, um es rational zu machen,

$$(p)\quad \sqrt{1+x^2}=z-x;$$

so folgt, nachdem man quadrirt hat:

$$x=\frac{z^2-1}{2z},\quad dx=\frac{(1+z^2)dz}{2z^2}\text{ und } z-x=\sqrt{1+x^2}=\frac{1+z^2}{2z}.$$

Es ist also, wenn man substit. und reducirt: $y=\int\frac{dz}{z}=lz$, oder wenn man für z den aus (p) folgenden Werth setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=l\,[x+\sqrt{1+x^2}]+C.$$

§. **793**. Setzt man in dieser Formel wieder $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, also $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt dx; so erhält man, wenn man sich den constanten Theil $-\frac{1}{\sqrt{b}}l\sqrt{a}$ mit der unbestimmten Constanten C vereinigt denkt (diesen Theil nämlich auslässt):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}l[x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}]+C.$$

§. **794**. Durch die nämliche Substitution von $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x erhält man auch aus der Formel (13), §. 775, ganz einfach:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C.$$

§. **795**. Setzt man in den Formeln der beiden letzten §§. wieder $c+x$ statt x, so erhält man aus der erstern (§. 793), wenn man noch $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$, $b=\gamma$ setzt, und das constante Glied $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}l2\sqrt{\gamma}$ zur unbestimmten Constanten schlägt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}l[\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}]+C.$$

§. **796**. Und eben so aus der letztern (§. 794), wenn man $a-bc^2=\alpha$, $-2bc=\beta$ und $b=\gamma$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,arc\sin\left(\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right)+C.$$

[Noch anderweitige, jedoch nur in der Form verschiedene Formeln für dieses Integral: III., 312 in der Note.]

§. **797**. Zusatz. Da in diesen beiden letztern Formeln γ von Null verschieden sein muss, so kann man nach keiner derselben das Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}}$ ableiten. Man hat aber nach §. 779, 7):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}}=\int dx(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta x}+C,$$

welches Integral sofort algebraisch ist, also in keiner der beiden erwähnten Formeln enthalten sein kann.

§. **798.** Setzt man in den beiden Hauptformeln von §§. 795, 796 $-\frac{1}{x}$ statt x, also $\frac{dx}{x^2}$ statt dx, und vertauscht zuletzt noch γ, β, α mit α, $-\beta$, γ; so erhält man ganz einfach aus der ersten (§. 795) für $\alpha+\beta x+\gamma x^2=X$:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,l\left[\frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{X}-(2\alpha+\beta x)}{x}\right]+C.$$

§. **799.** Und aus der zweiten (§. 796) für $-\alpha+\beta x+\gamma x^2=X$:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,arc.sin\left(\frac{\beta x-2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right)+C.$$

[Anderweitige Formen dieses letztern Integrals: III., 313 in der Note.]

§. **800.** Zusatz. Auch hier in diesen beiden letztern Formeln darf α nicht Null sein, zum Beweis, dass das Integral $\int\frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}$ weder durch Logarithmen, noch durch Kreisfunctionen ausgedrückt werden kann; und in der That, es ist, wenn man in der Formel von §. 797 ebenfalls $-\frac{1}{x}$, γ und $-\beta$ statt x, α und β setzt:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}=C-\frac{2}{\beta x}\sqrt{\beta x+\gamma x^2},$$

also algeraisch.

Anmerk. Wie man sieht (vergl. §§. 782 und 785, 789 und 790, 793 und 794, 795 und 796, 798 und 799), gehören immer zwei Formeln, davon eine das gesuchte Integral durch Logarithmen, das andere durch Kreisfunctionen darstellt, und wovon immer eine reell ist, wenn die andere imaginär ausfällt, zusammen. [Ueber den weitern Zusammenhang der Logarithmen und Kreisbögen: III., 314 in der Note.]

§. **801.** Da man überhaupt eine irrationale Differentialformel für so gut als integrirt ansieht, wenn es gelungen ist, sie durch passende Transformationen auf eine ra-

tionale Form, oder auch nur auf eine endliche Reihe rationaler Monome zu bringen; so soll im nächstfolgenden §. dieses Verfahren durch einige Beispiele erläutert werden.

§. **802**. Beispiele über das Rationalmachen der irrationalen Differentialformeln.

1. Zur Bestimmung des Integrals $y=\int\frac{dx\sqrt{x}}{x-1}$ setze man $\sqrt{x}=z$ so folgt: $x=z^2$, $dx=2z\,dz$ und

$$y=2\int\frac{z^2dz}{z^2-1}=2\int dz-2\int\frac{dz}{1-z^2}=2z-l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \text{ (§. 784, Beisp.),}$$

oder, wenn man für z den Werth in x wieder herstellt:

$$\int\frac{dx\sqrt{x}}{x-1}=2\sqrt{x}-l\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+C=2\sqrt{x}+l\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)+C.$$

2. Um das Integral $y=\int\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ rational zu machen, setze man $\sqrt{1+x^2}=xz$; so folgt daraus

$$x=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \text{ und } dx=\frac{-z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist daher $y=-\int\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}(z^2-1)=-\int\frac{z^2dz}{z^2-1}$ sofort rational. — Um dieses letztere Integral zu bestimmen, hat man $\frac{z^2}{z^2-1}=1+\frac{1}{z^2-1}$, folglich

$$\int\frac{z^2dz}{z^2-1}=\int dz+\int\frac{dz}{z^2-1}=z-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=z+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \text{ (§. 784),}$$

daher wegen $z=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (aus der ersten Gleichung):

$$y=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Oder, wegen $\tfrac{1}{2}l\left(\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\tfrac{1}{2}l[-x+\sqrt{1+x^2}]^2$

$=l[-x+\sqrt{1+x^2}]=-l(x+\sqrt{1+x^2})$ endlich:

$$\int\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x^2}=C-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+l(x+\sqrt{1+x^2}).$$

[Weitere Beispiele: III., 316.]

§. **803**. Enthält die Function X überhaupt keine andern Irrationalgrössen als jene $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, so erscheint X immer unter einer der beiden Formen: $X'\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$

oder $\frac{X'}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, wo X' eine rationale Function von x bezeichnet.

§. **804.** Man setze nun, um X rational zu machen, $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=z+x\sqrt{\gamma}$; so folgt aus dieser Gleichung, wenn man quadrirt und Kürze halber $\sqrt{\gamma}=c$ setzt:

$$x=\frac{\alpha-z^2}{2cz-\beta},\quad dx=\frac{-2(cz^2-\beta z+\alpha c)dz}{(2cz-\beta)^2},$$

$$z+cx=\frac{cz^2-\beta z+\alpha c}{2cz-\beta},\text{ also}$$

$$dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{-2(cz^2-\beta z+\alpha c)^2dz}{(2cz-\beta)^3}\text{ und}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{-2dz}{2cz-\beta}.$$

Substituirt man daher diese Werthe, so wie auch in die rationale Function X' für x den vorigen in z ausgedrückten Werth; so ist das Integral $\int X\,dx$ (in z ausgedrückt) auf eine rationale Form gebracht, nach dessen Bestimmung man wieder für z seinen Werth $-x\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ und $c=\sqrt{\gamma}$ zurück substituiren oder herstellen wird.

§. **805.** Oder man setze $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{\alpha}+zx$, so wird auf dieselbe Art, $\sqrt{\alpha}=a$ gesetzt:

$$x=\frac{\beta-2az}{z^2-\gamma},\quad dx=\frac{2(az^2-\beta z+a\gamma)dz}{(z^2-\gamma)^2}\text{ und}$$

$$a+zx=\frac{-(az^2-\beta z+a\gamma)}{z^2-\gamma}.$$

Werden diese Werthe für x, dx und $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ substituirt, und wird die dadurch entstehende rationale (in z ausgedrückte) Differentialformel integrirt; so hat man dann nur noch für a und z die entsprechenden Werthe $\sqrt{\alpha}$ und $\frac{-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x}$ (aus der ersten Gleichung) zu setzen, um das irrationale Integral $\int X dx$ bestimmt zu haben. [Eine dritte Art, dieses Integral rational zu machen: III., 319, 3.; Beispiele zu diesen Methoden: 320 — 323.]

Zweites Capitel.

Von der Integration der binomischen Differentialformel $x^n dx(a+bx^m)^p$ insbesondere.

§. **806**. Die in der Anwendung sehr häufig vorkommenden Integrale von der Form $\int x^n dx(a+bx^m)^p$, wobei die Exponenten n, m, p beliebig ganze, gebrochene, positive oder negative Zahlen sein können, und von denen wir im vorigen Capitel bereits einzelne Fälle behandelt haben, verdienen noch eine eigene Untersuchung.

§. **807**. Ausser den beiden in §. 779, 5) und 7) angeführten Fällen, in welchen entweder p eine ganze positive Zahl, oder $x^n dx$ (ohne Rücksicht auf die constanten Factoren) das Differential von $a+bx^m$ ist, gibt es noch zwei Fälle, in denen das obige Integral genau bestimmt werden kann.

§. **808**. Setzt man nämlich das Binom $a+bx^m=z$, wodurch $x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$, $dx=\frac{1}{m}\frac{dz}{b}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1}$ und $x^n=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$ wird; so erhält man:

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{1}{m}b^{-\frac{n+1}{m}}\int z^p dz(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1},$$

welches Integral sofort nach §. 779, 5) bestimmt werden kann, wenn $\frac{n+1}{m}$ eine ganze, positive Zahl ist.

Beispiel. Für das Integral $y=\int x^3 dx\sqrt{1-x^2}$ ist $n=3$ und $m=2$, also $\frac{n+1}{m}=2$ eine ganze, positive Zahl. Man setze demnach $1-x^2=z$, so folgt:

$$x=(1-z)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad dx=-\tfrac{1}{2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz;$$

mithin ist

$$y=-\tfrac{1}{2}\int dz(1-z)z^{\frac{1}{2}}=-\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}dz+\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{3}{2}}dz=-\tfrac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{5}z^{\frac{5}{2}},$$

oder, wenn man für z den Werth in x wieder herstellt:

$$\int x^3 dx\sqrt{1-x^2}=C-\tfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+\tfrac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}.$$

§. **809.** Nimmt man aber aus dem Binom $(a+bx^m)^p$ früher x^m als Factor heraus, wodurch das in Rede stehende Integral die Form $\int x^{n+mp}dx(ax^{-m}+b)^p$ erhält, und setzt dann erst das Binom, d. i. $ax^{-m}+b=z$, wodurch

$$x^{n+mp}=\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{n}{m}-p} \text{ und } dx=-\frac{1}{m}\frac{dz}{a}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{m}-1}$$

wird; so erhält man, $\frac{n+1}{m}=\mu$ gesetzt:

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p=-\frac{a^{\mu+p}}{m}\int z^p dz(z-b)^{-(\mu+p)-1};$$

und es kann dieses letztere Integral wieder nach §. 779, 5) entwickelt werden, wenn $-(\mu+p)=-\left(\frac{n+1}{m}+p\right)$ eine ganze, positive Zahl ist.

Beispiel. Für das Integral $y=\int\frac{dx}{x^3(1+x^2)^2}$ ist $n=-3$, $m=2$, $p=-2$, demnach $-\left(\frac{n+1}{m}+p\right)=+3$ eine ganze, positive Zahl. Man hat daher nach der genannten Vorbereitung:

$$y=\int x^{-7}dx(x^{-2}+1)^{-2},$$

und für $x^{-2}+1=z$ sofort:

$$x=(z-1)^{-\frac{1}{2}},\quad dx=-\tfrac{1}{2}(z-1)^{-\frac{3}{2}}dz \quad\text{und}\quad x^{-7}=(z-1)^{\frac{7}{2}};$$

also nach einer einfachen Reduction:

$$y=-\tfrac{1}{2}\int z^{-2}dz(z-1)^2=-\tfrac{1}{2}\int(dz-2z^{-1}dz+z^{-2}dz)$$
$$=-\tfrac{1}{2}z+lz+\tfrac{1}{2}z^{-1},$$

und wenn man endlich für z den Werth in x herstellt:

$$\int\frac{dx}{x^3(1+x^2)^2}=C-\tfrac{1}{2}(1+x^{-2})+l(1+x^{-2})+\tfrac{1}{2}(1+x^{-2})^{-1}.$$

[Beisp. III., 328.]

Anmerk. Die hier behandelte Differentialformel lässt sich also in den folgenden 4 Fällen genau integriren, nämlich, wenn

1. p eine ganze positive Zahl,
2. $x^n dx$ das Differentiale von $(a+bx^m)$ (ohne Rücksicht auf die constanten Factoren),
3. $\frac{n+1}{m}$, und
4. $-\left(\frac{n+1}{m}+p\right)$ eine ganze positive Zahl ist.

Reductionsformeln für das Integral $\int x^n dx (a + bx^m)^p$.

§. **810.** Um die Integration eines gegebenen Differentialausdruckes von einem einfachern oder sonst leichter auszuführenden Integral abhängig zu machen, bedient man sich der sogenannten Reductionsformeln. Eine der vorzüglichsten und sehr häufig in Anwendung kommende erhält man auf folgende Art: Es ist $d.uv = udv + vdu$, also auch wieder $uv = \int udv + \int vdu$, und daraus:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

welche Formel das sogenannte theilweise Integriren begründet.

§. **811.** Um diese Formel auf das mehr genannte Integral $\int x^n dx (a + bx^m)^p$, in welchem wir Kürze halber $a + bx^m = X$ setzen wollen, anzuwenden, setze man $dv = x^n dx$ und $u = X^p$; so wird, wegen

$$v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{und} \quad du = bmp X^{p-1} x^{m-1} dx$$

nach dieser Formel:

$$(A) \quad \int x^n dx X^p = \frac{x^{n+1} X^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{n+m} dx X^{p-1}.$$

§. **812.** Bestimmt man aus dieser Formel das Integral rechts, und schreibt dann $n-m$ und $p+1$ statt n und p; so erhält man noch (weil dadurch $X = a + bx^m$ ungeändert bleibt):

$$(A') \quad \int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{bm(p+1)} - \frac{n-m+1}{bm(p+1)} \int x^{n-m} dx X^{p+1}.$$

Anmerk. Von diesen beiden Formeln (A) und (A') dient die erstere, um den Exponenten p nach und nach um 1, 2, 3, . . . Einheiten zu vermindern, und die letztere, um diesen Exponenten eben so zu vergrössern. Setzt man nämlich in der erstern $n+m$ statt n und $p-1$ statt p; so wird das Integral rechts von jenem $\int x^{n+2m} dx X^{p-2}$, und dieses wieder durch die fortgesetzte Substitution von $n+2m$ statt n und $p-2$ statt p, von jenem $\int x^{n+3m} dx X^{p-3}$ u. s. w. abhängig gemacht.

Aehnliches gilt von der zweiten Formel (A'), in welcher durch wiederholte Substitutionen von $n-m$, $n-2m$ etc. statt n, und $p+1$,

$p+2$ u. s. w. statt p, das Integral rechts nach und nach von den Integralen

$$\int x^{n-2m}\,dx\,X^{p+2},\quad \int x^{n-3m}\,dx\,X^{p+3} \text{ u. s. w.}$$

abhängig gemacht wird. Auch kann man diese Substitutionen, anstatt erst bei vorkommenden speciellen Fällen, gleich hier allgemein vornehmen. [III., 330.]

§. 813. Beispiele über diese beiden Reductionsformeln (A) und (A').

1) Um das Integral $y = \int x^{-4}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ zu bestimmen, hat man wegen $n=-4$, $m=2$, $p=\frac{3}{2}$, $a=1$ und $b=-1$, nach der Reductionsformel (A), zuerst:

$$y = \frac{x^{-3}X^{\frac{3}{2}}}{-3} + \frac{3}{-3}\int x^{-2}\,dx\,X^{\frac{1}{2}},$$

und für $n=-2$ und $p=\frac{1}{2}$ (alles Uebrige bleibt ungeändert) abermals:

$$\int x^{-2}\,dx\,X^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{-1}X^{\frac{1}{2}}}{-1} + \frac{1}{-1}\int dx\,X^{-\frac{1}{2}},$$

wobei endlich $\int dx\,X^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x$ ist [§. 775, (13)].

Diese Werthe gehörig substituirt, erhält man also:

$$y = C - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + arc\sin x.$$

2) Zur Bestimmung des Integrals $y = \int x^4\,dx\,(1+x^2)^{-3}$, für welches $n=4$, $m=2$, $p=-3$, $a=1$ und $b=1$ ist, hat man nach der Formel (A') (§. 812): $y = \frac{-x^3X^{-2}}{4} + \frac{3}{4}\int x^2\,dx\,X^{-2}$; und wenn man in der nämlichen Formel, um eben so das letzte Integral weiter zu reduciren, $n=2$, $p=-2$ setzt (m, a und b behalten ihre Werthe): $\int x^2\,dx\,X^{-2} = \frac{-xX^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\int dx\,X^{-1}$, wobei endlich

$$\int dx\,X^{-1} = \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tang\,x$$

ist [§. 775, (14)]. Diese Werthe gehörig substituirt, erhält man

$$y = C - \tfrac{1}{4}x^3(1+x^2)^{-2} - \tfrac{3}{8}x(1+x^2)^{-1} + \tfrac{3}{8}\,arc\,tang\,x.$$

§. 814. Um ferner Reductionsformeln zu erhalten, welche den Exponenten n verkleinern oder vergrössern, zerlege man in der Formel (A') (§. 812) X^{p+1} in $X^pX = X^p(a+bx^m)$ $= aX^p + bx^mX^p$; so wird $\int x^{n-m}\,dx\,X^{p+1} = a\int x^{n-m}\,dx\,X^p$ $+ b\int x^n\,dx\,X^p$. Substituirt man diesen Werth für das angeführte Integral rechts der Formel (A'), und bestimmt dann

aus der entstehenden Gleich. das Integral $\int x^n dx X^p$; so erhält man nach einer leichten Reduction die Formel:

$$(B)\quad \int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{b(mp+n+1)} - \frac{(n-m+1)a}{b(mp+n+1)} \int x^{n-m} dx X^p,$$

§. **815.** Bestimmt man aber aus dieser Gleich. wieder das Integral rechts, und setzt hierauf $n+m$ statt n; so erhält man noch:

$$(B')\quad \int x^n dx X^p = \frac{x^{n+1} X^{p+1}}{(n+1)a} - \frac{[m(p+1)+n+1]b}{(n+1)a} \int x^{n+m} dx X^p.$$

Anmerk. Nach der ersten Formel (B) wird, indem man wieder $n-m$, $n-2m$, . . . statt n setzt, der Exponent n nach und nach um m, $2m$, $3m$, . . . Einheiten vermindert. Dagegen wird in der zweiten Formel (B') dieser Exponent n durch die successive Substitution von $n+m$, $n+2m$ u. s. w. statt n, nach und nach um eben so viele Einheiten vergrössert, während bei beiden der Exponent p ungeändert bleibt. — Für den künftigen Gebrauch kann man diese Substitution und vorkommende Reduction gleich hier ein für alle Mal ausführen. [III., 334.]

§. **816.** Beispiele über diese beiden Reductionsformeln (B) und (B').

1) Zur Bestimmung des Integrals $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hat man unmittelbar nach der vorigen Reductionsformel (B), wegen $n=2$, $m=2$, $p=-\frac{1}{2}$ $a=1$ und $b=-1$:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{xX^{\frac{1}{2}}}{-2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \tfrac{1}{2}\, arc \sin x.$$

2) Eben so erhält man unmittelbar nach der Formel (B'):

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{-1}\int \frac{dx}{1+x^2} = C - \frac{1}{x} - arc\, tang\, x.$$

3) Nach einer zweimaligen Anwendung der Formel (B) erhält man ferner:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - \frac{x}{4}(x^2+\tfrac{3}{2})\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{8}\, arc \sin x.$$

§. **817.** Um endlich den Exponenten p vergrössern oder verkleinern zu können, ohne [wie in (A) und (A')] jenen n zu verändern, löse man in der Formel (A), §. 811, den Factor bx^{n+m} auf und setze $bx^{n+m} = x^n bx^m = x^n(X-a)$ $= x^n X - ax^n$ (wegen $a + bx^m = X$); so folgt aus der ge-

nannten Formel (A), wenn man diese Werthe substituirt und aus der entstehenden Gleichung wieder das Integral $\int x^n X^p dx$ bestimmt:

$$(C)\quad \int x^n dx\, X^p = \frac{x^{n+1} X^p}{mp+n+1} + \frac{mpa}{mp+n+1} \int x^n dx\, X^{p-1}.$$

§. **818.** Drückt man dagegen wieder das Integral rechts in dieser letzten Formel aus, und setzt dann $p+1$ statt p; so erhält man noch:

$$(C')\quad \int x^n dx\, X^p = \frac{-x^{n+1} X^{p+1}}{m(p+1)a} + \frac{m(p+1)+n+1}{m(p+1)a} \int x^n dx\, X^{p+1}.$$

§. **819.** Beispiele über diese beiden Reductionsformeln (C) und (C').

1) Um das Integral $y = \int dx \sqrt{a+bx^2}$ zu finden, hat man unmittelbar nach der Formel (C):

$$y = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

und wenn man für dieses letztere Integral den Werth aus §. 793 setzt:

$$\int dx \sqrt{a+bx^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\, l[x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}] + C.$$

2) Eben so findet man nach der Reductionsformel (C'), mit Rücksicht des Integrals in §. 794:

$$\int dx \sqrt{a-bx^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\, arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Anmerk. Mittelst der bisher entwickelten Reductionsformeln lassen sich alle Integralausdrücke von der Form $\int x^s dx (1-x^2)^{\frac{q}{2}}$ und $\int x^s dx(1+x^2)^t$, wobei s und t ganze, übrigens positive oder negative, und q ungerade Zahlen bezeichnen, und zwar die erstern auf das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sin\,x$ oder $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, und die letztern auf das Integral $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tang\,x$ oder

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} l(1+x^2),$$

je nachdem s gerad oder ungerad ist, reduciren und sonach bestimmen.

Noch ist zu bemerken, dass diese Reductionsformeln in jenen Fällen, in welchen die Nenner verschwinden, unbrauchbar werden; diess geschieht in (A) und (B') für $n+1=0$, in (B') und (C') für $a=0$, in (A') und (B) für $b=0$, in (A') und (C) für $m=0$ oder $p+1=0$, und endlich in (B) und (C) für $mp+n+1=0$. In

allen diesen Fällen jedoch lässt sich das betreffende Integral $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ auf Monome oder rationale Brüche zurückführen, wodurch also diese Reductionsformeln ohnehin entbehrlich werden. [III., 340 in der Note.]

§. **820.** Um nun gleich die, eine bedeutende Anwendung findenden Integrale von der Form $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu bestimmen, setze man in der Reductionsformel (B), §. 814, $a=1$, $b=-1$, $m=2$ und $p=-\frac{1}{2}$; so erhält man die specielle Reductionsformel:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§. **821.** Setzt man nun in dieser Formel nach und nach $n=1, 3, 5, \ldots$, und Kürze halber $\sqrt{1-x^2}=X$; so erhält man:

$$\int \frac{x\,dx}{X} = C - X,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{X} = \frac{-x^2 X}{3} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{X} = C - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1.2}{1.3}\right) X,$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{X} = C - \left(\frac{x^4}{5} + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right) X \text{ u. s. w.}$$

§. **822.** Man erhält eben so für $n=2, 4, 6, \ldots$, wenn man auch noch $arc\,sin\,x = A$ setzt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{X} = C - \frac{xX}{2} + \frac{1}{2}A,$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{X} = C - \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3}{2.4}x\right) X + \frac{1.3}{2.4}A,$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{X} = C - \left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right) X + \frac{1.3\,5}{2.4.6}A \text{ u. s. w.}$$

§. **823.** Setzt man in der obigen Formel des §. 820 $\frac{1}{x}$ statt x, also $\frac{-dx}{x^2}$ statt dx, wodurch $X=\sqrt{1-x^2}$ in $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{X'}{x}$, und

$$\int \frac{dx}{X} = arc\,sin\,x = A \text{ in } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\,arc\,sin\,\frac{1}{x} = -A'$$

(wo X' und A' der Kürze wegen eingeführt sind) übergeht; so erhält man $\int \frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}} = \frac{X'}{nx^n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{dx}{x^{n-1}X'}$, und daraus für $n=1, 3, 5, \ldots$ der Reihe nach die Formeln

$$\int \frac{dx}{x^2 X'} = \frac{X'}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^4 X'} = \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1.2}{1.3x}\right) X' + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^6 X'} = \left(\frac{1}{5x^5} + \frac{1.4}{3.5x^3}\right) + \frac{1.2.4}{1.3.5x} X' + C \text{ u. s. w.}$$

§. **824**. Ferner erhält man für $n=2, 4, 6, \ldots$, da de Werth für $n=0$ bereits bekannt, und

$$\int \frac{dx}{x X'} = arc\,sec\,x = C - A' \text{ [§. 775, (15)] ist, sofort:}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X'} = \frac{X'}{2x^2} - \tfrac{1}{2}A' + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^5 X'} = \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.3}{2.4x^2}\right) X' - \frac{1.3}{2.4} A' + C \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Aehnliche Formeln erhält man auch aus der Reductionsformel (B'), §. 815.

§. **825**. Um das Integral $\int x^q dx (ax^r + bx^s)^p$ zu bestimmen, darf man bloss berücksichtigen, dass

$$x^q dx (ax^r + bx^s)^p = x^{q+rp} dx (a + bx^{s-r})^p$$

ist, und $q + rp = n$, $s - r = m$ setzen; denn dadurch wird dieses Integral wieder auf die Form des bisher behandelten Integrals $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ gebracht.

Um z. B. auf diese Weise das Integral $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ zu finden, hat man $\frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = x^{n-\frac{1}{2}} dx (2a - x)^{-\frac{1}{2}}$. Setzt man daher in der Formel (B), §. 814, $n - \frac{1}{2}$ statt n, $m = 1$, $p = -\frac{1}{2}$, $2a$ statt a und $b = -1$; so erhält man nach einer leichten Reduction die specielle Reductionsformel:

$$(\alpha) \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{-x^{n-1}\sqrt{2ax - x^2}}{n} + \frac{(2n-1)a}{n} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

[directe Ableitung dieser Formel: III., 345], mittelst welcher man durch successive Substitutionen von $n-1$, $n-2$, ... statt n, wenn n eine ganze poritive Zahl ist, zuletzt immer auf

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = arc\,sinv\left(\frac{x}{a}\right) = -\,arc\,sin\left(1-\frac{x}{a}\right) \text{ [§. 775, (I6)]}$$

kommt.

§. **826**. Um auf demselben Wege das Integral

$$y = \int dx\sqrt{2ax-x^2}$$

zu bestimmen, hat man, wegen

$$dx\sqrt{2ax-x^2} = x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a-x},$$

wenn man in der Formel (C), §. 817, $n=\frac{1}{2}$, $m=1$, $p=\frac{1}{2}$, $2a$ statt a und $b=-1$ setzt, sofort nach einer einfachen Reduction:

$$y = \tfrac{1}{2}x\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

und wenn man für das Integral rechts den aus der vorigen Formel für $n=1$ folgenden Werth

$$-\sqrt{2ax-x^2} - a\,arc\,sin\left(\frac{a-x}{a}\right)$$

substituirt, endlich:

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2} = C - \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2} - \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\left(\frac{a-x}{a}\right).$$

Reductionsformeln für einige besondere Fälle des Integrals $\int x^n dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p$.

§. **827**. Setzt man in den Formeln (C) und (C'), §. 817 und §. 818, $n=0$, $m=2$, schreibt sodann $c+x$ statt x, und setzt endlich wieder nach vollendeter Entwickelung (genau so wie in §. 789) $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$, $b=\gamma$; so erhält man, Kürze halber, $\alpha+\beta x+\gamma x^2 = X$ gesetzt:

$$(a)\quad \int dx\,X^p = \frac{(\beta+2\gamma x)X^p}{2\gamma(2p+1)} + \frac{p(4\alpha\gamma-\beta^2)}{2\gamma(2p+1)}\int dx\,X^{p-1} \text{ und}$$

$$(a')\quad \int\frac{dx}{X^p} = \frac{\beta+2\gamma x}{(p-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)X^{p-1}} + \frac{2\gamma(2p-3)}{(p-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)}\int\frac{dx}{X^{p-1}}.$$

Setzt man ferner $y=\frac{1}{X^{p-1}}$, so wird

$$dy = \frac{-\beta(p-1)dx}{X^p} - \frac{2\gamma(p-1)x\,dx}{X^p},$$

und daraus, wenn man integrirt,

$$(b)\quad \int\frac{x\,dx}{X^p} = -\frac{1}{2\gamma(p-1)X^{p-1}} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{X^p}.$$

Beispiel. Nach der Formel (a) lässt sich z. B. das Integral $\int dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ ganz einfach entwickeln; es ist nämlich, $p=\frac{1}{2}$ gesetzt:

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{(\beta+2\gamma x)\sqrt{X}}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

wobei das letzte Integral bereits in §. 795 entwickelt ist. [III., 350]

§. **828.** Um eine Reductions-Formel für das Integral $\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}}$ zu finden, wo wieder $X=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ ist, hat man

$$d.x^{n-1}X^{\frac{1}{2}} = (n-1)x^{n-2}dx\sqrt{X} + \frac{x^{n-1}(\beta+2\gamma x)\,dx}{2\sqrt{X}}$$

oder

$$d.x^{n-1}X^{\frac{1}{2}} = \frac{(n-1)\alpha x^{n-2}\,dx + (n-\frac{1}{2})\beta x^{n-1}\,dx + n\gamma x^n\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}}$, und nimmt dann beiderseits das Integral; so erhält man:

$$(D)\quad \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{X}}{n\gamma} - \frac{(n-\frac{1}{2})\beta}{n\gamma}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}} - \frac{(n-1)\alpha}{n\gamma}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Anmerk. Mit Hilfe dieser Formel lässt sich auch eine Reductionsformel für das Integral $\int x^n\,dx\sqrt{X}$ ableiten, weil

$$\int x^n\,dx\sqrt{X} = \alpha\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}} + \beta\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{X}} + \gamma\int\frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{X}}$$ ist.

§. **829.** Bestimmt man aus dieser Gleichung, um n zu vergrössern, oder die analoge Reductionsformel für negative Exponenten n zu erhalten, das letzte Integral rechts, und setzt $n+2$ statt n; so erhält man, n gleich negativ genommen:

$$(D')\quad \int\frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = \frac{-\sqrt{X}}{(n-1)\alpha x^{n-1}} - \frac{(n-\frac{3}{2})\beta}{(n-1)\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{(n-2)\gamma}{(n-1)\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{X}}.$$

Drittes Capitel.

Von der Integration einiger *transcendenten* Differentialformeln.

§. **830.** Um das Integral $\int X l x^n dx$ zu finden, wobei X eine solche algebraische Function von x sein soll, dass sich $\int X dx$ nach den vorigen Capiteln bestimmen lässt, setze man in der Formel des §. 810 $u = l x^n$ und $dv = X dx$; so erhält man, wegen

$$du = n l x^{n-1} \frac{dx}{x} \text{ und } v = \int X dx = f(x),$$

wenn man die algebraische Function $\frac{f(x)}{x} = X'$ setzt:

$$(a) \int X dx\, l x^n = f(x) l x^n - n \int X' l x^{n-1} dx.$$

§. **831.** Bestimmt man aus dieser Gleichung das Integral rechter Hand, schreibt dann $n+1$ statt n, und nimmt endlich n negativ; so erhält man noch:

$$(a') \int \frac{X' dx}{l x^n} = \frac{-f(x)}{(n-1) l x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{X dx}{l x^{n-1}}.$$

Von diesen beiden Reductionsformeln, in denen $f(x) = \int X dx$ und $X' = \frac{f(x)}{x}$ ist, leuchtet die Anwendung und der Gebrauch von selbst ein.

Beispiel. So ist z. B. für $X = x^m$ sofort

$$f(x) = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ und } X' = \frac{x^m}{m+1},$$

also nach der Formel (a):

$$\int x^m dx\, l x^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} l x^n - \frac{n}{m+1} \int x^m dx\, l x^{n-1}.$$

Setzt man in dieser speciellen Reductionsformel statt n nach und nach $n-1$, $n-2$, ..., und substituirt die zuletzt gefundenen Integrale immer in die nächst vorhergehenden, so erhält man:

$$\int x^m dx\, l x^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[l x^n - \frac{n}{m+1} l x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l x^{n-3} + \dots \right] + C.$$

Anmerk. Für $m = -1$ wird diese Formel unbrauchbar; setzt man aber $l x = z$, also $\frac{dx}{x} = dz$, so wird

$$\int \frac{dx}{x} l x^n = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{l x^{n+1}}{n+1} + C.$$

[Weitere Beispiele: III., 355.]

§. **832**. Um das Integral $\int X a^x dx$ zu bestimmen, setze man in die Grundformel (§. 810) $u = X$ und $dv = a^x dx$; so wird $du = dX = X'dx$, wo (§. 657) X' eine neue Function von x bezeichnet, und $v = \int a^x dx = \frac{a^x}{la}$ [§. 775, (5)]. Man erhält dadurch: $\int X a^x dx = \frac{X a^x}{la} - \frac{1}{la} \int X' a^x dx$, eine einfache und leicht anzuwendende Reductionsformel für das genannte Integral, wobei $X' = \frac{dX}{dx}$ ist.

Beispiel. Es sei $X = x^n$, also $X' = n x^{n-1}$; so hat man nach dieser Formel: $\int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{la} - \frac{n}{la} \int x^{n-1} a^x dx$, und wenn man in dieser speciellen Reductionsformel statt n nach und nach $n-1$, $n-2$, ... setzt und die entstehenden Integrale gehörig in einander substituirt:

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{la}\left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{la} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{la^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{la^n}\right] + C.$$

Anmerk. Für negative Werthe von n darf man nur die vorige Reductionsformel umkehren, d. i. das Integral rechter Hand bestimmen und dann $n+1$ statt n schreiben; man erhält auf diese Weise, wenn man n gleich negativ nimmt:

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}}. \text{ [III., 357.]}$$

§. **833**. Um das Integral $\int X dx$ zu bestimmen, wenn X Kreisfunctionen von x enthält, setze man zuerst in den Formeln (7) — (10), §. 775, nx statt x, also ndx für dx; so erhält man die ganz einfachen Formeln:

(1) $\int cos\, nx\, dx = \frac{1}{n} sin\, nx$; (2) $\int sin\, nx\, dx = -\frac{1}{n} cos\, nx$;

(3) $\int \frac{dx}{cos\, nx^2} = \frac{1}{n} tang\, nx$; (4) $\int \frac{dx}{sin\, nx^2} = -\frac{1}{n} cot\, nx$;

welchen Ausdrücken noch durchgehends die unbestimmte Constante C beizufügen ist.

§. **834**. Es ist ferner

(1) $\int sin\, x\, cos\, x\, dx = \int sin\, x\, d\, sin\, x = \frac{1}{2} sin\, x^2$ (§. 775),

(2) $\int tang\, x\, dx = -\int \frac{d\, cos\, x}{cos\, x} = -l\, cos\, x = l \frac{1}{cos\, x} = l\, sec\, x$ (§. 780).

Wegen $\frac{dx}{sin\, x\, cos\, x} = \frac{dx}{cos\, x^2} : tang\, x = \frac{d.\, tang\, x}{tang\, x}$ ist (§. 780):

$$(3) \int \frac{dx}{sin\, x\, cos\, x} = l\, tang\, x.$$

Nach dieser letzteren Formel ist ferner, wegen $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$:

$$(4)\ \int\frac{dx}{\sin x} = \frac{d\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = l\,tang\,\tfrac{1}{2}x.$$

Setzt man in (2) und (4) $\frac{\pi}{2} - x$ statt x, also $-dx$ statt dx; so erhält man:

$$(5)\ \int\cot x\,dx = l\sin x = -l\,cosec\,x \text{ und}$$

$$(6)\ \int\frac{dx}{\cos x} = -l\,tang\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}x\right) = l\cot\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}x\right) = l\,tang\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}x\right);$$

zu welchen Formeln ebenfalls noch die unbestimmte Constante hinzuzufügen ist.

§. **835**. Setzt man in den trigonometrischen Formeln (aus §§. 20 und 21) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$, $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, sofort $\alpha = nx$ und $\beta = mx$; so gibt die erste, wenn man noch durchaus mit dx multiplicirt und beiderseits die Gleichung integrirt:

$$2\int\sin nx\cos mx\,dx = \int\sin(n+m)x\,dx + \sin(n-m)x\,dx,$$

oder wenn man im zweiten Theile der Gleichung die Integration nach §. 833 ausführt und dann durch 2 dividirt:

$$(1)\ \int\sin nx\cos mx\,dx = C - \frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)}.$$

Genau eben so erhält man auch aus den beiden übrigen angeführten trigonom. Formeln:

$$(2)\ \int\cos nx\cos mx\,dx = \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + C,$$

$$(3)\ \int\sin nx\sin mx\,dx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + C.$$

§. **836**. Sind die Exponenten n und m ganze positive Zahlen, so lassen sich die Integrale $\int\sin x^n dx$, $\int\cos x^m dx$ und $\int\sin x^n\cos x^m dx$ mit Zuziehung der Formeln in §. 329 auf jene der §§. 833 und 835 zurückführen, wie ganz einfach die folgenden Beispiele zeigen.

§. **837**. Beispiele hierüber:

1) Um das Integral $\int\sin x^3 dx$ zu bestimmen, hat man (§. 329) $\sin x^3 = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, also

$\int\sin x^3 dx = \frac{3}{4}\int\sin x\,dx - \frac{1}{4}\int\sin 3x\,dx = C - \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$ (§. 833).

2) Eben so ist (§. 329):

$$\int \cos x^4 dx = \int dx \left(\tfrac{1}{8}\cos 4x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{3}{8}\right) = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \tfrac{3}{8}x + C.$$

3) Zur Bestimmung des Integrals $\int \sin x^2 \cos x^3 dx$ hat man (nach §. 329) $\sin x^2 \cos x^3 = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)(\tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 3x) = \tfrac{3}{8}\cos x + \tfrac{1}{8}\cos 3x - \tfrac{3}{8}\cos x \cos 2x - \tfrac{1}{8}\cos 2x \cos 3x$. Substituirt man diese Werthe in das gegebene Integral und führt die Integration nach den Formeln der beiden erwähnten §§. aus, so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\int \sin x^2 \cos x^3 dx = \tfrac{1}{8}(\sin x - \tfrac{1}{6}\sin 3x - \tfrac{1}{10}\sin 5x) + C,$$

oder, wenn man wieder auf die einfachen Bögen zurückgehen will, nach gehöriger Substitution und Reduction, auch:

$$\int \sin x^2 \cos x^3 dx = \tfrac{1}{3}\sin x^3 - \tfrac{1}{5}\sin x^5 + C.$$

§. **838.** Um jedoch diese vielen Substitutionen zu ersparen, kann man für das Integral $\int \sin x^n \cos x^m dx$, und zwar für positive und negative ganze Exponenten n und m, folgende Reductionsformeln entwickeln: Setzt man $\sin x = z$, so wird $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $\cos x\, dx = dz$, also $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ und $y = \int \sin x^n \cos x^m dx = \int z^n dz (1-z^2)^{\frac{m-1}{2}}$.

Setzt man nun in den Reductionsformeln (B) und (B'), §§. 814, 815, $a = 1$, $b = -1$, $m = 2$, $p = \frac{m-1}{2}$, lässt n ungeändert und schreibt z statt x; so erhält man, wenn Kürze halber $1 - z^2 = Z$ gesetzt wird:

$$y = \frac{z^{n-1} Z^{\frac{m+1}{2}}}{-(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int z^{n-2} dz\, Z^{\frac{m-1}{2}} \text{ und}$$

$$y = \frac{z^{n+1} Z^{\frac{m+1}{2}}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int z^{n+2} dz\, Z^{\frac{m-1}{2}},$$

oder, wenn man in diesen beiden Formeln (in deren letztern man n gleich negativ nimmt) wieder auf die ursprünglichen Werthe in x zurückgeht, indem

$$z = \sin x,\ Z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-z^2} = \cos x,\ dz Z^{-\frac{1}{2}} = dx,$$

also $dz Z^{\frac{m-1}{2}} = \cos x^m dx$, $dz Z^{\frac{m+1}{2}} = \cos x^{m+2} dx$ u. s. w. ist; so erhält man die besondern Reductionsformeln:

$$(1)\ \int \sin x^n \cos x^m dx = -\frac{\sin x^{n-1}\cos x^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin x^{n-2}\cos x^m dx,$$

$$(2)\ \int \frac{\cos x^m}{\sin x^n} dx = -\frac{\cos x^{m+1}}{(n-1)\sin x^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos x^m}{\sin x^{n-2}} dx;$$

dazu kommen noch, wenn man in diesen beiden Formeln $\frac{\pi}{2} - x$ statt x setzt und n mit m vertauscht, die beiden folgenden:

$$(3)\ \int \sin x^n \cos x^m\, dx = \frac{\sin x^{n+1} \cos x^{m-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^n \cos x^{m-2}\, dx,$$

$$(4)\ \int \frac{\sin x^n}{\cos x^m}\, dx = \frac{\sin x^{n+1}}{(m-1) \cos x^{m-1}} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin x^n}{\cos x^{m-2}}\, dx.$$

Nimmt man in (2) m und in (4) n negativ, so erhält man ferner:

$$(5)\ \int \frac{dx}{\sin x^n \cos x^m} = \frac{-1}{(n-1) \sin x^{n-1} \cos x^{m-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin x^{n-2} \cos x^m},$$

$$(6)\ \int \frac{dx}{\sin x^n \cos x^m} = \frac{1}{(m-1) \sin x^{n-1} \cos x^{m-1}} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin x^n \cos x^{m-2}}.$$

Setzt man in (1) $m = 0$ und in (3) $n = 0$, so erhält man noch:

$$(7)\ \int \sin x^n\, dx = \frac{-\sin x^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2}\, dx,$$

$$(8)\ \int \cos x^m\, dx = \frac{\sin x \cos x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos x^{m-2}\, dx;$$

und eben so aus (2) und (4), indem man beziehungsweise $m = 0$ und $n = 0$ setzt:

$$(9)\ \int \frac{dx}{\sin x^n} = \frac{-\cos x}{(n-1) \sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin x^{n-2}},$$

$$(10)\ \int \frac{dx}{\cos x^m} = \frac{\sin x}{(m-1) \cos x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos x^{m-2}}.$$

Anmerk. Mittelst der mehr genannten Theilformel $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ lassen sich diese Formeln direct auf folgende Weise ableiten:

Es ist

$$y = \int \sin x^n \cos x^m\, dx = \int \sin x^{n-1} \cos x^m \sin x\, dx;$$

setzt man daher $\sin x^{n-1} = u$ und $dv = \cos x^m \sin x\, dx$, so wird nach dieser Formel:

$$y = -\frac{\sin x^{n-1} \cos x^{m+1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int dx . \sin x^{n-2} \cos x^{m+2},$$

oder wegen $\cos x^{m+2} = \cos x^m (1 - \sin x^2)$ auch

$$y = -\frac{\sin x^{n-1} \cos x^{m+1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left[\int dx . \sin x^{n-2} \cos x^m - y\right],$$

woraus sofort die erste der obigen Formeln

$$y = -\frac{\sin x^{n-1} \cos x^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^{n-2} \cos x^m\, dx$$

folgt.

Auf eine ganz ähnliche Weise erhält man auch die Formel (3), und aus diesen beiden dann durch schickliche Aenderungen der Exponenten n und m die übrigen Formeln.

Beispiel. Um das Integral $y = \int \frac{dx}{\sin x^2 \cos x^2}$ zu bestimmen, hat man nach der obigen Relation (5):

$$y = \frac{-1}{\sin x \cos x} + 2\int \frac{dx}{\cos x^2} = \frac{-1}{\sin x \cos x} + 2 \, tang\, x + C,$$

oder auch, wie man leicht findet:

$$y = tang\, x - \cot x + C.$$

Dieses Integral kann auch durch folgende Zerlegung (ein Kunstgriff, welcher ebenfalls öfter angewendet wird) gefunden werden. Es ist nämlich:

$$y = \int \frac{dx}{\sin x^2 \cos x^2} = \int \frac{(\sin x^2 + \cos x^2)\,dx}{\sin x^2 \cos x^2} = \int \frac{dx}{\cos x^2} + \int \frac{dx}{\sin x^2} = tang\, x - \cot x + C,$$

wie zuvor.

§. **839**. Bei wiederholter Anwendung dieser Formeln (deren Wahl in vorkommenden Fällen leicht zu treffen ist) gelangt man, in der Voraussetzung von ganzen Exponenten n und m, zuletzt immer auf schon bekannte oder solche Integrale, die sich nach dem Frühern leicht bestimmen lassen. So kommt man bei jenen (1) und (3), je nachdem beziehungsweise n und m gerade oder ungerade Zahlen sind, auf die Integrale: $\int \cos x^m dx$, $\int \sin x^n dx$, welche nach (8) und (7) (die zuletzt auf $\int dx = x$ oder $\int \cos x\, dx = \sin x$, und $\int dx = x$ oder $\int \sin x\, dx = -\cos x$ führen) gefunden werden; oder auf:

$$\int \cos x^m \sin x\, dx = -\frac{\cos x^{m+1}}{m+1}, \quad \int \sin x^n \cos x\, dx = \frac{\sin x^{n+1}}{n+1}.$$

In den Formeln (2), (4), (5), (6) kommt man eben so beziehungsweise auf $\int \cos x^n dx$ (das eben erwähnte) oder $\int \frac{\cos x^m dx}{\sin x}$, was aus (3) für $n = -1$ (wobei man zuletzt auf die in §. 834 entwickelten Integrale $\int \frac{dx}{\sin x}$ oder $\int \cot x\, dx$ kommt) gefunden wird; auf $\int \sin x^n dx$ (das ebenfalls schon angeführte) oder $\int \frac{dx}{\sin x \cos x^m}$, was aus (6) für $n = 1$ (wobei man auf $\int \frac{dx}{\sin x}$ oder $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, §. 834, kommt) gefunden wird; endlich auf $\int \frac{dx}{\sin x^n}$,

was nach (9) (wobei man auf $\int dx$ oder $\int\frac{dx}{\sin x}$, §. 834, kommt), oder auf $\int\frac{dx}{\sin x^n \cos x}$, was nach (5) für $m = 1$ (wobei man zuletzt auf $\int\frac{dx}{\cos x}$ oder $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$, §. 834, kommt) zu bestimmen ist. [Beispiele und sonstige Bemerkungen hierüber: III, 363 — 371.]

Anmerk. Für die Anwendung ist die Bemerkung wichtig, dass die eben entwickelten Reductionsformeln entbehrlich werden, wenn von den Exponenten n und m einer ungerade und positiv ist. Das in einem solchen Falle einzuschlagende Verfahren wird schon durch ein einziges Beispiel hinreichend klar.

Beispiel. Um das Integral $y = \int \sin x^2 \cos x^3 dx$ zu bestimmen, löse man (den Factor mit ungeradem Exponenten) $\cos x^3$ in

$$\cos x . \cos x^2 = \cos x (1 - \sin x^2)$$

auf; so wird, wegen $\cos x dx = d \sin x$, wenn man $\sin x = z$ setzt:

$$y = \int z^2 dz (1 - z^2) = \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{5} z^5 = \tfrac{1}{3} \sin x^3 - \tfrac{1}{5} \sin x^5 + C.$$

(Vergl. §. 837, Beisp. 3.) Es wird nämlich nach diesem Vorgange allgemein

$\int \sin x^{2p+1} \cos x^q dx = - \int \sin x^{2p} \cos x^q d \cos x = - \int z^q dz (1-z^2)^p$, für $\cos x = z$, und

$\int \sin x^p \cos x^{2q+1} dx = \int \sin x^p \cos x^{2q} d \sin x = \int z^p dz (1 - z^2)^q$, für $\sin x = z$.

[Verfahren, um transcendente Differentialformeln auf eine algebraische Form zu bringen: III., 371.]

Viertes Capitel.

Von der Integration mittelst unendlicher Reihen.

§. **840.** Lässt sich das Integral $\int X dx$ nach den vorhergehenden Capiteln nicht genau bestimmen, wohl aber X in eine convergente Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickeln; so kann dieses Integral wenigstens approximativ oder näherungsweise bestimmt werden. Dieses Verfahren, welches das Integriren mittelst Reihen genannt wird, ist äusserst einfach und um so wichtiger, weil es das letzte Mittel bleibt, zu welchem man leider nur zu oft seine Zuflucht nehmen muss. Zugleich kann dieses Verfahren auch dazu dienen, gewisse transcendente Functionen in unendliche Reihen aufzulösen.

Beispiele.

§. **841.** Um das Integral $\int \frac{dx}{a+x}$ durch eine unendliche Reihe zu bestimmen, hat man:

$$X = \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \dots \text{ (§. 261)},$$

folglich:

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int dx \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots\right)$$

$$= \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \dots + C;$$

eine Reihe, welche für alle Werthe von $x < a$ bis einschliessig $x = a$ convergirt (§. 281, 4).

Da man übrigens dieses Integral auch durch einen geschlossenen Ausdruck erhält, indem (§. 780):

$$\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C' \quad \text{und} \quad C - C'$$

wieder eine neue unbestimmte Constante C ist; so hat man zugleich

$$l(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \dots$$

Setzt man dabei, zur Bestimmung der Const. C, $x = 0$, so wird $C = la$, folglich wegen $l(a+x) - la = l\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, wenn man $\frac{x}{a} = y$ setzt:

$$l(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots$$

[Vergl. §. 291, (3).]

§. **842**. Zur Entwickelung des Integrals $y = \int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$ hat man $\frac{a^2}{a^2 + x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \ldots$, also

$$y = \int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \ldots + C;$$

eine Reihe, welche für alle Werthe von $x < a$ convergirt.

Da von der andern Seite auch (§. 782)

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = a \, arc \, tang \left(\frac{x}{a}\right) + C'$$

ist, so hat man, wenn durchaus mit a dividirt und $\frac{x}{a} = y$ gesetzt wird:

$$arc \, tang \, y = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{7}y^7 + \ldots,$$

wozu keine Constante kommt (d. i. $C = 0$ wird), weil für $y = 0$ auch $arc \, tang \, y = 0$ ist. [Vergl. §. 310, (8).]

§. **843**. Um für das vorige Integral eine Reihe zu entwickeln, welche für Werthe von $x > a$ convergirt, bemerke man, dass

$$\frac{a^2}{a^2 + x^2} = \frac{a^2}{x^2 + a^2} = a^2 x^{-2} - a^4 x^{-4} + a^6 x^{-6} - \ldots,$$

also

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = \int dx \, (a^2 x^{-2} - a^4 x^{-4} + \ldots) = C - \frac{a^2}{x} + \frac{a^4}{3x^3} - \frac{a^6}{5x^5} + \ldots$$

Für $a = 1$ ist, da zugleich $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arc \, tang \, x$ ist:

$$arc \, tang \, x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots,$$

und da hier immer $x > 1$ sein muss, so kann man zur Bestimmung von C, nicht wie vorhin, $x = 0$ setzen; dagegen ist für $x = \infty$ sofort $arc \, tang \, x = \frac{1}{2}\pi$, demnach $C = \frac{1}{2}\pi$, und daher:

$$arc \, tang \, x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots;$$

eine Reihe, welche um so brauchbarer, je grösser x ist. [Auf dieselbe Art erhält man auch zwei Reihen für $\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$, s. III., 379.]

§. **844.** Zur Bestimmung des Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hat man, wenn $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem Binomial-Theorem entwickelt wird:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx\left(1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

$$= x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}+\ldots+C.$$

Da von der andern Seite auch $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x$ ist, so hat man

$$arc\sin x = x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\ldots+C.$$

Um dabei den kleinsten Bogen zu bestimmen, welcher dem Sinus $=x$ entspricht, bemerke man, dass für $x=0$ auch $arc\sin x=0$ sein muss; dadurch wird aber auch die Constante $C=0$ und damit die vorige Reihe so, wie wir sie bereits auch in §. 310 (7) gefunden haben.

§. **845.** Zur Entwickelung des Integrals $\int dx\sqrt{2ax-x^2}$ hat man

$$\sqrt{2ax-x^2} = \sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2a}\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3}-\ldots\right);$$

folglich, wenn man substituirt, integrirt und hierauf $2x^{\frac{3}{2}}$ als Factor nimmt:

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2} = 2x\sqrt{2ax}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a}\right)-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{x}{2a}\right)^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{x}{2a}\right)^3-\ldots\right]+C.$$

Hieraus erhält man auch das Integral $\int dx\sqrt{2ax+x^2}$.

§. **846.** Auf dieselbe Weise findet man auch:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{\frac{2x}{a}}\left[1+\frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{2a}\right)+\frac{1.3}{2.4.5}\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\left(\frac{x}{2a}\right)^3+\ldots\right]+C.$$

und $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\ldots+C.$

Eben so kann man auch allgemein das Integral $\int x^n dx (a+bx^m)^p$ behandeln. [III., 380 u. f.]

§. **847**. Setzt man für a^x die Reihe aus §. 292, so erhält man:

$$\int X a^x dx = \int X dx + la \int X x dx + \frac{la^2}{2} \int X x^2 dx + \ldots$$

1) Also z. B. für $X = x^n$:

$$\int x^n a^x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la\, x^{n+2}}{n+2} + \frac{la^2 x^{n+3}}{2(n+3)} + \ldots + C.$$

2) Für $X = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{a^x dx}{x} = lx + lax + \frac{la^2}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{la^3}{2.3}\frac{x^3}{3} + \ldots + C.$$

3) Setzt man in dieser letzteren Formel $a^x = z$, wodurch $x = \frac{lz}{la}$, $dx = \frac{dz}{zla}$ und $lx = llz - lla$ wird; so erhält man, das Glied $-lla$ zur unbestimmten Constante gerechnet:

$$\int \frac{dz}{lz} = llz + lz + \frac{lz^2}{2.2} + \frac{lz^3}{2.3^2} + \ldots + C.$$

§. **848**. Dass bei der Auflösung der gegebenen Differentialausdrücke in unendliche Reihen die einzelnen Glieder nicht nothwendig Monome sein müssen, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel. Zur Bestimmung des Integrals $y = \int \frac{dx \sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ hat man:

$$\sqrt{1 - e^2 x^2} = (1 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \ldots,$$

daher

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \ldots\right)$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^2}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^4}{2.4} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} - \text{etc.}$$

Es sind aber diese sämmtlichen Integrale bereits in §. 822 bestimmt worden, und man erhält, wenn man die dortigen Werthe substituirt, ferner, um abzukürzen, $\sqrt{1 - x^2} = X$ und $arc \sin x = A$ setzt, sofort:

$$y = A + \tfrac{1}{2} e^2 [\tfrac{1}{2} x X - \tfrac{1}{2} A]$$
$$+ \frac{1.1}{2.4} e^4 \left[x \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\right) X - \frac{1.3}{2.4} A\right]$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left[x \left(\frac{x^4}{6} + \frac{1.5}{4.6} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) X - \frac{1.3.5}{2.4.6} A\right] + \ldots + C;$$

eine Reihe, welche, da zugleich auch $x^2 < 1$ (wenn $\sqrt{1-x^2}$ reell) ist, um so stärker convergirt, je kleiner e ist.

Die Bernoullische Reihe.

§. **849.** Setzt man in der ursprünglichen Reductionsformel §. 810, nämlich in $\int X dx = Xx - \int x dX$, der Reihe nach (m) $dX = X'dx$, $dX' = X''dx$ etc.; so erhält man, $u = X'$ und $dv = xdx$, also $v = \frac{1}{2}x^2$ gesetzt, weiters:

$$\int x dX = \int X'x dx = X'\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2 dX';$$

$u = X''$ und $dv = x^2 dx$ gesetzt, wodurch $v = \frac{1}{3}x^3$ wird, ferner:

$$\int x^2 dX' = \int X''x^2 dx = \tfrac{1}{3}X''x^3 - \tfrac{1}{3}\int x^3 dX'' \text{ u. s. w.}$$

Diese Werthe gehörig einer in den andern substituirt, erhält man endlich:

$$\int X dx = Xx - \frac{X'x^2}{2} + \frac{X''x^3}{2.3} - \frac{X'''x^4}{2.3.4} + \ldots,$$

oder, da aus den vorigen Relationen (m)

$$X' = \frac{dX}{dx}, \quad X'' = \frac{dX'}{dx} = \frac{d^2X}{dx^2}, \quad X''' = \frac{d^3X}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

folgt, auch:

$$\int X dx = Xx - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{2.3} - \frac{d^3X}{dx^3}\frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + C;$$

eine Reihe, welche nach ihrem Erfinder die **Bernoullische** heisst.

Beispiel. Um nach dieser Reihe das Integral $\int \frac{dx}{1+x}$ zu bestimmen, hat man $X = \frac{1}{1+x}$, also $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1.2}{(1+x)^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-1.2.3}{(1+x)^4}$ u. s. w., folglich

$$\int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \ldots + C.$$

Wegen $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C'$ ist auch:

$$l(1+x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots,$$

wozu keine Constante gehört, weil für $x = 0$ auch $l(1+x) = 0$ werden muss.

Fünftes Capitel.

Von der Integration der *höhern* Differentialausdrücke *einer*, und der *Partialdifferentiale mehrerer* Variablen.

§. **850**. Bisher war immer der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = X$ oder die Differentialgleichung erster Ordnung $dy = X dx$ gegeben, aus welcher wir durch Integration y oder $\int X dx$ bestimmt haben.

Nehmen wir nun an, dass bloss der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = X$ oder die Gleichung zweiter Ordnung $d^2y = X dx^2$ bekannt sei, aus welcher man die ursprüngliche Function y herleiten soll; so ist es klar, dass diess nur durch eine zweimalige Integration möglich sei.

Es ist nämlich $\frac{d^2y}{dx} = X dx$, und wegen $\frac{d^2y}{dx} = d.\frac{dy}{dx}$ (indem dx als constant angenommen wird) auch $d.\frac{dy}{dx} = X dx$, also, wenn man integrirt: $\frac{dy}{dx} = \int X dx = f(x) + C$. Daraus folgt weiter: $dy = f(x)\, dx + C dx$, und wenn man abermals integrirt: $y = \int f(x) dx + Cx + C'$, wobei C' die Constante der zweiten Integration bezeichnet. Wegen $f(x) = \int X dx$ ist also auch: $y = \int dx \int X dx + Cx + C'$, wobei durch $\int dx \int X dx$ eine zweifache Integration angedeutet wird.

§. **851**. Ist die Differentialgleichung dritter Ordnung $d^3y = X dx^3$ gegeben, so findet man genau auf dieselbe Weise (durch Wiederholung des vorigen Verfahrens):

$$y = \int dx \int dx \int X dx + Cx^2 + C'x + C'',$$

wobei C, C', C'' die unbestimmten Constanten sind und das erste Glied rechts eine dreimalige Integration bedeutet, die so zu verstehen ist, dass wenn die aus der Integration von $X dx$ entspringende Function $= f(x)$ ist, sofort $f(x) dx$ neuerdings integrirt, und wenn dadurch $f'(x)$ entsteht, endlich nochmals $f'(x) dx$ integrirt werden soll. Diese wie-

derholte Integration deutet man, von den unbestimmten Constanten abgesehen, auf folgende, einfachere Art an: Aus $d^2y = Xdx^2$ folgt $y = \int\int Xdx^2 = \int^2 Xdx^2$; aus $d^3y = Xdx^3$ hat man $y = \int\int\int Xdx^3 = \int^3 Xdx^3$, und allgemein aus $d^n y = Xdx^n$, sofort $y = \int^n Xdx^n$.

Beispiel. Um z. B. aus dem Quotienten dritter Ordnung $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}$ die ursprüngliche Function y zu finden, hat man auch $d^3y = \frac{dx^3}{x^3}$, und daraus

$$y = \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^3} + Cx^2 + C'x + C''.$$

Es ist aber $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$, also

$$\int dx \int \frac{dx}{x^3} = -\int \frac{dx}{2x^2} = \frac{1}{1.2x}, \text{ und daher}$$

$$\int dx \int dx \int \frac{dx}{x^3} = \int \frac{dx}{1.2x} = \tfrac{1}{2} lx,$$

also endlich $y = \frac{1}{2} lx + Cx^2 + C'x + C''$.

Integration der *partiellen* Differentiale.

§. **852**. Bezeichnet u eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x, y, und ist der zweite partielle Differentialquotient $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = z$, also (§. 676) $z = f(x, y)$; so lässt sich, obschon hier zwei veränderliche Grössen x, y vorkommen, die urspr. Function u dennoch nach denselben, für die Integration der Differentialformeln einer Variablen aufgestellten Regeln herleiten; weil nach dem Sinne dieses Differentialquotienten der Reihe nach nur immer eine der beiden Grössen x, y als variabel, die andere aber als constant angesehen wird. Es ist nämlich, wenn man das Integral nach x durch $\int_x$ und jenes nach y durch $\int_y$ bezeichnet, wegen

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dy = \left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) dy = z\,dy,$$

wenn man auf beiden Seiten nach y integrirt: $\left(\frac{du}{dx}\right) = \int_y z\,dy$; daraus folgt: $\left(\frac{du}{dx}\right) dx = dx \int_y z\,dy$, und wenn man jetzt nach

x integrirt: $u = \int_x dx \int_y z\,dy$; dabei ist wegen Gleichung (m), §. 672, die Ordnung der beiden Integrationen, im Allgemeinen genommen, willkürlich, und es ist eben so gut auch $u = \int_y dy \int_x z\,dx$. — Kürzer und üblicher ist folgende Bezeichnung: $u = \int\int z\,dx\,dy$ oder $u = \int\int z\,dy\,dx$, wobei sich jedes der beiden Integralzeichen auf eine der beiden Variablen x und y bezieht; ein solches Integral wird auch ein doppeltes oder zweifaches (duplicirtes) Integral genannt.

§. **853.** In Betreff der willkürlichen Constanten muss noch bemerkt werden, dass man, der nöthigen Allgemeinheit wegen, dem Integral nach y eine unbestimmte Function von x, z. B. X, und dem Integral nach x eine unbestimmte Function von y, z. B. Y, beifügen muss, weil dadurch immer noch die Bedingung erfüllt wird, dass das Differential der Constante verschwindet, indem, wenn man nach y differentiirt, dX, und wenn man nach x differentiirt, dY Null wird. Da indess in der Anwendung diese Integrale immer innerhalb gewisser Grenzen (§. 872) genommen werden, so sind in diesem Falle auch diese willkürlichen Constanten entbehrlich.

Beispiel. Um das Integral $u = \int\int \frac{dx\,dy}{x+y}$ zu bestimmen, hat man, wegen $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \ldots$ (für $x < y$ schreibt man $\frac{1}{y+x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \ldots$) und $u = \int_x dx \int_y \frac{dy}{x+y}$, sofort:

$$\int_y \frac{dy}{x+y} = \int dy \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \ldots\right) = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3x^3} - \ldots + X,$$

wo X die Stelle der unbestimmten Constante vertritt, und daher:

$$u = \int dx \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \ldots + X\right)$$

$$= y\,lx + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^3}{6x^2} + \ldots + \int X\,dx + Y,$$

wobei Y eine willkürliche Function von y ist.

Bei Umkehrung der Ordnung der Integration erhält man genau dasselbe Resultat, wenn man nach der ersten (nach x ausgeführten) Integration die Funct. Y', und nach der zweiten (nach y genommenen) Integration jene X' als willkürl. Constante beifügt und $\int X\,dx = X'$, so wie $\int Y'\,dy = Y$ setzt.

§. 854. Es ist jetzt auch die Bedeutung des dreifachen (triplicirten) Integrals $\int\int\int v\,dx\,dy\,dz$, wobei v im Allgemeinen eine Funct. der drei unabhängig veränderlichen Grössen x, y, z sein soll, leicht zu verstehen. Es ist nämlich, wenn der partielle Quotient $\left(\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}\right)=v$ gegeben ist, daraus, wenn man zuerst nach z, dann nach y, und endlich nach x integriren will (im Allgemeinen ist die Ordnung wieder willkürlich):

$$u=\int\int\int v\,dx\,dy\,dz=\int_x dx\int_y dy\int_z v\,dz.$$

In Hinsicht auf die willkürl. Constanten ist wieder zu bemerken, dass man nach der in Bezug auf z durchgeführten Integration eine willkürl. Function von x, y, und so in den beiden übrigen, nach y und x ausgeführten Integrationen beziehungsweise eine Function von x, z und y, z beifügen muss.

Sechstes Capitel.

Von der Integration der *vollständigen*, ferner der *homogenen* Differentialformeln zweier oder mehrerer Variablen der *ersten* Ordnung.

Integration der vollständigen Differentialformeln.

§. 855. Da es für jede Function mehrerer Variablen sowohl partielle als vollständige Differentiale gibt, so kann man auch wieder umgekehrt die Function durch Integration ihres partiellen oder vollständigen Differentials zu finden verlangen. Das erstere ist, wie wir im vorigen Capitel sahen, immer, wenigstens näherungsweise möglich, indem sich das Verfahren auf die Integration von Functionen einer Variablen beschränkt. Schwieriger ist die letztere Aufgabe, die uns zum Theile jetzt beschäftigen soll; wir beschränken uns dabei auf die Differentialausdrücke der ersten Ordnung von Functionen zweier Variablen.

§. **856.** Es sei $u = f(x, y)$ eine Function der beiden unabhängigen Variablen x, y; so ist (§. 673)

$$(1)\quad du = P\,dx + Q\,dy$$

das vollständige Differential derselben, wobei im Allgemeinen P und Q neue Functionen von x und y sind, für welche (§. 677) die Bedingungsgleichung besteht:

$$(2)\quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Da aber (§. 673) $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$ ist, so erhält man, dieses partielle Differential nach x integrirt, daraus (§. 852)

$$(3)\quad u = \int_x P\,dx + Y,$$

wobei Y, als eine willkürl. Funct. von y, die Stelle der unbest. Constante vertritt. Diese Function Y wird aber hier durch die Bedingung bestimmt, dass (§. 673) $\left(\frac{du}{dy}\right) = Q$ sein muss. Differentiirt man daher diese Gleichung (3) nach y, und setzt das Integral (4) $\int_x P\,dx = v$; so erhält man: $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dY}{dy}$, folglich auch nach der vorigen Bedingungsgleichung sofort $Q = \left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dY}{dy}$. Aus dieser Gleichung folgt $dY = \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy$, und wenn man integrirt:

$$Y = \int \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy.$$

Man hat daher nach der Gleichung (3), mit Rücksicht auf jene (4):

$$(\text{I.})\quad u = v + \int \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy,$$

ein Ausdruck, welcher immer vollkommen bestimmt werden kann, weil die Differenz $Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)$, die wir der Kürze wegen durch S bezeichnen wollen, bloss eine Function von y ist, und also kein x enthält. Denn es ist, wenn man nach x differentiirt:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{d^2 v}{dy\,dx}\right),$$

oder wegen (§. 672)

$$\left(\frac{d^2 v}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2 v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right) \text{ auch}$$

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0,$$

nämlich zufolge der Bedingungsgleichung (2), zum Beweis, dass S kein x, und sofort höchstens die Variable y enthalten kann.

Anmerk. Kehrt man die Ordnung dieses Verfahrens in so weit um, dass man anstatt vom Coefficienten P, von jenem Q ausgeht, und setzt $\int_y Q dy = v'$; so erhält man die mit der obigen (I.) ganz analoge Gleichung:

$$u = v' + \int\left[P - \left(\frac{dv'}{dx}\right)\right]dx,$$

wobei eben so diese Differenz $P - \left(\frac{dv'}{dx}\right)$ kein y enthält.

Beispiel Um die Differentialformel $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, in welcher $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$ und $Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, folglich

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist, zum Beweis, dass sie vollständig sei, zu integriren, hat man $v = \int_x P dx = arc\,tang\left(\frac{x}{y}\right)$ (§. 782), $\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $Q - \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, also nach der obigen Formel (I.):

$$u = v = arc\,tang\left(\frac{x}{y}\right) + C. \quad \text{[III., 420.]}$$

Integration der *homogenen* Differentialausdrücke der ersten Ordnung.

§. **857**. Die in §. 679 entwickelte Relation (q), welche zwischen einer homogenen Function und dem Differential-Coefficienten ihres vollständigen Differentials Statt hat, bietet ein äusserst einfaches Verfahren zur Integration homogener Differentialausdrücke dar. Denn es sei $Pdx + Qdy + Rdz + \ldots = du$ ein vollständiges Differential einer Function u von den Variablen x, y, z, . . . und zugleich so beschaffen, dass P, Q, R, . . . homogene Functionen dieser Variablen von einem und demselben Grade m sind, wo-

durch also u eine homogene Function des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades wird; so ist zufolge der erwähnten Relation:

$$Px + Qy + Rz + \ldots = (m+1)u,$$

also

$$(A)\ \int(Pdx + Qdy + Rdz + \ldots) = \frac{Px + Qy + Rz + \ldots}{m+1} + C.$$

Beispiele. 1) Für das Integral $\int(y\,dx + x\,dy)$ ist $P = y$, $Q = x$, $m = 1$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$, also die Bedingung der Integrabilität vorhanden. Nach der vorigen Formel (A) ist demnach:

$$\int(y\,dx + x\,dy) = \frac{yx + xy}{2} = xy + C.$$

2) Um das Differentiale

$$du = (3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy$$

zu integriren, für welches $P = 3x^2 + 2ay^2$ und $Q = 4axy + 3by^2$ homog. Functionen des $(m=)\ 2^{\text{ten}}$ Grades sind, hat man wieder nach der genannten Formel:

$$u = \frac{(3x^2 + 2ay^2)\,x + (4axy + 3by^2)\,y}{3} = x^3 + 2axy^2 + by^3 + C,$$

und es ist hier u eine homog. Function des dritten Grades.

Anmerk. Für $m = -1$ führt die obige Formel (A) auf die identische Gleichung $0 = 0$, und zeigt dann gewöhnlich an, dass das gesuchte Integral nicht algebraisch ist, so, dass man dann wieder zur allgemeinen Integrationsmethode Zuflucht nehmen muss.

Siebentes Capitel.

Von der Integration der *Differentialgleichungen* der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen.

§. 858. Sind die Differential-Coefficienten der gesuchten Function nicht, wie bisher angenommen worden, unmittelbar oder explicit durch die unabhängigen variablen Grössen ausgedrückt, sondern hat man bloss (implicite) eine Relation oder Gleichung zwischen diesen Grössen; so muss man die ursprüngliche Function aus dieser Differentialgleichung entwickeln oder herleiten.

Eine solche Differentialgleichung, und zwar wie wir hier voraussetzen, zwischen zwei Variablen von der ersten Ordnung und vom ersten Grade, ist von der Form

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

und lässt sich immer auf jene (1) $Mdx + Ndy = 0$, wobei im Allgemeinen M und N Functionen von x und y sind, zurückführen. — Die vorzüglichsten Mittel, deren man sich zur Zurückleitung der ursprünglichen Gleichung oder Function aus ihrer Differentialgleichung (1) bedient, wenn nicht etwa ohnehin $Mdx + Ndy$ ein vollständiges Differential der Function $u = \varphi(x, y)$ ist, in welchem Falle man diese nach dem vorigen Capitel bestimmen und sofort $u = C$ finden wird, bestehen *a*) in der Absonderung der Variablen, und *b*) in der Auffindung des integrirenden Factors.

a) Von der *Absonderung* der veränderlichen Grössen.

§. 859. Der Zweck jenes Verfahrens, welches das Absondern der Variablen genannt wird, besteht darin, die gegebene Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ auf jene $Xdx + Ydy = 0$ zu bringen, in welcher X bloss eine Function von x und Y eine Function von y ist. In diesem Falle erhält man dann $\int Xdx + \int Ydy = C$, wo C eine will-

kürliche Constante bezeichnet, und das Ganze sonach auf die Integration von Differentialen einer Variablen zurückgeführt ist.

Beispiele. 1) Ist die Differentialgleichung $ydx + xdy = 0$ gegeben, so erhält man daraus durch Division mit xy (wodurch hier die Absonderung bewirkt wird): $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, und aus dieser Gleichung durch Integration, wenn man der willkürlichen Constanten die Form lC gibt: $lx + ly = lC$, d. i. $lxy = lC$ oder $xy = C$.

2) Die Absonderung ist ganz einfach, wenn die Gleichung (1) unter der Form $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ erscheint. So folgt z. B. aus der Differentialgleichung $dx\sqrt{1+y^2} - xdy = 0$ sofort: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$, und daraus durch Integration (§. 793): $lx = l(y + \sqrt{1+y^2}) + C$, oder wenn man der Constanten C die Form $-lC$ beilegt:

$$lCx = l(y + \sqrt{1+y^2}) \quad \text{oder} \quad Cx = y + \sqrt{1+y^2}.$$

3) Ist allgemein die Gleichung $XYdx + X'Y'dy = 0$ gegeben, so bewirkt man die Absonderung, indem man diese Gleichung durch $X'Y$ dividirt. Auf diese Weise erhält man z. B. aus der Gleichung $x^3 y\,dx + (2y - 1)\sqrt{x}\,dy = 0$ sofort:

$$\tfrac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2y - ly = C.$$

§. **860.** Ist die gegebene Differentialgleichung homogen, d. i. (§. 679) so beschaffen, dass M und N homogene Functionen von x und y und z. B. der n^{ten} Ordnung sind; so ist das Trennen oder Absondern der Variablen immer, und zwar dadurch möglich, dass man $y = xz$ setzt, wo z eine neue veränderliche Grösse ist. Denn da bei dieser Voraussetzung die Differential-Coefficienten M und N von der Form

$$Ax^\alpha y^\beta + Bx^\gamma y^\delta + \ldots$$

sind, wobei $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \ldots = n$ ist; so erhalten diese durch die genannte Substit. von xz statt y die Form: $x^n(Az^\beta + Bz^\delta + \ldots)$, so, dass man $M = x^n Z$ und $N = x^n Z'$, wo Z und Z' bloss noch Functionen von z sind, setzen kann. Dadurch wird aber die gegebene Differentialgleichung (1) (§. 858), wenn man zugleich auch für dy den aus $y = xz$ folgenden Werth $xdz + zdx$ substituirt:

$$Zx^n dx + Z'x^n(xdz + zdx) = 0,$$

aus welcher Gleichung man durch Absonderung

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z'dz}{Z + Z'z} = 0,$$

und daraus durch Integration

$$lx + \int \frac{Z'dz}{Z + Z'z} = C$$

erhält, in welcher Gleichung nach vollendeter Integration für z wieder der entsprechende Werth $\frac{y}{x}$ hergestellt wird.

Beispiel. Für die homogene Differentialgleichung

$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$$

erhält man, $y = xz$ gesetzt, nach gehöriger Reduction:

$$xdz = dx\sqrt{1 + z^2},$$

und daraus durch Absonderung: $\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} - \frac{x}{dx} = 0$. Diese letztere Gleichung integrirt, erhält man $lc(z + \sqrt{1 + z^2}) - lx = 0$, oder auch

$$c = \frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}} = \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = -y + \sqrt{x^2 + y^2},$$

oder endlich $x^2 - 2cy - c^2 = 0$ (wegen $z = \frac{y}{x}$, und wobei c die willkürliche Constante der Integration ist).

Und in der That erhält man wieder die gegebene Differentialgleichung, wenn man diese letzte Gleichung differentiirt und c aus dieser und der entstehenden Differentialgleich. eliminirt. [III., 478.]

§. **861.** In der gewöhnlich sogenannten **linearen** Gleichung der ersten Ordnung: $dy + Py\,dx = Q\,dx$, in welcher P und Q beliebige Functionen von x bezeichnen, lässt sich die Absonderung der Variablen auf eine sehr sinnreiche Weise bewirken. Setzt man nämlich $y = Xz$, also $dy = Xdz + zdX$, wobei X eine noch unbestimmte Funct. von x bezeichnet; so erhält man:

$$zdX + Xdz + PXzdx = Qdx.$$

Um nun diese Gleich. in zwei andere zu zerlegen, in welchen sich die Variablen absondern lassen, bestimme man die Funct. X dergestalt, dass $Xdz + PXzdx = 0$, folglich auch $zdX = Qdx$ wird. Die erste dieser beiden Gleich. durch X dividirt, gibt $dz + Pzdx = 0$ oder $\frac{dz}{z} = -Pdx$, und wenn man integrirt: $lz = -\int Pdx$, oder wenn e die

Basis der natürlichen Logarithmen ist, sofort auch

$$(\alpha)\quad z = e^{-\int P dx}.$$

Mit diesem Werthe von z gibt jetzt die zweite der angeführten Gleich.: $dX = Q e^{\int P dx} dx$, und wenn man integrirt: $(\alpha')\ X = \int Q\, dx\, e^{\int P dx} + C$. Da aber $y = Xz$ ist, so hat man endlich, wenn in dieser letztern Gleich. für X und z die Werthe aus (α) und (α') substituirt werden:

$$(\beta)\quad y = e^{-\int P dx}\left(\int Q\, dx\, e^{\int P dx} + C\right).$$

Beispiele. 1. Um die Gleich. $dy + y\, dx = x^2\, dx$ zu integriren, hat man $P = 1$ und $Q = x^2$, demnach $\int P dx = \int dx = x$, und nach der Formel (β): $y = e^{-x}(\int x^2 e^x dx + C)$, oder wegen (§. 832) $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$ endlich:

$$y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2.$$

Diese gefundene Gleichung differentiirt, gibt

$$dy = dx(2x - 2 - Ce^{-x}),$$

und wenn man aus diesen beiden letzten Gleich. die Constante C eliminirt, erhält man: $dy + y\, dx = x^2\, dx$, nämlich erst dadurch die ursprünglich gegebene Differentialgleichung wieder. Vergl. §. 683, Anmerk. [III., 481—483.]

2. Für die Gleich. $x\, dy + y\, dx + x^2\, dx = 0$ folgt $P = \frac{1}{x}$ und $Q = -x$, und daher $\int P dx = \int \frac{dx}{x} = lx$, also, wegen $e^{lx} = x$, sofort

$$y = \frac{1}{x}(C - \int x^2\, dx) = \frac{C}{x} - \tfrac{1}{3}x^2.$$

Anmerk. Durch das Absondern der Variablen kann man auf transcendente Integralausdrücke kommen, obschon der gegebenen Differentialgleichung, wie diess in den obigen Beispielen 1. und 2., §. 859 der Fall, ein algebraisches Integrale zum Grunde liegt.

Ein merkwürdiges Beispiel hiezu liefert die Differentialgleichung

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0 \quad . \; . \; . \; (a),$$

welche durch Absonderung in jene

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad . \; . \; . \; (a')$$

übergeht und auf das Integrale von transcendenter Form

$$\arcsin x + \arcsin y = c \quad . \; . \; . \; (1)$$

führt, wobei c die willkürliche Constante bezeichnet.

Integrirt man dagegen die gegebene Gleichung (a) theilweise (§. 810), so erhält man, wenn hier k die betreffende willkürliche Constante ist:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = k$$

(wenn man nämlich y als eine implicite, durch die Gleich. (a) bestimmte Function von x ansieht), oder da zufolge der Gleich. (a') das unterm Integralzeichen stehende Binom beständig Null ist, so erhält man aus der gegebenen Differentialgleichung auch das algebraische Integral:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = k \quad . \; . \; . \; (2).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=0$, so wird $k=y$, folglich wenn diese Werthe für x und k in der Gleich. (1) substituirt werden, auch $arc\,sin\,k = c$, wodurch also die Gleich. (1) die Form erhält:

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = arc\,sin\,k \quad . \; . \; . \; (3).$$

Es müssen aber offenbar diese beiden Gleichungen (2) und (3), wovon jede das vollständige Integral der Gleich. (a) ist, eine in die andere übergehen, und in der That resultirt die Identität dieser beiden Gleichungen aus der bekannten Relation

$$sin\,a\;cos\,b + sin\,b\;cos\,a = sin\,(a+b)$$

(wozu man nur $sin\,a = x$, $sin\,b = y$ und $sin\,(a+b) = k$ setzen darf) dergestalt, dass wenn diese Relat. nicht schon aus der Trigonometrie bekannt wäre, sie sofort aus diesen beiden Formeln (2) und (3) hervorgehen würde.

b) Aufsuchung des *integrirenden Factors.*

§. **862.** Aus §. 683 (Anmerk.) folgt, dass eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen nicht bloss aus der unmittelbaren Differentiation einer Gleichung mit zwei Variablen, sondern allgemein dadurch entsteht, dass man aus einer solchen und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung eine beliebige Constante eliminirt. Besitzt nun die erstere oder ursprüngliche Gleichung die Form $u = C$, wo $u = f(x, y)$ sein soll; so wird schon durch die unmittelbare Differentiation die Constante C eliminirt, indem man $du = 0$ erhält, und es ist klar, dass, wenn nicht etwa ein vorhanden gewesener gemeinschaftlicher Factor aufgehoben worden, aus dieser Differentialgleichung nach dem sechsten Capitel leicht wieder die ursprüngliche Gleichung $u = C$ zurückgeleitet werden könne, indem in diesem Falle du ein vollständiges Differential einer Function zweier Variablen x und y ist.

Ist z. B. $\frac{x}{y} = C$ die ursprüngliche Gleichung, so folgt daraus, wenn man differentiirt: $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$. Wird daher, ohne mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{y^2}$ abzukürzen, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

zur Integration gegeben; so findet man nach dem vorigen Capitel, da dieses Differential vollständig ist, ohne Schwierigkeit wieder $\frac{x}{y} = C$.

§. **863.** Hat man dagegen einen in $du = z\,d'u$ vorhandenen gemeinschaftlichen Factor z aufgehoben, so, dass nun $d'u$ kein vollständiges Differential mehr ist, und soll jetzt die Gleichung $d'u = 0$, die, wenn die ursprüngliche Gleichung nicht die genannte Form $u = C$ besitzt, auch durch die erwähnte Elimination der Constanten C entstehen kann, integrirt werden; so kann dieses in der vorliegenden Form, da jetzt die Integrabilitätsbedingung mangelt, nicht unmittelbar ausgeführt werden, und die Integration wird nur dann erst möglich, wenn man die unvollständige Differentialgleichung $d'u = 0$ wieder mit dem abgekürzten Factor z multiplicirt hat.

So erhält man im vorigen Beispiel durch Abkürzung des Factors $\frac{1}{y^2}$ die Gleichung $y\,dx - x\,dy = 0$ [man erhält diese Differentialgleichung aber auch, wenn die ursprüngliche Gleichung nicht $u = xy = C$, sondern $u = y - Cx = 0$ ist, und aus dieser und ihrer Differentialgleichung $du = dy - C\,dx = 0$ die Constante C eliminirt wird], welche, da $x\,dy - y\,dx$ kein vollständiges Differential ist [man findet

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = +1],$$

so nicht, sondern dann erst integrirt werden kann, nachdem man mit dem abgekürzten Facter $z = \frac{1}{y^2}$ multiplicirt hat.

Eben so wird die unvollständige Differentialgl. $3y\,dx + 2x\,dy = 0$ (welche entsteht, indem man die Gleichung $x^3y^2 = C$ differentiirt und dann durch x^2y abkürzt) durch die Multiplication mit dem Factor $z = x^2y$ vollständig und integrabel.

§. **864.** Erklärung. Ein solcher Factor nun, mit welchem man eine unvollständige Differentialgleichung mul-

tipliciren muss, um sie vollständig und integrabel zu machen, heisst integrirender Factor, und es gibt für jede unvollständige Differentialgleichung zwischen zwei Variablen, die den ersten Grad nicht übersteigt und von einer Gleich. $\varphi(x, y, C) = 0$ abgeleitet worden, immer einen integrirenden Factor z, welcher im Allgemeinen eine Function von x und y ist.

§. **865**. Zur Entwickelung des Verfahrens, den integrirenden Factor aufzufinden, sei $Mdx + Ndy = 0$ eine unvollständige Differentialgleichung und $z = f(x, y)$ der zugehörige integr. Factor, so, dass nunmehr $Mzdx + Nzdy = 0$ eine vollständige Differentialgleichung ist, mithin die Bedingungsgleichung besteht: $\left(\frac{d.Mz}{dy}\right) = \left(\frac{d.Nz}{dx}\right)$. Diese letztere Gleichung entwickelt, gibt, wenn man gleich transferirt:

$$(1) \quad M\left(\frac{dz}{dy}\right) - N\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right]z = 0.$$

§. **866**. Wäre man nun allgemein im Stande, aus dieser Gleichung (1) einen Werth für z zu finden, so würde die Aufgabe gelöst und ein integrirender Factor für die gegebene Differentialgleichung gefunden sein; allein die Integration dieser Gleichung, die dabei nöthig wird, ist in der Regel schwieriger als die der ursprünglichen oder gegebenen Gleichung selbst, und es ist bis jetzt nur erst unter gewissen Bedingungen möglich, diesen Factor z vollkommen zu bestimmen. Diese Bedingungen sind: erstens, wenn z eine Function entweder bloss von x oder bloss von y zu sein braucht, und zweitens, wenn die gegebene Differentialgleichung homogen ist; beide diese Fälle wollen wir nun weiter untersuchen.

§. **867**. Es sei also z z. B. bloss eine Function von x, so, dass es hinreicht, die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, um sie vollständig und integrabel zu machen, mit einer gewissen Function von x zu multipliciren; so wird $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, und

die obige Gleichung (1) verwandelt sich in folgende:

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] dx,$$

oder da der zweite Theil der Gleichung kein y enthalten kann (indem sonst z auch von y abhängig wäre) und bloss eine Function von x ist, so sei:

$$(2) \quad \frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = X,$$

also $\frac{dz}{z} = X dx$; so ist, wenn man integrirt:

$$lz = \int X dx \quad \text{oder} \quad (\text{I}) \; z = e^{\int X dx}.$$

§. **868**. Genau eben so erhält man bei der Voraussetzung, dass z bloss eine Function von y sein darf, für

$$(3) \quad \frac{1}{M}\left[\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{dM}{dy}\right)\right] = Y \text{ sofort } (\text{II}) \; z = e^{\int Y dy}.$$

Anmerk. Die beiden Gleichungen (2) und (3) dienen zugleich als Kennzeichen, ob der gesuchte integrirende Factor z bloss eine Function von x oder von y sein darf. — Wird in (2) X oder in (3) $Y = 0$, so ist diess ein Zeichen, dass z constant und die gegebene Gleichung schon an und für sich eine vollständige Differentialgleichung ist.

Beispiel. Für die gegebene Differentialgleichung

$$dx + (adx + 2by\,dy)\sqrt{1 + x^2} = 0$$

ist $M = 1 + a\sqrt{1 + x^2}$ und $N = 2by\sqrt{1 + x^2}$, folglich

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2bxy}{\sqrt{1 + x^2}},$$

also die Integrabilitäts-Bedingung nicht vorhanden. Weil aber nach Gleichung (2) (§. 867) $X = -\frac{x}{1 + x^2}$ bloss eine Function von x ist, so lässt sich der integrirende Factor nach Form. (I.) des vorhergehenden Paragraphes bestimmen. Es ist nämlich

$$\int X dz = -\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} = -\tfrac{1}{2} l(1 + x^2) = -l\sqrt{1 + x^2} \text{ (§. 780)},$$

daher $z = e^{-l\sqrt{1+x^2}}$ oder $lz = -l\sqrt{1 + x^2} = l\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, das ist

$z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ als gesuchten integrirenden Factor. Die gegebene Gleich. damit multiplicirt, gibt $\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + adx + 2by\,dy = 0$, welche Gleichung nun in der That integrirbar ist; denn man hat

$$(\text{§. } 793) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$\int a\,dx = ax \quad \text{und} \quad \int 2by\,dy = by^2;$$

also die gesuchte Integralgleichung:

$$ax + by^2 + l(x+\sqrt{1+x^2}) = C.$$

§. **869**. Ist aber zweitens die gegebene Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ homogen, sind nämlich M und N homogene Functionen von x und y und gesetzt vom n^{ten} Grade; so sei der gesuchte integrirende Factor z vom m^{ten} Grade. Bemerkt man nun, dass in der vollständigen Differentialgleichung (1) $Mz\,dx + Nz\,dy = du$ die Glieder Mz und Nz, welche sofort vom $m+n^{\text{ten}}$ Grade sind, durch das Differentiiren von u eine Dimension verlieren (vergl. §. 679), so war u nothwendig vom Grade $m+n+1$, und es ist zufolge des in §. 679 entwickelten Satzes:

$$Mzx + Nzy = (m+n+1)u.$$

Die vorige Gleichung (1) durch diese getheilt, erhält man, wenn gleich durch z abgekürzt wird:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} = \frac{1}{m+n+1}\,\frac{du}{u}.$$

Da nun aber der zweite Theil der Gleichung integrabel ist, so muss es auch der erste sein, woraus sofort folgt, dass hier $z = \frac{1}{Mx+Ny}$ der gesuchte integrirende Factor ist.

Anmerk. 1. Hat man für die Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ einen integrirenden Factor z gefunden, so können daraus noch unzählige andere abgeleitet werden. Denn multiplicirt man die vollständige Gleichung $Mzdx + Nzdy = du$ mit einer beliebigen Function von u, so ist $Mz\varphi(u)dx + Nz\varphi(u)dy = \varphi(u)du$ immer noch eine vollständige Differentialgleichung [weil $\varphi(u)du$ ein vollständiges Differential ist]. Alle Factoren also, die nur immer aus $z\varphi(u)$ abgeleitet werden können, sind für die gegeb. Differentialgleich. integrirende Factoren.

Anmerk. 2. Die auf diese Art vervollständigten Differentialgleichungen $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$ gehören zum Grade -1, und können daher (§. 857, Anmerk.) nicht nach §. 857 integrirt, sondern müssen auf gewöhnliche Art behandelt werden.

Beispiel. Für die homogene, unvollständige Differentialgleichung $y^2dx + x^2dy - xydy = 0$ ist $M = y^2$, $N = x^2 - xy$; folglich der in-

tegrirende Factor: $\frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{x^2 y}$. Die gegeb. Gleich. damit multiplicirt, gibt: $y \frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0$, und da in dieser Gleichung

$$P = \frac{y}{x^2},\quad Q = \frac{1}{y} - \frac{1}{x},\quad \text{also } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}$$

ist, so ist sie in der That vollständig und sofort integrabel. Wird die Integration ausgeführt, so erhält man $-\frac{y}{x} + ly = C$ für die gesuchte Integralgleichung.

Achtes Capitel.

Bestimmte Integrale und Anwendung derselben auf die Rectification und Quadratur ebener Curven, Quadratur oder Complanation krummer Oberflächen und Cubatur der von ihnen begrenzten Körper.

Bestimmte Integrale oder das Integriren innerhalb bestimmter Grenzen.

Erklärungen.

§. **870.** 1) Da man jedem Integral, um demselben die nöthige Allgemeinheit zu geben, eine unbestimmte Constante beifügen muss; so wird ein solches, mit dieser Constante versehenes Integral ein vollständiges oder allgemeines, und so lange die Const. nicht bestimmt ist, auch ein unbestimmtes Integral, dagegen wenn die Constante C einen bestimmten Werth erhalten hat, ein besonderes oder particuläres Integral genannt. Wird aber einem Integral gar keine Constante beigefügt, so wird es (den Fall ausgenommen, in welchem $C = 0$ ist) ein unvollständiges oder incompletes Integral genannt.

Ist nämlich $f(x)$ die durch Integration des Differentialausdruckes $X dx$ entstehende Function, so ist (1) $\int X dx = f(x) + C$ ein vollständiges, unbestimmtes Integral, wenn C die noch unbestimmte Constante bezeichnet.

(2) $\int X dx = f(x) + c$ ein besonderes Integral, wenn c ein bestimmter Werth der Const. C ist. (3) $\int X dx = f(x)$ ein unvollständiges Integral (wenn nicht etwa $C = c = 0$ geworden).

§. 871. 2) Weiss man aus der Natur des betreffenden Gegenstandes, dass für $x = a$ das Integral $\int X dx = A$ sein muss; so hat man aus dem unbestimmten Integral (1) zur Bestimmung der Constante C die Bedingungsgleichung $A = f(a) + C$, daraus $C = A - f(a)$, und daher, wenn dieser Werth in (1) substituirt wird, das particuläre Integral: $\int X dx = f(x) - f(a) + A$. Wird dann noch der Werth des Integrals $\int X dx$ für $x = b$ durch B bezeichnet, so hat man $B = f(b) - f(a) + A$ oder (4) $B - A = f(b) - f(a)$ als das vollkommen bestimmte Integral.

Die beiden Werthe $x = a$ und $x = b$ heissen Grenzen des Integrals, und wenn diese gegeben sind, so wird im eigentlichen Sinne das Integral ein bestimmtes genannt, oder man sagt, das Integral sei innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ genommen, und wird diess jetzt allgemein (nach Fourrier) durch $\int_a^b X dx$, oder wenn das Integral $\int X dx$ zwischen den Grenzen $x = x_0$ und $x = x_\omega$ zu nehmen ist, durch $\int_{x_0}^{x_\omega} X dx$ angedeutet.

§. 872. Wie die vorige Gleich. (4) zeigt, wird dieses bestimmte, innerhalb gegebener Grenzen zu entwickelnde Integral, ohne dass man erst die Constante C zu bestimmen braucht, auch gefunden, indem man in dem allgemeinen Integral (1) zuerst $x = b$ (bei welchem Werthe nämlich das Integral enden soll), ferner $x = a$ (wobei es anfangen soll) setzt, und das letztere Resultat vom erstern abzieht; denn man erhält dadurch: (5) $\int_a^b X dx = f(b) - f(a)$, wobei $X dx = d.f(x)$ ist.

Da sich nun aber bei diesem Verfahren die Const. C aufhebt, so erhält man dasselbe Resultat auch aus dem un-

vollständigen Integral (3); es ist daher bei einem Integral, welches innerhalb bestimmter Grenzen genommen werden soll, nicht erst nothwendig, eine unbest. Constante beizufügen. [Häufig jedoch benützt man sie zur Bestimmung des Anfangs des Integrals, wodurch man sofort $\int_a X dx = f(x) - f(a) + A$ erhält].

§. **873.** Setzt man $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, also $f(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$, so ist nach der vorigen Relation (5) das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = \varphi(x_\omega) - \varphi(x_0) \ldots (6).$$

Bezeichnet nun Δx eine beliebige Zunahme von x innerhalb der Grenzen von $x = x_0$ bis $x = x_\omega$ und nehmen wir an, dass $x_0 < x_\omega$ und $\varphi(x)$ innerhalb dieser Grenzen endlich und continuirlich sei; so hat man nach dem Taylor'schen Theorem (§. 662) für die Differenz

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = [\varphi'(x) + \alpha]\Delta x = [f(x) + \alpha]\Delta x,$$

wobei α eine Function von x bezeichnet, welche gleichzeitig mit Δx verschwindet.

Lässt man nun x successive (in gleichen oder ungleichen, jedoch unendlich klein werdenden Intervallen) von $x = x_0$ bis $x = x_\omega$ zunehmen, d. i. (wenn man sofort zur Vereinfachung gleiche Intervalle nimmt) x allmälich in x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, ... $x_0 + n\Delta x = x_\omega$ übergehen, wodurch (c) $\Delta x = \frac{x_\omega - x_0}{n}$ wird; so folgt aus der letztern Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = [f(x_0) + \alpha]\Delta x,\\
&\varphi(x_0 + 2\Delta x) - \varphi(x_0 + \Delta x) = [f(x_0 + \Delta x) + \alpha]\Delta x,\\
&\varphi(x_0 + 3\Delta x) - \varphi(x_0 + 2\Delta x) = [f(x_0 + 2\Delta x) + \alpha]\Delta x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(x_0 + n\Delta x) - \varphi(x_0 + (n-1)\Delta x) = [f(x_0 + (n-1)\Delta x) + \alpha]\Delta x.
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen summirt, so erhält man in der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles von $x = x_0$ bis $x = x_0 + n\Delta x$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, sofort:

$$\varphi(x_0 + n\varDelta x) - \varphi(x_0) = \Sigma[f(x) + \alpha]\varDelta x, \text{ d. i.}$$
$$\varphi(x_\omega) - \varphi(x_0) = \Sigma f(x)\varDelta x + \Sigma\alpha\varDelta x \; . \; . \; . \; (i).$$

Nimmt nun n unendlich zu, in Folge dessen $\varDelta x$ gegen Null convergirt oder unendlich klein wird (d. i. in dx übergeht), so convergirt dabei auch die Summe $\Sigma\alpha\varDelta x$ gegen Null oder es ist $lim. \Sigma\alpha\varDelta x = 0$; denn es ist allgemein (also selbst für ungleiche Intervalle) die Summe der unendlich vielen, unendlich kleinen Glieder $\varDelta x + \varDelta x' + \varDelta x'' + \ldots = x_\omega - x_0 = C$ eine endliche Grösse, folglich ist, wenn man die Glieder derselben beziehungsweise mit den unendlich kleinen Grössen α, α', α'', . . ., unter denen α_1 die grösste sein mag, multiplicirt, offenbar $\alpha\varDelta x + \alpha'\varDelta x' + \alpha''\varDelta x'' + \ldots < \alpha_1 C$, also, da α_1 gegen Null convergirt:

(m) $lim. (\alpha\varDelta x + \alpha'\varDelta x' + \alpha''\varDelta x'' + \ldots) = lim. \Sigma(\alpha\varDelta x) = 0.$

Geht man sonach auf die Grenze über [welche sich auf das unendliche Wachsen von n in der obigen Relat. (c) bezieht], so folgt aus der vorigen Gleichung (i) mit Rücksicht auf jene (6):

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = lim. \Sigma f(x)\varDelta x = \Sigma f(x)\,dx \; . \; . \; . \; (7).$$

Hieraus folgt also, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nichts anderes als die Grenze der Summe aus den unendlich kleinen Gliedern ist, welche aus dem Differentiale $f(x)\,dx$ bei dem successiven Wachsen der Variablen x von a bis b entstehen.

Dieser Satz lässt sich auch auf geometrische Weise, wie folgt, nachweisen.

Fig. 87. Es sei $A'B$ (Fig. 87) irgend eine zwischen den Grenzen $A'A = a$ und $A'K = b$, d. i. den Puncten D und L continuirliche Curve, $y = f(x)$ ihre Gleichung, also für $A'P = x$ die rechtwinkelige Ordinate $PM = y$, ferner $A'P' = x + \varDelta x$ und $P'M' = y + \varDelta y$ (wenn man nämlich die Ordinaten als wachsend annimmt), also $PP' = \varDelta x$ und $M'a = Mb = \varDelta y$; so ist die Fläche des Rechteckes $PMaP' = y\varDelta x$, so wie jene des Segmentes $PMM'P' = y\varDelta x + \alpha$, wobei α als die Fläche des Dreieckes $MM'a$ jedenfalls $<$ als die Fläche des Rechteckes ab, d. i. $\alpha < \varDelta y \varDelta x$ ist.

Bezeichnet man daher die von der Curve DL begrenzte Fläche $ADLK$ durch u, so ist, wenn man die sämmtlichen Segmente summirt:

$$u = \Sigma(y\,\Delta x) + \Sigma(\alpha),$$

und da bei der unendlichen Abnahme von Δx auch Δy gegen Null convergirt oder unendlich klein wird, also [obige Gleichung (m)] $lim.\,\Sigma(\Delta y\,\Delta x) = 0$, folglich um so mehr (bei der unendlichen Zunahme von n in $\Delta x = \frac{b-a}{n}$) $lim.\,\Sigma(\alpha) = 0$ ist; so folgt

$$u = lim.\,\Sigma(y\,\Delta x) = lim.\,[f(x)\,\Delta x].$$

Nun wird aber auch das Flächenelement (§. 715) durch $y\,dx = f(x)\,dx$, also die Fläche ganz allgemein oder unbestimmt durch das Integral $\int y\,dx$ ausgedrückt, also ist im vorliegenden Falle die bestimmte (zwischen den Ordinaten AD und KL liegende) Fläche $u = \int_a^b f(x)\,dx$, und sonach, wie oben, $\int_a^b f(x)\,dx = lim.\,\Sigma[f(x)\,\Delta x]$ *).

*) Da sonach das Integriren eigentlich in nichts anderm als im Summiren unendlich vieler, unendlich kleiner Glieder besteht, so gebrauchte auch Leibnitz anstatt des heute üblichen (von Bernouilli vorgeschlagenen) Ausdruckes Integral durchgehends das Wort Summe, von welchem das Zeichen $\int$ die Abkürzung ist.

Ein bestimmtes Integral von der Form $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$, wobei α die Variable, $f(\alpha)$ irgend eine Function derselben und a, b zwei constante Grössen bezeichnen, hat im Allgemeinen einen bestimmten constanten Werth, und kann, wenn man demselben eine geometrische Bedeutung beilegen will, als die Fläche einer Curve angesehen werden, deren Abscisse α und Ordinate $f(\alpha)$ ist, und wobei die Fläche durch die Abscissenaxe, die Curve und diejenigen beiden Ordinaten begrenzt wird, denen die Abscissen $\alpha = a$ und $\alpha = b$ entsprechen. Der Werth dieses Ausdruckes kann immer entweder genau oder näherungsweise angegeben werden, mit Ausnahme jener Fälle, in welchen die Ordinate oder Function $f(\alpha)$ für einen oder mehrere Werthe von α, welche innerhalb der Grenzen a und b liegen, unendlich gross wird.

Man kann jedoch von dieser Auffassungsweise auf eine noch allgemeinere übergehen und annehmen, dass die mit $f(\alpha)$ bezeichnete Function eine veränderliche Grösse x in sich enthalte, in welchem Falle dann der obige Ausdruck aufhört eine constante Grösse zu bedeuten, indem er eine Function der Variablen x wird, welche von der Form der Function $f(\alpha)$ und den beiden Grenzen abhängt. Denn sobald die angezeigte bestimmte Integration in Beziehung auf α ausgeführt worden, ist diese Grösse α verschwunden, und es bleibt nur noch eine Function, welche die Variable x enthält.

§. 874. Aus der obigen Darstellungsweise des bestimmten Integrales von (1) $\int_{x_0}^{x_\omega} X dx = f(x_\omega) - f(x_0)$ folgt auch, dass man das Intervall der gegebenen Grenzen der Integration x_0, x_ω durch Einschaltung anderer Werthe x_1, x_2, ... der Variablen x, in zwei, drei und mehrere Intervalle zerlegen und sonach setzen kann:

$$\int_{x_0}^{x_\omega} X dx = \int_{x_0}^{x_1} X dx + \int_{x_1}^{x_\omega} X dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} X dx + \int_{x_1}^{x_2} X dx + \int_{x_2}^{x_\omega} X dx = \text{etc.},$$

weil offenbar

$$f(x_\omega) - f(x_0)$$
$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_\omega) - f(x_1)$$
$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_\omega) - f(x_2) \text{ u. s. w.}$$

ist.

Dabei können die Werthe x_1, x_2, ... übrigens auch ausserhalb des Intervalles von x_0, x_ω liegen.

Anmerk. Wegen $\int_{x_\omega}^{x_0} X dx = f(x_0) - f(x_\omega)$ folgt durch Vergleichung mit der obigen Formel (1):

$$\int_{x_0}^{x_\omega} X dx = - \int_{x_\omega}^{x_0} X dx,$$

d. h. man kann die beiden Grenzen eines bestimmten Integrals mit

Es kann aber ausserdem die Variable x in den durch a und b bezeichneten Grenzen enthalten sein, so, dass also der allgemeinste Ausdruck eines bestimmten Integrales, welches eine Function von x darstellt, sofort sein wird:

$$X = \int_{F(x)}^{\varphi(x)} f(\alpha, x)\, dx.$$

Wir müssen uns hier mit dieser Andeutung begnügen, und bezüglich der weiteren Ausführung dieses interessanten Capitels auf grössere Werke, z. B. auf Navier's Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit Zusätzen von Liouville (übersetzt aus dem Französischen von Dr. Theod. Wittstein), Jolly's Anleitung zur Differential- und Integralrechnung u. s. w., verweisen.

einander verwechseln, wenn man das Vorzeichen desselben ändert; eine Bemerkung, von welcher in der Anwendung ein häufiger Gebrauch gemacht wird.

§. 875. Setzt man nach dem vorhergehenden §.

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\,dx,$$

so wird, im Falle x_1 das arithmetische Mittel zwischen x_0 und x_ω, und dabei die Function $f(x)$ so beschaffen ist, dass sie zu beiden Seiten dieses Mittels, z. B. für $x = x_1 - a$ und $x = x_1 + a$, paarweise gleiche Werthe mit denselben Vorzeichen besitzt, sofort:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\,dx, \text{ daher auch}$$

$$(m) \quad \int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = 2\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = 2\int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\,dx;$$

dagegen, wenn die Function $f(x)$ für diese Werthe $x_1 - a$ und $x_1 + a$ zwar gleiche absolute Werthe, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen erhält, sofort

$$(n) \quad \int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = 0 \text{ wird.}$$

Anmerk. Die Formel (*m*) begründet in gewissen Fällen eine Vereinfachung des Verfahrens, wovon in der Anwendung ein häufiger Gebrauch gemacht wird.

So ist z. B.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2; \text{ dagegen}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) + \left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

§. 876. Beispiele über die bestimmten Integrale.

1) Um die bestimmten Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2\, dx$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2\, dx$ zu finden, hat man zuerst $\int \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ und $\int \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$; mithin ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

2) Zur Bestimmung des Integrales (dessen eine Grenze Unendlich ist, wobei aber immer noch $f(x)$ endlich und continuirlich bleibt $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$ hat man zuerst $\int e^{-x}\, dx = C - e^{-x}$, daher $\int_0^b e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{e^b}$, und wenn $b = \infty$ wird: $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$.

3) Um das Integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ zu finden, hat man zuerst für das allgemeine Integral [§. 775, Form. (14)] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a}$. Folglich wegen $\operatorname{arc\,tang} \infty = \frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{arc\,tang} 0 = 0$ sofort

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

4) Eben so ist $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\infty} e^{nx}\, dx = \infty$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$, $\int_0^{\infty} e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n}$, dagegen ist $\int_0^{\infty} \cos x\, dx = \sin\infty - \sin 0$ unbestimmt.

5) Um das Integral $\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{bx - x^2}}$ innerhalb der Grenzen von $x = 0$ bis $x = b$, d. i. das bestimmte Integral $\int_0^b \frac{x^n\, dx}{\sqrt{bx - x^2}}$ zu finden, hat man zuerst nach Formel (α), §. 825, wenn man $2a = b$ setzt:

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \frac{-x^{n-1}\sqrt{bx - x^2}}{n} + \frac{(2n-1)b}{2n} \int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{bx - x^2}},$$

und da der integrirte Theil sowohl für $x = 0$ als auch für $x = b$ verschwindet, so wird

$$(p) \quad \int_0^b \frac{x^n\, dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \frac{(2n-1)}{2n} b \int_0^b \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{bx - x^2}}.$$

Setzt man in dieser Formel der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$

und bemerkt, dass wegen (§. 775) $\int \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = arc\, sinv \left(\frac{2x}{b}\right)$ sofort $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = arc\, sinv\, 2 - arc\, sinv\, 0 = \pi - 0 = \pi$ ist; so hat man, wenn noch Kürze halber $\sqrt{bx - x^2} = X$ gesetzt wird:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{X} = \frac{b}{2}\int_0^b \frac{dx}{X} = \frac{b}{2}\pi,$$

$$\int_0^b \frac{x^2\,dx}{X} = \tfrac{3}{4} b \int_0^b \frac{x\,dx}{X} = \frac{1.3}{2.4} b^2 \pi,$$

.

$$\int_0^b \frac{x^m\,dx}{X} = \frac{2m-1}{2m} b \int_0^b \frac{x^{m-1}\,dx}{X} = \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4.6....2m} b^m \pi.$$

6) Um die Differentialgleichung $dt = \frac{r\,dx}{2\sqrt{g(b-x)(2rx - x^2)}}$ von $x = 0$ bis $x = b$ zu integriren (ein in der Lehre vom Pendel vorkommender Fall), hat man:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{g}} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2r - x}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{2r - x}} = (2r - x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4r^2} + \ldots\right),$$

demnach, wenn dieser Werth substituirt und um abzukürzen, $\sqrt{bx - x^2} = X$ gesetzt wird:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{2rg}}\left[\int_0^b \frac{dx}{X} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^b \frac{x\,dx}{X} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4r^2}\int_0^b \frac{x^2\,dx}{X} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8r^3}\int_0^b \frac{x^3\,dx}{X} + \ldots\right],$$

und wenn man die im vorigen §. für diese bestimmten Integrale gefundenen Werthe substituirt, endlich:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\left(\frac{b}{2r}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2r}\right)^3 + \ldots\right].$$

7) Um das bestimmte Integral $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\varphi\, d\varphi \sqrt{1 - a^2 sin\,\varphi^2}$ zu finden, setze man $\sqrt{1 - a^2 sin\,\varphi^2} = x$, so wird $sin\,\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{1 - x^2}$, $d\varphi = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{a^2 - 1 + x^2}}$, und daher, wenn man diese Werthe in y substituirt und bemerkt, dass für die beiden Grenzen, zwischen wel-

chen das Integral zu nehmen ist, d. i. für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Variable x beziehungsweise $= 1$ und $= \sqrt{1-a^2}$ wird, sofort:

$$y = \int_1^{\sqrt{1-a^2}} \frac{-x^2\,dx}{a\sqrt{a^2-1+x^2}} \text{ oder auch (Anmerkung in §. 874)}$$

$$y = \frac{1}{a}\int_{\sqrt{1-a^2}}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-1+x^2}}.$$

Nach der Formel (B) in §. 814 ist aber, wenn man Kürze halber $a^2 - 1 + x^2 = X$ setzt (wegen $n = 2$, $m = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $a = a^2 - 1$ und $b = 1$)

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x\sqrt{X}}{2} - \frac{a^2-1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

oder wegen (§. 793) $\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = l(x+\sqrt{X})$, sofort:

$$\frac{1}{a}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x\sqrt{X}}{2a} - \frac{a^2-1}{2a}\,l(x+\sqrt{X}).$$

Berücksichtiget man nun, dass in y für die obere Grenze von $x = 1$ die Wurzelgrösse $\sqrt{X} = a$, und für die untere Grenze von $x = \sqrt{1-a^2}$ $\sqrt{X}$ gleich Null wird; so hat man endlich:

$$y = \frac{a}{2a} - \frac{a^2-1}{2a}\,l(1+a) - \left[-\frac{a^2-1}{2a}\,l(\sqrt{1-a^2})\right],$$

oder nach einer einfachen Reduction:

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a^2-1}{a}\,l\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\right)\right].$$

Noch einfacher gelangt man zu diesem Resultate, wenn man in dem gegebenen Ausdrucke von y, $\cos\varphi = x$ und $\frac{1-a^2}{a^2} = \alpha^2$ setzt, denn dadurch erhält man $\sin\varphi = \sqrt{1-x^2}$, $d\varphi = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, und mit Rücksicht auf die nöthige Aenderung in den Grenzen:

$$y = -a\int_1^0 dx\sqrt{\alpha^2+x^2} = a\int_0^1 dx\sqrt{\alpha^2+x^2}.$$

Es ist aber (§. 819, 1.)

$$\int dx\sqrt{\alpha^2+x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2+x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,l(x+\sqrt{\alpha^2+x^2}),$$

und daraus ganz einfach, nach einigen Reductionen, und wenn man den Werth von α^2 wieder herstellt:

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1-a^2}{a}\,l\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a^2-1}{a}\,l\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\right)\right],$$

wie zuvor.

Anmerk. Aus diesem letztern Beispiele ist ersichtlich, dass wenn man in einem bestimmten Integrale $\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx$ für die Variable x eine neue Veränderliche, z. B. u, welche mit der ursprünglichen x durch die Gleichung $x = \varphi(u)$ zusammenhängen mag, einführen will, man zugleich auch die Integrationsgrenzen in der Art ändern müsse, dass dabei die ursprüngliche Bedeutung beibehalten wird. Man muss nämlich bei dieser Annahme von $x = \varphi(u)$ für dx sofort $\frac{d\varphi(u)}{du}du$ [§. 633, Relat. (4)], und statt den Grenzen x_0, x_ω diejenigen Werthe von u setzen, welche sich beziehungsweise aus den Gleichungen $x_0 = \varphi(u)$ und $x_\omega = \varphi(u)$ für u ergeben.

§. 877. Im Falle in dem Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ die Function $f(x)$ für die Grenze $x = b$ Unendlich, d. i. $f(b) = \infty$ wird, darf man zu dessen Bestimmung dasselbe nur als Grenze des Integrales $\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ ansehen, in welchem α bis Null abnimmt.

Eben so sieht man das genannte bestimmte Integral, wenn in demselben $f(x)$ für $x = a$ Unendlich, nämlich $f(a) = \infty$ wird, als die Grenze des Integrals $\int_{a+\alpha}^b f(x)\,dx$ an, wobei wieder α bis Null abnimmt.

Wird endlich $f(x)$ für einen zwischen a und b liegenden Werth c, d. i. $f(c)$ Unendlich oder discontinuirlich, so betrachtet man das in Rede stehende Integral (nach §. 874) unter der Form:

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim. \int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + lim. \int_{c+\beta}^b f(x)\,dx,$$

wobei α und β bis Null abnehmen.

Dadurch ist zugleich das einzuschlagende Verfahren für jene Fälle angezeigt, in welchen in dem bestimmten Integral, $f(x)$ für mehrere zwischen a und b liegende Werthe von x Unendlich oder discontinuirlich wird.

Um dieses Verfahren wenigstens auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, sei das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ zu bestimmen.

Nun ist das allgemeine Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}+C$,
folglich das bestimmte

$$\int_0^{1-\alpha}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2-2\sqrt{\alpha},$$

und wenn man jetzt $\alpha=0$ setzt:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Anmerk. Die Eigenschaft der bestimmten Integrale lässt sich auch zur Ableitung der Taylor'schen Reihe, und zwar auf folgende Weise benützen.

Nach der Relation (5) in §. 872 ist, wenn man sich Kürze halber der Lagrange'schen Bezeichnung (§. 629) bedient, sofort

$$\int_x^{x+h} f'(x)\,dx = f(x+h)-f(x).$$

Setzt man nun im ersten Theil dieser Gleichung $x+h-u$ statt x, wobei u eine neue veränderliche Grösse bezeichnet, so erhält man nach der vorigen Bemerkung für die neuen Integrationsgrenzen (aus den Relat. $x=x+h-u$ und $x+h=x+h-u$) beziehungsweise $u=h$ und $u=0$, so wie statt dx sofort

$$\frac{d.(x+h-u)}{du}\,du = -du,$$

folglich ist

$$\int_x^{x+h} f'(x)\,dx = -\int_h^0 f'(x+h-u)\,du = \int_0^h du f'(x+h-u),$$

daher auch

$$f(x+h)-f(x) = \int_0^h du f'(x+h-u) \ldots (m).$$

Wendet man auf das unbestimmte Integral $\int du f'(x+h-u)$ die Methode des theilweisen Integrirens (§. 810) an, so erhält man ganz einfach

$$\int du f'(x+h-u) = uf'(x+h-u) + \int u\,du f''(x+h-u)$$

$$= uf'(x+h-u) + \frac{u^2}{2}f''(x+h-u) + \int\frac{u^2}{2}du f'''(x+h-u)$$

. .

$$= uf'(x+h-u) + \frac{u^2}{2}f''(x+h-u) + \frac{u^3}{2.3}f'''(x+h-u) + \ldots$$

$$+ \frac{u^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+h-u) +$$

$$\int\frac{u^{n-1}du}{2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-u).$$

Nimmt man nun dieses Integrale zwischen den Grenzen 0 und h, so erhält man (da die sämmtlichen Glieder der Reihe für die untere

Grenze $u=0$ verschwinden):

$$\int_0^h du f'(x+h-u) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{2.3..(n-1)}\overset{(n-1)'}{f(x)} + \int_0^h \frac{u^{n-1}\,du}{2.3..(n-1)}\overset{(n')}{f}(x+h-u),$$

Durch Substitution dieses Werthes in der obigen Gleichung (m) erhält man endlich für die Taylor'sche Reihe den Ausdruck:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \ldots \frac{h^{n-1}}{2.3..(n-1)}\overset{(n-1)'}{f(x)} +$$
$$\int_0^h \frac{u^{n-1}\,du}{2.3..(n-1)}\overset{(n')}{f}(x+h-u),$$

in welchem das letzte Glied den Rest der Reihe bezeichnet, welchen man vernachlässiget, wenn man bei einem bestimmten Glied der Reihe stehen bleibt. (Vergl. §. 662, Anmerk. 2.)

Auf gleiche Weise erhält man aus dieser letztern Reihe für die Maclaurin'sche Reihe, wenn man $x=0$ und x an die Stelle von h setzt, den Ausdruck:

$$f(x) = f(x_0) + xf'(x_0) + \frac{x^2}{2}f''(x_0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{2.3..(n-1)}\overset{(n-1)'}{f(x_0)} +$$
$$\int_0^x \frac{u^{n-1}\,du}{2.3..(n-1)}\overset{(n')}{f}(x-u),$$

[Allgemeine Methode der näherungsweisen Integration; III., 396 ff.]

Rectification der Curven.

§. 878. **Erklärung.** Eine Curve rectificiren heisst eine gerade Linie finden, welche mit einem bestimmten Bogen der Curve einerlei Länge besitzt, oder noch gewöhnlicher: den Bogen durch die Abscisse ausdrücken.

In §. 714 haben wir für das Element oder Differential des Bogens einer ebenen Curve, diese auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen, den Ausdruck gefunden:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Entwickelt man daher aus der Gleichung der Curve $y = f(x)$ den Quotienten $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ und substituirt denselben in ds, so erhält man $ds = dx\sqrt{1+f'(x)^2} = Xdx$, also für die Länge des Bogens, welcher zwischen den Puncten enthalten ist, dessen Abscissen x' und x'' sind, sofort das bestimmte Integral:

$$s = \int_{x'}^{x''} Xdx,$$

wobei das Integral je nach Beschaffenheit von X entweder genau oder nur näherungsweise bestimmt werden kann; im erstern Falle heisst die Curve rectificabel.

§. **879.** Für eine Curve von doppelter Krümmung, für welche (§. 758)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$$

ist, wird man, wenn $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ die Gleichungen der Curve sind, daraus wieder die Functionen $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ ableiten, und dann s aus der Gleichung

$$s = \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{1 + f'(x)^2 + \varphi'(x)^2}$$

bestimmen.

§. **880.** Beispiele hierüber.

1) Es sei die zu rectificirende Curve die Evolvente des Kreises, so ist dafür (§. 750) $ds = R\varphi\, d\varphi$, also

$$s = \int_0^{\varphi} R\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2} R\varphi^2.$$

2) Aus der Gleichung der Neil'schen oder cubischen Parabel (§. 734) $y^2 = p'x^3$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{p'}.x^{\frac{1}{2}}$; es ist daher allgemein

$$s = \int dx \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}p'x} = \frac{8}{27p'}(1 + \tfrac{9}{4}p'x)^{\frac{3}{2}} + C \text{ (§. 779, 6).}$$

Und da der Scheitel der Curve im Ursprung der Coordinaten liegt, also für $x = 0$ auch $s = 0$ ist; so hat man zur Bestimmung der Const. C die Bedingungsgleichung $0 = \frac{8}{27p'} + C$, und daraus $C = -\frac{8}{27p'}$, so, dass also die vom Scheitel bis zu einem beliebigen Puncte der Curve, welchem die Abscisse x entspricht, gezählte Länge des Bogens

$$s = \frac{8}{27p'}[(1 + \tfrac{9}{4}p'x)^{\frac{3}{2}} - 1] \text{ ist.}$$

Offenbar ist dieser Ausdruck nichts anderes, als das bestimmte Integral

$$\int_0^x dx \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}p'x}.$$

3) Für die gemeine oder Apolonische Parabel ist aus $y^2 = px$ sofort $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$, demnach $s = \int dx \sqrt{1 + \frac{1}{4}px^{-1}}$, oder, wenn man $\frac{1}{4}p = a$ setzt: $s = \int \frac{dx \sqrt{a + x}}{\sqrt{x}}$.

Es ist aber, wenn man Kürze halber $\sqrt{ax+x^2} = X$ setzt

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}} = \frac{a+x}{X} = \frac{a}{X} + \frac{x}{X},$$

folglich auch:

$$s = \int \frac{x\,dx}{X} + a \int \frac{dx}{X}.$$

Da nun, wenn man in der Reductionsformel (D) (§. 828) $n = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = a$ und $\gamma = 1$ setzt, sofort $\int \frac{x\,dx}{X} = X - \frac{a}{2}\int \frac{dx}{X}$ und (§. 795): $\int \frac{dx}{X} = l(a + 2x + 2X)$ ist, so hat man $s = X + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{X}$, und wenn der Bogen wieder vom Scheitel aus gezählt wird, sofort:

$$s = X + \frac{a}{2}\int_0^x \frac{dx}{X} = \sqrt{ax+x^2} + \frac{a}{2}\, l\left[\frac{a + 2x + 2\sqrt{ax+x^2}}{a}\right].$$

Anmerk. Gibt man der Gleichung der Parabel die Form $x = p'y^2$, so wird $\frac{dx}{dy} = 2p'y$, und man erhält aus $ds = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$ sofort einfacher:

$$\delta)\ s = \int dy \sqrt{1+4p'^2y^2} = \frac{1}{4p'}\, l\left(2p'y + \sqrt{1+4p'^2y^2}\right) + \tfrac{1}{2}y\sqrt{1+4p'^2y^2}$$

(§. 819, Beispiel 1).

4) Für die Rectification der Ellipse hat man, die Abscissen vom Mittelpuncte gezählt (§. 714, Beispiel):

$$ds = \frac{dx\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder wenn man $\frac{c}{a} = e$ und $\frac{x}{a} = z$ setzt, wodurch $dx = a\,dz$ wird, und gleich integrirt:

$$s = a\int \frac{dz\sqrt{1 - e^2z^2}}{\sqrt{1 - z^2}} \ldots (\alpha);$$

ein Integral, welches sich in keiner endlichen Form darstellen lässt, indem es zur Classe der elliptischen Functionen gehört (welche diesem speciellen Falle ihren Namen verdanken), jedoch bereits in §. 848 durch eine convergirende Reihe ausgedrückt *) worden. Es

*) Unter den elliptischen Functionen oder Transcendenten versteht man im Allgemeinen alle Functionen, welche in dem Integrale begriffen sind:

$$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}},$$

wobei X eine rationale Function von x, und α, β... reelle Grössen bezeichnen. Ausser Euler, welcher diese Functionen zuerst untersuchte, hat sich besonders Legendre in seinen *„Exercices de Calcul Intégral"* und später Jacobi mit diesem interessanten Gegenstande beschäftigt.

ist nämlich, wenn man gleich wieder für e und z die Werthe $\frac{c}{a}$ und $\frac{x}{a}$ herstellt, und um abzukürzen, $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = X$ setzt:

$$s = aA + \frac{c^2}{2a}\left[\frac{x}{2a}X - \tfrac{1}{2}A\right] + \frac{1.1}{2.4}\frac{c^4}{a^3}\left[\left(\frac{x^3}{4a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x}{a}\right)X - \frac{1.3}{2.4}A\right] + \ldots,$$

wozu keine Constante kommt, wenn man den Bogen oder das Integral s von $x = 0$ anfangen lässt, weil dafür $A = arc\,sin\left(\frac{x}{a}\right)$ ebenfalls (eben so wie X) verschwindet, und die Gleichung $0 = 0 + C$ entsteht. Soll sich ferner das Integral bis $x = a$ erstrecken, so wird, wenn U den Umfang der ganzen Ellipse bezeichnet, dafür $s = \frac{1}{4}U$, und nach der vorigen Reihe, wegen $A = arc\,sin\,1 = \frac{\pi}{2}$ und $X = 0$, wenn man gleich durchaus mit 4 multiplicirt:

$$U = \frac{1}{a}\int_0^a dx \sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}$$
$$= 2a\pi\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{c^2}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{c^3}{a^3}\right)^2 - \ldots\right],$$

eine Reihe (nichts anderes, als das bestimmte Integral $\int_0^a \frac{dx\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, §. 871), welche um so besser convergirt, je kleiner die Extentricität $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ist. [III., 433.]

Zusatz. Für $b = a$ oder $c = 0$ verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser a, und man erhält dafür aus der vorigen Reihe, wie es sein soll: $U = 2a\pi$.

Da x von 0 bis a variirt, so erhält man auch die sämmtlichen Werthe von x, wenn man $x = a\,sin\,\varphi$ setzt und den Winkel φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen lässt. Durch diese Substitution geht das obige Integral (α) in das folgende $s = a\int d\varphi\sqrt{1 - e^2\,sin\,\varphi^2}$ über, und man erhält daraus s wieder in einer unendlichen Reihe, wenn man $(1 - e^2\,sin\,\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ nach der binomischen Formel entwickelt, und die einzelnen Monome, welche die Form $q\,sin\,\varphi^n\,d\varphi$ erhalten, nach der Formel (7) in §. 838 integrirt. Aus dieser Reihe erhält man dann wieder für den vierten Theil des Umfanges der Ellipse, wenn man die vorige in den Parenthesen [] stehende Reihe mit R bezeichnet:

$$\tfrac{1}{4}U = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - e^2 sin\,\varphi^2} = \frac{a\pi}{2}R.$$

5) Für die Hyperbel hat man (§. 475) $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ und daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$, folglich für $a^2 + b^2 = c^2$:

$$s = \int \frac{dx \sqrt{c^2x^2 - a^4}}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Nimmt man a zur Einheit und entwickelt $\sqrt{c^2x^2 - 1}$ in eine Reihe, so erhält man

$$s = c\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1.1}{2.4c^3}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} - \text{etc.},$$

und wenn man für diese Integrale, indem das erste ohnehin bekannt und gleich $\sqrt{x^2-1}$ ist, vom zweiten angefangen, die in §. 824 gefundenen Werthe setzt und die Constante so bestimmt, dass für $x = a = 1$, $s = 0$ (also da das dortige $A' = arc\,sin\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$) wird, endlich:

$$s = \left[c - \frac{1.1}{2.4c^3}\,\frac{1}{2x^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6c^5}\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.3}{2.4x^2}\right) - \ldots\right]\sqrt{x^2-1}$$
$$- \left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\,\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{2c} + \frac{1.1}{2.4c^3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.1.3}{2.4.6c^5}\cdot\frac{1.3}{2.4} + \ldots\right].$$

Anmerk. Um in diesen Ausdruck die Grösse a wieder hinein zu bringen oder sichtbar zu machen, darf man nur (§. 373) $\frac{s}{a}$, $\frac{c}{a}$ und $\frac{x}{a}$ statt s, c und x setzen.

6) Für die gemeine Cycloide ist (§. 744) $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$, folglich $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2a}\,.\,\frac{dy}{\sqrt{2a - y}}$, und daher

$$s = \sqrt{2a}\int \frac{dy}{\sqrt{2a-y}} = C - \sqrt{2a}\,.\,2\sqrt{2a-y},$$

d. i. $s = C - 2\sqrt{2a(2a-y)}$.

Zählt man den Bogen s vom Ursprung A (Fig. 87), so wird für $x = y = 0$ auch $s = 0$, und daher ist Fig. 87.

$$s = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2a-y}} = 4a - 2\sqrt{2a(2a-y)}$$

die Länge eines Bogens vom Ursprung A bis zu einem Puncte M, welchem die Ordinate y entspricht. Für $y = 2a$ wird $s = \text{Bog.}\,AD = 4a$; demnach ist der ganze cycloidische Bogen $ADB = 8a$.

7) Um auch ein Beispiel für die Rectification der Polarcurven zu geben, sei $u = \frac{\varphi}{2\pi}$ die Polargleich. einer Curve *), so ist $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$, und

*) Es ist diess die Archimedische Spirallinie, und entsteht durch die combinirte Bewegung des Halbmessers eines Kreises um seinen Mittelpunct und eines Punctes, welcher auf dem Halbmesser vom Mittelpunct gegen den Umfang des Kreises so fortschreitet, dass er diesen Halbmesser in der nämlichen Zeit gleichförmig durchläuft, in wel-

nach der hieher gehörigen Formel [5), §. 739]:

$$ds = \frac{d\varphi}{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}, \quad \text{also} \quad s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1+\varphi^2}.$$

Wird die Integration ausgeführt (am einfachsten, indem man im Integral §. 819, Beispiel 1, $a = 1$, $b = 1$ und $x = \varphi$ setzt), so erhält man:

$$s = \frac{1}{4\pi}[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + l(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})].$$

8) Als Beispiel für eine Curve von doppelter Krümmung kann man die Schraubenlinie wählen, deren Gleichungen (§. 628, Anmerkung) sind: $x = r \sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$ und $z = ra\varphi$. Hieraus folgt $dx = r\cos\varphi\, d\varphi$, $dy = -r\sin\varphi\, d\varphi$ und $dz = r a d\varphi$; es ist also (§. 879):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = r\, d\varphi\sqrt{1+a^2},$$

und daher

$$s = r\sqrt{1+a^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = r(\varphi - \varphi_0)\sqrt{1+a^2},$$

ein leicht einzusehendes Resultat. (Ein weiteres Beispiel III., 438.)

Quadratur der Curven.

§. **881.** Erklärung. Eine ebene, auf Parallelcoordinaten bezogene Curve quadriren heisst im Allgemeinen die Fläche bestimmen, welche zwischen einem beliebigen Bogen der Curve, den Ordinaten seiner Endpuncte und der zugehörigen Abscisse liegt. Am gewöhnlichsten jedoch wird die Fläche vom Scheitel der Curve (wenn ein solcher vorhanden ist) an gerechnet.

§. **882.** Da wir in §. 715 bei Voraussetzung rechtwinkeliger Coordinaten für das Element oder Differential der Fläche $dz = y\,dx$ gefunden haben; so reducirt sich, wenn $y = \varphi(x) = X$ die Gleichung der Curve ist, das Problem der Quadratur auf die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_{x'}^{x''} X dx$, wenn x', x'' die Abscissen derjenigen Ordinaten sind, welche die zu bestimmende Fläche begrenzen.

cher der Halbmesser eine Umdrehung, ebenfalls gleichförmig, vollendet hat. Setzt man daher, dass dieser Punct auf dem Halbmesser $= 1$ das Stück u zurücklegt, während der letztere den Winkel φ beschrieben hat; so ist dieser Erklärung zufolge $u : 1 = \varphi : 2\pi$, woraus sofort die obige Gleichung der Curve $u = \frac{\varphi}{2\pi}$ folgt.

§. 883. Beispiele hierüber.

1) Für die Familie der Parabeln, welche in der Gleichung $y^n = px^m$ begriffen ist, folgt, wegen $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} = X$, sofort, wenn die Fläche vom Scheitel der Curve gerechnet wird:

$$z = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}.$$

2) Für die gemeine Parabel erhält man, wegen $m = 1$ und $n = 2$, aus dem vorigen Integralausdrucke für die vom Scheitel A bis zu einer beliebigen Ordinate $PM = y$ (Fig. 54) gezählten Fläche: Fig. 54.

$$z = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x \sqrt{px} = \tfrac{2}{3} xy.$$

Soll aber die zwischen den beiden Ordinaten PM und $P'M'$, deren Abscissen $AP = a$ und $AP' = b$ sind, liegende Fläche $PP'M'M$ ausgedrückt werden; so bestimme man entweder in dem allgemeinen Integral $z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$ zuerst die Constante C so, dass für $x = a$, $z = 0$ wird (d. i., §. 871, für den Anfang des Integrals), wodurch $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$, demnach $z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ wird, und nimmt dann das Integral bis $x = b$ (bei welchem Werth das Integral enden soll); so erhält man für die gesuchte Fläche: $z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$. Oder man nimmt sogleich das bestimmte Integral $\int_a^b p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ (welches nämlich in dem Unterschiede der beiden Flächen $AP'M'$ und APM besteht).

3) Für den Kreis, dessen Gleichung (§. 408) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ist hat man $z = \int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ oder (§. 819, Beisp. 2)

$$z = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \, arc \sin \left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

wobei die Constante C wegfällt, wenn die Fläche von der durch den Mittelpunct gehenden Ordinate (für welche sofort $x = 0$ ist) gerechnet wird. Nimmt man dann das Integral bis $x = a$ (d. h. also, nimmt man das bestimmte Integral von $x = 0$ bis $x = a$), so erhält man für die Fläche des Viertelkreises:

$$z = \tfrac{1}{2} a^2 \, arc \sin 1 = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{2},$$

und sonach für die ganze Kreisfläche: $F = a^2 \pi$.

Man kann auch von der Gleichung $y = \sqrt{2ax - x^2}$ (§. 405) ausgehen und das Integral $z = \int dx \sqrt{2ax - x^2}$, welches das Kreissegment $A'pm'$ (Fig. 92), wofür $Ap = x$ ist, darstellt, aus §. 826 nehmen; oder Fig. 92.
wenn man für π eine unendliche Reihe haben will, dieses Integral nach §. 845 entwickeln.

4) Für die Ellipse hat man, die Abscissen vom Scheitel gezählt:

Fig. 92. $z = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax - x^2} =$ Segm. $A'pm$ (Fig. 92). Da aber (voriger §.) das Integral $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ das Kreissegment $A'pm'$ darstellt, und dieses mit dem erstern für $x = 0$ gleichzeitig verschwindet, also das eben genannte Integral in beiden Flächen einerlei Anfang hat; so ist, $\int dx\sqrt{2ax - x^2} = X$ gesetzt, sofort $A'pm : A'pm' = \frac{b}{a}X : X = b : a$. Dieses constante Verhältniss gilt aber für jeden Werth von x bis zu $x = 2a$, wofür $A'pm$ in die Halbellipse $= \frac{1}{2}f$, und $A'pm'$ in den Halbkreis $= \frac{1}{2}F$ übergeht, so, dass man hat $\frac{1}{2}f : \frac{1}{2}F = b : a$, woraus endlich für die Fläche der ganzen Ellipse $f = \frac{b}{a}F = \frac{b}{a}a^2\pi = ab\pi$ folgt.

Fig. 92. 5) Zur Bestimmung des elliptischen Sectors ACM (Fig. 92) hat man für das Element der Fläche [§. 716, (p)], wenn die Abscissen vom Mittelpuncte gezählt werden: $dz = -\frac{1}{2}\frac{ab\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, also (§. 794)

$$z = C - \frac{ab}{2} arc\,sin\left(\frac{x}{a}\right);$$

dabei wird, wenn man das Integral oder die Fläche bei $x = a$ anfangen lässt, wegen $0 = C - \frac{ab}{2} arc\,sin\,1$, die Constante $C = \frac{ab}{2}\frac{\pi}{2}$, also Sector $ACM = \int_a^x dz = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\frac{x}{a}\right)$, wobei $x = CP$ ist. Für $x = 0$ geht Sect. ACM in $ACB = \frac{1}{4}f$ über, und man hat $\frac{1}{4}f = \int_a^0 dz = \frac{ab\pi}{4}$ oder $f = ab\pi$, wie im vorigen §.

Anmerk. Für $b = a$ erhält man aus dem vorigen Ausdrucke:

$$\text{Kreissect. } ACM' = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{a}{2}\cdot a\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\text{ Bog. } AM',$$

wie es sein soll.

6) Für die Hyperbel hat man, die Abscissen vom Scheitel gezählt (§. 476): $z = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax + x^2}$, und wenn man dieses Integral nach §. 827 (Beisp.) entwickelt und Kürze halber $\sqrt{2ax + x^2} = X$ setzt:

$$z = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{2}(a+x)X + \tfrac{1}{2}a^2 l[X - (a+x)]\right\} + C;$$

dabei erhält, da für $x = 0$ auch $z = 0$ ist, die Constante C den Werth $-\frac{1}{2}ab\,l(-a)$. Auch kann das genannte Integral nach §. 845 in eine unendliche Reihe aufgelöst werden.

Geht man von der Gleich. (§. 474) $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ aus, so muss das Integral nach §. 819 (Beisp. 1.) und die Constante so bestimmt werden, dass für $x = a$, $z = 0$ wird. [III., 445 u. 446.]

7) Um auch ein Beispiel für die Flächenberechnung einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve zu geben, muss man bemerken, dass es sich dabei um die Berechnung jenes Flächenraumes ABM (Fig. 93) handelt, welcher von der Curve BM, einen festen, etwa mit der Axe zusammenfallenden Radiusvector AB und dem variablen oder beweglichen Leitstrahl AM eingeschlossen wird. Fig. 93.

Bezeichnet man diese, dem Drehungswinkel $BAM = \varphi$ entsprechende Fläche durch ω, so hat man, wenn φ um $d\varphi$ zunimmt, wofür auch der Leitstrahl $AM = u$ um du wächst, für das Dreieck AMm sofort:

$$d\omega = \tfrac{1}{2}u(u+du)\sin d\varphi = \tfrac{1}{2}u(u+du)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}u^2\,d\varphi + \tfrac{1}{2}u\,du\,d\varphi,$$

d. i. $d\omega = \frac{1}{2}u^2\,d\varphi$.

Wäre z. B. die betreffende Curve die logarithmische Spirale, deren Polargleichung $\varphi = \log u$, oder $u = a^\varphi$ ist *) (wofür man auch $u = e^{la.\varphi}$ schreiben kann, wobei a die Basis des betreffenden Logarithmensystemes bezeichnet); so würde man für die zwischen der Curve und zweier Leitstrahlen u_0 und u, die mit der Axe die Winkel φ_0 und φ, also unter sich den Winkel $\varphi - \varphi_0$ einschliessen, liegende Fläche den Ausdruck erhalten:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\, a^{2\varphi} = \frac{a^{2\varphi} - a^{2\varphi_0}}{4la} \quad \text{oder auch} \quad \omega = \frac{u^2 - u_0^2}{4la}.$$

§. 884. Die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Asymptoten bezogen, ist (§. 545) $xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, und da bei rechtwinkeligen Coordinaten der Asymptotenwinkel ein Rechter, also (§. 474, 9) die Hyperbel gleichseitig oder $b = a$ ist, in diesem Falle: $xy = \frac{1}{2}a^2$ oder $y = \frac{a^2}{2x}$. Mit diesem Werth erhält man für die von der Curve und einer Asymptote begrenzte Fläche: $z = \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2}lx + C$.

*) Nimmt man $a > 1$ an, so wächst der Leitstrahl u, welcher für $\varphi = 0$ sofort $= 1$ wird (so dass also die Curve in einem Puncte B der Axe Ax beginnt, wofür $AB = 1$ ist) bei einer positiven Zunahme von φ ununterbrochen. Die Curve entfernt sich also, indem sie eine unendliche Zahl von Windungen um den Pol A bildet, fortwährend von diesem Puncte. Lässt man φ in negativer Richtung wachsen, so wird u ununterbrochen kleiner: die Curve nähert sich daher wieder von dem Puncte B aus in unzähligen Windungen dem Pole A, ohne diesen Punct jemals wirklich zu erreichen.

Fig. 73. Rechnet man die von der Asymptote CX' (Fig. 73) begrenzte Fläche von der durch den Scheitel gezogenen Ordinate AE', für welche, wegen W. $ACX' = 45^{\circ}$, $x = CE' = AE = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ (und $xy = x^2 = \frac{a^2}{2}$) wird; so hat man: $z = \frac{a^2}{2}(lx - lCE')$, oder wenn man $CE' = \frac{a^2}{2} = 1$ setzt, auch $z = lx$. — Es stellen also die natürlichen Logarithmen die asymptotischen Räume der gleichseitigen Hyperbel dar, und diess ist der Grund, warum man diese Logarithmen (§. 291) auch hyperbolische genannt hat. Uebrigens muss bemerkt werden, dass nicht bloss die asymptotischen Räume dieser, sondern überhaupt jeder Hyperbel logarithmisch ausgedrückt werden können; nur sind dann die Logarithmen keine natürlichen, sondern je nach der Grösse des Asymptotenwinkels aus irgend einem andern Systeme zu verstehen.

Sie sind z. B. aus dem Briggischen Systeme zu nehmen für eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel nahe $= 45^{\circ}\,44'\,25''$ ist. [III., 447; Fläche der Cycloide: 448.]

§. 885. Um endlich noch die von den beiden Curventheilen NMN' und $NM'N'$ (Fig. 94) begrenzte ebene Fläche zu berechnen, so seien auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen AX, AY bezogen $AQ = x'$, $AQ' = x''$ die beiden äussern, und $AP = x$ die allgemeine Abscisse, ferner $QN = y'$, $Q'N' = y''$ die den Abscissen x', x'', und $PM = y = f(x)$, $PM' = y = f'(x)$ die der allgemeinen Abscisse x, und zwar beziehungsweise in der obern und untern Curve entsprechenden Ordinaten; so hat man nach den bisher Entwickelten für die gesuchte Fläche den Ausdruck:

Fig. 94.

$$F = \int_{x'}^{x''} dx\,[f(x) - f'(x)] = \int_{x'}^{x''} dx f(x) - \int_{x'}^{x''} dx f'(x),$$

wofür man offenbar auch $\int_{x'}^{x''} dx \int_{f'(x)}^{f(x)} dy$ schreiben könnte.

Fig. 95. Beispiel. Wird z. B. die zu suchende Fläche von zwei Kreisbögen NDN' und NEN' (Fig. 95) eingeschlossen, wovon der erstere dem Halbmesser R und der letztere jenem r angehört und welche die gemeinschaftliche Sehne $NN' = 2a$ besitzen, die mit der Abscissen-

axe AX parallel sein soll; so nehme man den Durchschnittspunct A des aus dem Halbirungspunct B der Sehne NN' auf die Axe gefällten Perpendikels zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und setze $AB = b$. Diess vorausgesetzt ist wie leicht zu sehen:

$$PM = f(x) = b + \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} \text{ und}$$
$$PM' = f(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2},$$

daher (wegen $\int dx \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \, arc \sin \frac{x}{r}$)

$$\int_{x'}^{x''} dx f(x) = \int_{-a}^{+a} dx [b + \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2}]$$
$$= 2ab - a\sqrt{R^2 - a^2} + R^2 \, arc \sin \frac{a}{R} \text{ und}$$
$$\int_{x'}^{x''} dx f'(x) = \int_{-a}^{+a} dx [b - \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - a^2}]$$
$$= 2ab + a\sqrt{r^2 - a^2} - r^2 \, arc \sin \frac{a}{r},$$

also endlich nach der obigen Formel:

$$F = -a[\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}] + [R^2 \, arc \sin \frac{a}{R} + r^2 \, arc \sin \frac{a}{r}].$$

Gehören beide Kreisbögen zu einem und demselben Kreise, so ist $R = r$, und dafür

$$F = -2a\sqrt{r^2 - a^2} + 2r^2 \, arc \sin \frac{a}{r}.$$

Geht in diesem letztern Falle die Sehne in den Durchmesser über, ist also $a = r$, so wird

$$F = 2r^2 \, arc \sin 1 = 2r^2 \frac{\pi}{2} = r^2 \pi,$$

wie es auch in der That sein soll, weil die gesuchte Fläche in diesem Falle in die Kreisfläche vom Halbmesser r übergeht.

Anmerkung. Da man das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y \, dx$ immer als den Ausdruck einer von der Abscisse, zwei bestimmten Ordinaten und einer ebenen Curve begrenzten Fläche ansehen kann, so wird man für dieses Integrale, selbst wenn in der wirklich bestehenden Relation $y = f(x)$ die Function $f(x)$ unbekannt, und y nur für einzelne Werthe von x gegeben, oder y gar nicht als Function von x ausdrückbar (die Curve also ganz unregelmässig) wäre, einen genäherten Werth erhalten, wenn es möglich ist, die genannte Fläche nach irgend einer andern als der Integrationsmethode mit hinreichender Schärfe zu berechnen.

Eine solche, in der Anwendung sehr brauchbare Näherungsmethode erhält man aber nach Sympson, wenn man die betreffende Curve in allen Fällen als einer gemeinen Parabel angehörig ansieht.

Fig. 96. Ist nämlich $QNLN'Q'$ (Fig. 96) die zu berechnende Fläche und sieht man den Bogen NLN' der Begrenzungscurve als Bogen einer gewöhnlichen Parabel an, welche durch die drei Puncte N, L, N' geht und wobei die Ordinate PL zwischen den beiden äussern QN, $Q'N'$ gerade in der Mitte liegen soll; so fehlt bekanntlich (II., §. 135) zur völligen Bestimmung dieser Parabel noch eine Bedingung, und man kann als viertes Bestimmungsstück annehmen, dass der Punct L der Scheitel eines Durchmessers PL der Parabel sein soll (welcher also §. 522 mit der Axe AB der Parabel parallel ist).

Diess vorausgesetzt, wird (§. 524) die Sehne NN' durch die Ordinate PL im Puncte E halbirt, und die durch den Punct L mit NN' parallele Gerade bildet in diesem Puncte eine Tangente an die Curve. Da nun bekanntlich das parabolische Segment $NLN'N = \frac{2}{3}$ Parallelogramm NF', dasselbe also doppelt so gross als die Fläche $NFLN'F'$ ist, so hat man, wenn man Kürze halber das Trapez $QNEN'Q' = A$, jenes $QFF'Q' = B$, die parabolische Fläche $QNLN'Q' = F$ und das parabolische Segment $NLN'N = f$ setzt, sofort $f = F - A = 2(B - F)$, und daraus $3F = A + 2B$ (1).

Nun ist aber $A = (QN + Q'N')AP$ und $B = (QF + Q'F') \times AP$, oder wegen $PL = \frac{QF + Q'F'}{2}$ auch $B = 2PL \cdot AB$, und daher, wenn man diese Werthe in (1) substituirt, auch

$$F = \frac{AP}{3}(QN + Q'N' + 4PL),$$

oder wenn man $QQ' = a$ setzt, sofort:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}(QN + Q'N' + 4PL) \quad (2).$$

Halbirt man QP und PQ' in den Puncten p, p' und zieht durch diese Halbirungspuncte die Ordinaten pm, $p'm'$; so ist, wenn man $QP = PQ' = a'$ setzt, auf dieselbe Weise die Fläche

$$QNLP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(QN + PL + 4pm) \text{ und die Fläche}$$

$$PLN'Q' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(PL + Q'N' + 4p'm'), \text{ folglich auch}$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(QN + PL + 4pm + PL + Q'N' + 4p'm')$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}[QN + Q'N' + 4(pm + p'm') + 2PL],$$

oder wegen $a' = \frac{a}{2}$ und wenn man die Ordinaten $QN, pm, \ldots Q'N'$ der Reihe nach durch $y_0, y_1, \ldots y_4$ bezeichnet, endlich:

$$F = \frac{a}{3.4}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Diese Formel lässt sich leicht weiter fortsetzen, im Falle man die Intervalle Op, pP' u. s. w. abermals halbiren und durch die Halbirungspuncte wieder die Ordinaten ziehen wollte.

Theilt man hingegen jedes der beiden vorigen Intervalle QP und PQ' anstatt in zwei, sofort in drei gleiche Theile, bezeichnet die entstehenden auf einander folgenden Theilungspuncte durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, so wie die durch die Puncte Q (oder 0) 1, 2, . . 6 (oder Q') gezogenen Ordinaten der Reihe nach durch $y_0, y_1, \ldots y_6$ und setzt die Grösse der Intervalle $0{,}1 = 1{,}2 = \ldots = 5{,}6 = a''$; so hat man nach der durch die vorige Relation (2) ausgesprochenen Regel für die Flächen der auf einander folgenden Streifen oder Trapeze der Reihe nach:

$$\frac{a''}{3.2}(y_0 + y_2 + 4y_1),\quad \frac{a''}{3.2}(y_2 + y_4 + 4y_3),\quad \frac{a''}{3.2}(y_4 + y_6 + 4y_5),$$

folglich, wenn man diese Flächen summirt, wegen $a'' = \frac{a}{3}$ sofort:

$$F = \frac{a}{3.6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6).$$

Aus dem Gange dieser Entwickelung folgt nun, dass wenn man die Abscisse $QQ' = a$ überhaupt nur in eine gerade Anzahl, z. B. in $2n$ gleiche Theile theilt, sofort auch allgemein die gesuchte Fläche durch die Formel

$$F = \frac{a}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

und zwar um so genauer ausgedrückt wird, je grösser man n nimmt.

Es ist also endlich, auf das oben erwähnte Integrale zurückkommend, wegen $\int_{x'}^{x''} y\,dx = F$, wobei y_0 und y_{2n} die den Abscissen x' und x'' entsprechenden Ordinaten bezeichnen, und wegen $a = x'' - x'$ sofort auch

$$(a)\quad \int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x'' - x'}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ein Näherungswerth für dieses bestimmte Integral, und zwar von jeder beliebigen Genauigkeit. Dieser eben entwickelte Ausdruck (a) ist unter dem Namen der Simpson'schen Formel bekannt.

Um diese Formel auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, so sei darnach das bestimmte Integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ zu berechnen.

Setzt man in der genannten Formel (a) zuerst nur $n = 3$, so hat man wegen $y = \frac{1}{x}$ und $x' = 1$, $x'' = 2$ sofort:

$$y_0 = \frac{1}{x'} = \tfrac{1}{1},\ y_1 = \frac{1}{1\frac{1}{6}} = \tfrac{6}{7},\ y_2 = \frac{1}{1\frac{2}{6}} = \tfrac{6}{8},\ y_3 = \tfrac{6}{9},\ y_4 = \tfrac{6}{10},\ y_5 = \tfrac{6}{11},$$

$$y_6 = y_{2n} = \tfrac{6}{12} = \frac{1}{x''} = \tfrac{1}{2},\ \text{sofort}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{18}(1 + 4.\tfrac{6}{7} + 2.\tfrac{6}{8} + 4.\tfrac{6}{9} + 2.\tfrac{6}{10} + 4.\tfrac{6}{11} + \tfrac{1}{2})$$

$$= \tfrac{1}{18}(12{\cdot}477056) = 693169.$$

Nimmt man dagegen, um das Integrale genauer zu erhalten, $n = 6$, so erhält man eben so:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{36}(1 + 4.\tfrac{12}{13} + 2.\tfrac{12}{14} + \ldots + 4.\tfrac{12}{23} + \tfrac{1}{2})$$

$$= \tfrac{1}{36}(24{\cdot}95335182)$$

$$= {\cdot}69314866.$$

Da nun aber bekanntlich

$$\int \frac{dx}{x} = lognat.\, x, \quad \text{also} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} = lognat\, 2 = {\cdot}6931472$$

ist, so sieht man, dass das letztere Resultat erst in der 6. Decimalstelle abweicht, und in dieser um eine Einheit zu gross ist. Nimmt man dagegen n grösser als 6, z. B. gleich 8 oder 10 u. s. w., so kann man das Resultat bis zu jeder beliebigen Decimalstelle genau erhalten.

Complanation oder Quadratur der durch Umdrehung erzeugten Oberflächen.

Fig. 80. §. **886.** Es sei BMM' (Fig. 80) die gänzlich oberhalb der Axe AX liegende Curve, durch deren Umdrehung um die Abscissenaxe AX die zu bestimmende krumme Oberfläche erzeugt wird. Man ziehe zu den beiden Abscissen $AP = x$ und $AP' = x + h$ die rechtwinkeligen Ordinaten PM, $P'M'$ und die Sehne MM', bezeichne die der Abscisse x entsprechende (durch BM) erzeugte krumme Oberfläche durch $\omega = f(x)$ [wo eben $f(x)$ die zu bestimmende Function ist]; so ist die der Abscisse $x + h$ entsprechende Oberfläche: $\omega' = f(x + h)$ und die vom Bogen MM' erzeugte Zone:

$$v = \omega' - \omega = f(x + h) - f(x) = \frac{d\omega}{dx}h + ph^2 + \ldots \quad (\S.\ 662).$$

Wird ferner die durch Umdrehung der Sehne MM' um diese Axe AX erzeugte Oberfläche des abgestutzten Kegels durch v' bezeichnet, so ist bekanntlich

$$v' = \pi(MP + M'P')\,MM',$$ oder wegen

$M'P' = y' = y + \frac{dy}{dx}h + \ldots$ und $MM' = \sqrt{h^2 + (y'-y)^2}$
$= h\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots}$ (wenn man nämlich für y' substituirt) auch:

$$v' = \pi(2y + ph + p'h^2 + \ldots)\,h\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots}$$

Es ist daher, wenn man gleich durch h abkürzt:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\pi(2y + ph + \ldots)\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots}}{\frac{d\omega}{dx} + qh + \ldots},$$

ein Quotient, welcher sich immer mehr der Einheit nähert, je kleiner h wird, und diesen Werth endlich für $h = 0$ vollkommen erreicht. Setzt man also $h = 0$, so hat man (wegen $\frac{v'}{v} = 1$), wenn man gleich mit $\frac{d\omega}{dx}$ multiplicirt, für das Element oder Differential der krummen Oberfläche: $d\omega = 2\pi y\,dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, also für die (durch Umdrehung erzeugte) Oberfläche selbst:

$$(1)\quad \omega = 2\pi\int_{x_0}^{x} y\,dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Anmerk. Nach der Methode des unendlich Kleinen findet man diese Formel ganz einfach auf folgende Art: Nimmt man (Fig. 80, a) die Zunahme PP' der Abscisse unendlich klein oder $= dx$ an, so fällt (§. 716, Anmerkung) der Bogen MM' mit seiner Sehne zusammen (d. i. der Unterschied ist unendlich klein der zweiten Ordnung) und ist $= ds$. Durch Umdrehung dieses Bogens ds um AX wird demnach die krumme Oberfläche eines abgestutzten Kegels erzeugt, die durch $d\omega$ bezeichnet werden muss, wenn man die durch Umdrehung des Bogens BM erzeugte Oberfläche $= \omega$ setzt; indem, wenn x in $x + dx$ übergeht, auch ω um $d\omega$ zunimmt. Es folgt also wie vorhin: $d\omega = \pi(y + y + dy)\,ds = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, wenn man nämlich für ds den bekannten Werth $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ setzt. Fig. 80, a).

§. 887. Beispiele hierüber.

1) Es sei die gegebene Umdrehungscurve die gemeine Parabel, so ist ihre Gleichung $y^2 = px$, und wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\sqrt{px}}$ nach der vori-

gen Formel:

$$\omega = \pi \int dx \sqrt{p^2 + 4px} = \frac{\pi}{6p}(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} + C \text{ (§. 779, 6).}$$

Wird die Oberfläche vom Scheitel an gerechnet, so wird für $x = 0$ auch $\omega = 0$, also $0 = \frac{1}{6}p^2\pi + C$, und daraus die Const. $C = -\frac{1}{6}p^2\pi$, daher endlich die krumme Oberfläche des Paraboloides oder parabolischen Conoides, dessen Höhe $x = h$ ist:

$$\omega = \frac{\pi}{6p}[(p^2 + 4ph)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

2) Ist die gegebene Curve eine Ellipse, deren Gleichung also, wenn die Umdrehung um die grosse Axe Statt findet, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ist; so folgt nach der obigen Formel, wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ und $a^2 - b^2 = c^2$, sofort:

$$(m) \quad \omega = \frac{2b\pi}{a^2}\int dx \sqrt{a^4 - c^2x^2}$$

$$= \frac{2b\pi}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^4 - c^2x^2} + \frac{a^4}{2c} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{cx}{a^2}\right)\right] + C \text{ (§. 819, 2.).}$$

Nimmt man dieses unbestimmte Integral, um die ganze elliptische Oberfläche zu erhalten, von $x = -a$ bis $x = +a$ (§. 871), so erhält man für diese Oberfläche O des Ellipsoides oder elliptischen Sphäroides (durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe):

$$O = 2b\pi\left[b + \frac{a^2}{c} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{c}{a}\right)\right].$$

Zusatz. Für den Kreis wird $b = a$ und $c = 0$, folglich das vorige Integral: $\omega = \frac{2b\pi}{a^2}\int a^2 dx = 2a\pi x$, welches wieder, von $x = -a$ bis $x = +a$ genommen, die Kugeloberfläche $\omega = 4a^2\pi$ gibt.

Anmerkung. Dieses Resultat erhält man übrigens auch aus dem vorigen Ausdruck für O, wenn man dabei den Werth des letzten, die Form $\frac{0}{0}$ annehmenden Gliedes (welches $= a$ ist), nach §. 687 bestimmt.

3) Findet die Umdrehung dieser Ellipse um die kleine Axe Statt, so erhält man die entstehende krumme Oberfläche ω' am einfachsten, wenn man im vorigen Integral (m) a und b mit einander vertauscht; dadurch entsteht aber: $\omega' = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx \sqrt{b^4 + c^2x^2}$ oder (§. 819, 1.)

$$\omega' = \frac{2a\pi}{b^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^4 + c^2x^2} + \frac{b^4}{2c}\, l\,(cx + \sqrt{b^4 + c^2x^2})\right] + C.$$

Soll die durch Umdrehung eines Bogens, dessen Endpuncten die Abscissen $x = \alpha$ und $x = \beta$ zukommen, erzeugte Zone berechnet werden; so wird man dieses Integral von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ nehmen. Soll dagegen die ganze Oberfläche bestimmt werden, so ist dafür $\alpha = -b$

und $\beta = + b$, und daher:

$$O' = 2a\pi\left[a + \frac{b^2}{2c}\, l\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\right].$$

Zusatz. Auch hier hat man wieder für $b = a$, wobei das die Form $\frac{0}{0}$ annehmende letzte Glied, nach §. 687 bestimmt, den Werth $\frac{2b^2}{2a} = a$ hat, für die Kugelfläche: $4a^2\pi$.

Cubatur der durch Umdrehung erzeugten Körper.

§. 888. Bezeichnet man den bei der oben (§. 886) angenommenen Umdrehung der Curve BMM'' (Fig. 80) um die Abscissenaxe AX durch das Segment $ABPM$ erzeugten (und von der in §. 886 berechneten Oberfläche begrenzten) Körper durch u, jenen, welcher dem Segment $ABP'M'$ entspricht, durch u', und endlich den Körper, welcher von dem Segmente PM' erzeugt wird, durch v, so ist, wenn man $u = f(x)$ setzt [wo $f(x)$ die zu bestimmende Function ist], auch $u' = f(x + h)$ und Fig. 80.

$$v = u' - u = f(x+h) - f(x) = \frac{du}{dx}h + ph^2 + \ldots$$

Das Trapez PM' beschreibt bei dieser Umdrehung den abgestutzten Kegel

$$\begin{aligned} v' &= \tfrac{1}{3} PP'\pi\,(MP^2 + M'P'^2 + MP.M'P') \\ &= \tfrac{1}{3} h\pi\,(y^2 + y'^2 + yy') \\ &= \tfrac{1}{3} h\pi\,(3y^2 + 3y\frac{dy}{dx}h + \ldots). \end{aligned}$$

Es ist also, wenn man gleich wieder durch h abkürzt:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\tfrac{1}{3}\pi(3y^2 + Ph + \ldots)}{\frac{du}{dx} + ph + \ldots},$$

und für $h = 0$, wofür $\frac{v'}{v} = 1$ wird: $\frac{du}{dx} = \pi y^2$, also $du = \pi y^2 dx$, oder das Volumen des durch Umdrehung erzeugten Körpers: (2) $u = \pi\int_{x'}^{x''} y^2 dx$.

Anmerkung. Nach der Methode des unendlich Kleinen entsteht durch Umdrehung der Fläche $ABMP$ der Körper u, also durch jene des unendlich schmalen Trapezes Pm, welches (§. 716, Anm.) als ein Rechteck behandelt werden muss, das Element desselben du,

und da dieses Rechteck einen Cylinder beschreibt, dessen kreisförmige Basis den Halbmesser y besitzt und Höhe $= dx$ ist; so folgt wie vorhin $du = \pi y^2 dx$.

§. 889. Beispiele hierüber.

1) Ist wieder die Umdrehungscurve die gemeine Parabel, so ist wegen $y^2 = px$:

$$u = \pi p \int_0^x x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi p x^2 = \frac{\pi}{2} x y^2.$$

Lässt man die Abscisse x bis h zunehmen und setzt die zugehörige Ordinate $y = \sqrt{ph} = r$, so bildet h die Höhe und r den Halbmesser der kreisförmigen Basis des parabolischen Conoides, und man hat für den Inhalt desselben: $u = \frac{1}{2} r^2 \pi h$, dieser ist also dem halben Cylinder gleich, welcher mit dem Conoid einerlei Basis und Höhe besitzt.

2) Für das durch Umdrehung der Ellipse um die grosse Axe entstehende Ellipsoid hat man:

$$u = \pi \int \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2 \pi}{a^2}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) + C.$$

Für den Inhalt der Zone, deren Oberfläche durch einen Bogen erzeugt wird, dessen Endpuncten die Abscissen α und β entsprechen, muss dieses Integral wieder von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ genommen werden. Für das ganze elliptische Sphäroid ist demnach dieses Integral von $x = -a$ bis $x = +a$ zu nehmen; dadurch erhält man (§. 872), wenn man dieses Ellipsoid durch K bezeichnet:

$$K = \frac{b^2 \pi}{a^2}(\tfrac{2}{3}a^3 + \tfrac{2}{3}a^3) = \tfrac{4}{3} a b^2 \pi.$$

3) Geschieht die Umdrehung derselben Ellipse um die kleine Axe, so erhält man für das nun entstehende Ellipsoid (indem man nur in der vorigen Formel von u, a und b mit einander verwechseln darf)

$$u' = \frac{a^2 \pi}{b^2}\int (b^2 - x^2)\,dx = \frac{a^2 \pi}{b^2}(b^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) + C.$$

und wenn man zur Bestimmung des ganzen elliptischen Sphäroides K' dieses unbestimmte Integral von $x = -b$ bis $x = +b$ nimmt:

$$K' = \frac{a^2 \pi}{b^2}(\tfrac{2}{3}b^3 + \tfrac{2}{3}b^3) = \tfrac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Zusatz. Die Vergleichung der beiden um die grosse und kleine Axe erzeugten elliptischen Sphäroide gibt:

$$K : K' = b : a.$$

Für $b = a$ dagegen erhält man aus beiden Ausdrücken als Inhalt der Kugel:

$$K = K' = \tfrac{4}{3} a^3 \pi.$$

Fig. 94. Anmerk. Dreht sich irgend eine ebene Figur $NMN'M'$ (Fig. 94) um eine in ihrer Ebene liegende Axe AX um, so erhält man den Inhalt des erzeugten Körpers sofort durch das bestimmte Integral:

$$u = \pi \int_{x'}^{x''} dx \left[\overline{f(x)}^2 - \overline{f'(x)}^2\right],$$

wenn wieder $y = PM = f(x)$ und $y = PM' = f'(x)$ die der allgemeinen Abscisse x beziehungsweise in der obern und untern Curve entsprechenden Ordinaten, und x', x'' die Abscissen AQ und AQ' bezeichnen.

Beispiel. Ist z. B. die beschreibende Fläche eine Kreisfläche mM (Fig. 97) vom Halbmesser $CN = r$, der Abstand des Mittelpunctes C von der Umdrehungsaxe $XX' = a$, und A der Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, also $AP = x$; so ist Fig. 97.

$$PM = f(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad PM' = f'(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2},$$

folglich nach der vorigen Formel der Inhalt des erzeugten ringförmigen Körpers:

$$u = \pi \int_{-r}^{+r} dx \left[(a^2 + r^2 - x^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2}) - (a^2 + r^2 - x^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2})\right]$$

$$= 4a\pi \int_{-r}^{+r} dx \sqrt{r^2 - x^2} = 4a\pi \cdot \frac{r^2}{2}\pi = 2ar^2\pi^2$$

(wegen $\int dx \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \, arc \sin \frac{x}{r}$, §. 819, 2).

Anmerk. Stellt man diesen Ausdruck in der Form von $u = r^2\pi . 2a\pi$ dar, so erkennt man darin die Guldins'sche Regel, welche in der Mechanik (Supplem. 41) abgeleitet wird.

Wäre die erzeugende Fläche eine Ellipse von den Halbaxen a und b, welche sich um eine mit der grossen Axe $2a$ parallele Gerade, die von ihr um die Grösse c absteht, umdreht, so wäre der cubische Inhalt des erzeugten Körpers $u = ab\pi . 2c\pi = 2abc\pi^2$.

Bestimmte Doppel-Integrale und deren geometrische Bedeutung.

§. **890.** Ist $z = f(x, y)$ eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x, y, welche innerhalb der Grenzen von $x = x_0$ bis $x = x_1$ und $y = y_0$ bis $y = y_1$ continuirlich und endlich bleibt; so kann man, ohne dabei x zu ändern, zuerst die Summe aus allen unendlich kleinen Werthen von $z\,dy$ innerhalb der Grenzen y_0, y_1 nehmen, welche Summe, d. i. das bestimmte Integral $\int_{y_0}^{y_1} z\,dy$ sofort eine gewisse Function von x sein wird. Nimmt man hierauf eben so die Summe der unendlich kleinen Werthe $(\int_{y_0}^{y_1} z\,dy)\,dx$ zwischen den Grenzen x_0, x_1, so erhält man das Doppel-

Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}(\int_{y_0}^{y_1} z\,dy)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} z\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dx\,dy \ldots (1),$$

und dasselbe ist sofort die Summe aus allen den unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, welche aus der Function $f(x, y)\,dx\,dy$ entstehen, wenn man darin x und y beziehungsweise in den unendlich kleinen Intervallen dx und dy innerhalb der Grenzen x_0, x_1 und y_0, y_1 variiren lässt. Oder mit andern Worten, theilt man das Intervall $x_1 - x_0$ in m gleiche Theile Δx und jenes $y_1 - y_0$ in n gleiche Theile Δy, und nimmt die Summe aus allen Werthen der Function

$$f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y \ldots (2),$$

welche durch Combination aller Werthe von x, welche in der Reihe

$$x_0,\ x_0 + \Delta x,\ x_0 + 2\Delta x, \ldots\ x_0 + (m-1)\,\Delta x$$

enthalten sind, mit allen Werthen der Reihe

$$y_0,\ y_0 + \Delta y,\ y_0 + 2\Delta y, \ldots\ y + (n-1)\,\Delta y$$

entstehen, und lässt man dann m und n unendlich zu-, folglich die Incremente $\Delta x = \frac{x_0 - x_1}{m}$ und $\Delta y = \frac{y_0 - y_1}{n}$ unendlich abnehmen, so nähert sich diese Summe dabei einer Grenze, welche eben das genannte Doppel-Integral (1) ist.

Es ist nämlich, da, wie man sieht, die Ordnung, in welcher beide Integrationen ausgeführt werden, willkürlich ist, sofort

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx$$
$$= lim.\ \Sigma\Sigma f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y \ldots (3).$$

(Auch kann der Beweis wieder genau so wie in §. 873 geführt werden.)

Denkt man sich, um die geometrische Bedeutung dieses Doppel-Integrals anschaulich zu machen, ein rechtwinkeliges Parallelopiped, dessen Seiten beziehungsweise mit den drei Coordinatenaxen parallel sind, und dessen Grundfläche in der Ebene der xy liegt, wobei die beiden mit der Axe der y parallelen Seiten von dieser beziehungsweise die Abstände a, a', so wie jene mit der Axe der x parallelen, von dieser letztern die Abstände b, b' haben sollen, und nimmt man die Abscissen $AP = x$ und $Ap = AP + Pp = x + dx$, wobei $x > a$ und $< a'$ ist, und legt durch diese Puncte P und p mit der Ebene der yz parallele Ebenen, so wird durch diese aus dem Parallelopiped eine unendlich

dünne Schichte, nämlich ein Parallelopiped heraus geschnitten, dessen (mit der Ebene der xy parallele) Seitenfläche, wenn c die Höhe des ursprünglichen Parallelopipedes ist, ein Rechteck von den Seiten $b'-b$, c und Dicke $= dx$ ist.

Legt man hierauf auf ähnliche Weise durch zwei Puncte Q und q der Axe der y, wofür $AQ = y$ und $Aq = AQ + Qq = y + dy$ und zugleich $y > b$ und $< b'$ ist, zwei Ebenen parallel mit der Ebene der xz, so wird aus der eben genannten Schichte abermals ein unendlich dünner Körper, d. i. ein Parallelopiped von der Grundfläche $dx\,dy$ und der (mit der Axe der z parallelen) Höhe c herausgeschnitten.

Bezeichnet man daher das Volumen des angenommenen Parallelopipedes, dessen Seiten also $a'-a$, $b'-b$ und c sind, mit V, so ist $dV = (b_1 - b_0)\,c\,dx$ und $d^2V = c\,dx\,dy$, und man erhält offenbar aus der Summirung aller der unendlich dünnen Prismen $c\,dx\,dy$ nach der Richtung der Axe der y, wobei also x constant bleibt innerhalb der Grenzen von $y_0 = b$ bis $y_1 = b'$ die unendlich dünne Schichte $(b'-b)\,c\,dx$, und durch das Summiren aller dieser Schichten nach der Richtung der Axe der x zwischen den Grenzen $x_0 = a$ und $x_1 = a'$ das Volumen V des gedachten Parallelopipedes. Es ist nämlich:

$$V = \int_a^{a'}\int_b^{b'} c\,dx\,dy = c\int_a^{a'} dx \int_b^{b} dy = c\int_a^{a'} dx\,(b'-b) = c(b'-b)\int_a^{a'} dx$$
$$= c(b'-b)(a'-a).$$

Da man aber auch die Ordnung dieser zweifachen Summirung umkehren, und zuerst die unendlich dünnen Prismen (als unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung) $c\,dx\,dy$ nach der Richtung der x summiren kann, um dadurch die Schichte $c(a'-a)\,dy$ zu erhalten, welche Schichten (als unendlich klein der ersten Ordnung) hierauf nach der Axe der y summirt, ebenfalls das Volumen V geben; so ist eben so:

$$V = c\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} dx = c\int_b^{b'} dy\,(a'-a) = c(a'-a)\int_b^{b'} dy = c(a'-a)(b'-b).$$

Anmerk. Hätten die beiden mit der Ebene der xy parallelen obern und untern Grundflächen des Parallelopipedes von dieser Ebene die Abstände c und c', und hätte man das vorige Prisma von der Grundfläche $dx\,dy$ nochmals, und zwar durch zwei unendlich nahe liegende, mit der Ebene der xy parallele Ebenen, in den Abständen z und $z + dz$ zerschnitten; so würde man das unendlich kleine Körperelement der dritten Ordnung $dx\,dy\,dz$, und davon ausgehend $V = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} dz$, nämlich das Volumen durch das dreifache bestimmte Integral erhalten haben, wobei wieder die Ordnung der Integrationen willkürlich ist.

§. **891.** Anstatt die Grenzen y_0, y_1 in dem obigen Integral $\int_{y_0}^{y_1} z\,dy$ als constant oder von x unabhängig zu betrachten, kann man auch allgemeiner diese Grenzen als variabel und von x abhängig ansehen, also $y_0 = \varphi(x)$ und $y_1 = \psi(x)$ setzen. Aber auch in diesem Sinne ist das bestimmte Integral $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$ bloss von x abhängig oder eine bestimmte Function von x, welche weiters zwischen den Grenzen x_0, x_1 nach x integrirt, das Doppel-Integral $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$ gibt.

Geometrisch genommen, drückt dieses Doppel-Integral das Volumen
Fig. 82. eines Körpers $N_0 R$ (Fig. 82) aus, welcher von der in der Ebene der xy liegenden Grundfläche $N_0 M_1$ (von zwei Geraden $M_0 N_0$, $M_1 N_1$ und zwei Curven $M_0 M_1$, $N_0 N_1$ begrenzt) von den zwei mit der Ebene der yz parallelen Ebenen $N_0 U$, $N_1 R$, zwei mit der Axe der z parallelen (durch die Curven $N_0 N_1$ und $M_0 M_1$ gehenden) Cylinderflächen $N_1 K$, $M_1 U$, und endlich oberhalb von irgend einer krummen, durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegebenen krummen Fläche QR begrenzt ist. Dabei ist, wie im vorigen §., $AP_0 = x_0$, $AP_1 = x_1$, $AP = x$, $Pp = dx$, $PS = y$, $Ss = dy$, dagegen jetzt $y_0 = PM = \varphi(x)$ als Gleichung der Curve $M_0 M M_1$, so wie $y_1 = PN = \psi(x)$ als Gleichung der Curve $N_0 N N_1$.

Auch hier wird zuerst durch Summirung der unendlich dünnen Parallelopipede ST (vom Volumen $z\,dx\,dy$) nach der Richtung der Axe der y von $y = PM$ bis PN, nämlich durch Bestimmung des Integrales $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$ die unendlich dünne Schichte Nl von der Dicke dx, und durch weiteres Summiren aller dieser analogen Schichten nach der Richtung der Axe der x, und zwar von $x = AP_0$ bis AP_1 das Volumen V dieses Körpers gefunden, so, dass auch hier

$$(4) \quad . \quad . \quad V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \quad \text{ist.}$$

§. **892.** Um die Anwendung dieser allgemeinen Doppel-Integrale auf die Cubatur von Körpern, welche von beliebigen krummen Flächen begrenzt werden, zu zeigen, wollen wir noch folgendes einfache Beispiel behandeln.

Beispiel. Um das Volumen des Ellipsoides von drei ungleichen Axen zu bestimmen, hat man zuerst, wenn die Coordinatenaxen mit den drei rechtwinkeligen Axen des Ellipsoides zusammenfallen und wenn dessen Mittelpunct zum Anfang der Coordinaten genommen wird, als Gleichung des Ellipsoides (II, S. 434):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{oder} \quad z=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-y^2},$$

folglich für den Schnitt dieser krummen Fläche $[z=f(x,y)]$ mit der Ebene der xy (wegen $z=0$) die Gleichung $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (nämlich die Gleichung einer Ellipse, die Abscissen auf der Hauptaxe vom Mittelpunct aus gezählt), oder wenn man $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=u$ setzt, auch $y=\pm u$, so, dass also hier die Grenzen der Integration nach y sind: $\varphi(x)=-u$ und $\psi(x)=+u$. Da ferner die Grenzen der Integration nach x sofort $x_0=-a$ und $x_1=+a$ sind, so hat man für das gesuchte Volumen nach dem vorigen Ausdruck (4):

$$V=\int_{-a}^{a}dx\int_{-u}^{u}z\,dy.$$

Nun ist aber

$$\int_{-u}^{u}z\,dy=\int_{-u}^{u}\frac{c}{b}dy\sqrt{u^2-y^2},$$

wobei x, folglich auch u als constant zu betrachten ist, mithin wegen

$$\int dy\sqrt{u^2-y^2}=\tfrac{1}{2}y\sqrt{u^2-y^2}+\tfrac{1}{2}u^2\,arc\sin\left(\frac{y}{u}\right) \quad (\text{§. 819, 2})$$

sofort

$$\int_{-u}^{u}z\,dy=\frac{c}{b}\int_{-u}^{u}dy\sqrt{u^2-y^2}=\frac{\pi}{2}\frac{c}{b}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

wenn man nämlich für u den Werth wieder herstellt, und sonach

$$V=\frac{\pi}{2}\frac{bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\tfrac{4}{3}\pi abc.$$

Anhang.

Die Elemente der Variationsrechnung.

Einleitung.

§. 1. Die Aufgaben über die Maxima und Minima führen nicht nur, wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen, zu einer schönen Anwendung der Differentialrechnung, sondern auch noch zu einer merkwürdigen Erweiterung derselben oder zu einer neuen Rechnungsmethode, nämlich zur sogenannten Variationsrechnung. Bei den bisher behandelten Problemen dieser Art handelte es sich bloss darum, diejenigen Werthe der veränderlichen Grössen zu bestimmen, für welche die betreffende Function dieser Variablen, die immer als gegeben oder bekannt vorausgesetzt war, ein Maximum oder Minimum wurde.

Fasst man hingegen diese Fragen von einem allgemeineren Gesichtspuncte auf, und sieht dabei die Function, welche unter gewissen Bedingungen einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll, selbst als unbekannt oder unbestimmt an; so reicht die Differentialrechnung nicht mehr aus, und man muss zu dieser neuen, nämlich zur Variationsrechnung Zuflucht nehmen.

Soll z. B. in einer gegebenen ebenen Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ sein mag, unter allen Bögen derselben, deren Projection auf die Abscissenaxe eine constante Grösse, z. B. $= a$ ist, jener gesucht werden, welcher dabei die kleinste Länge hat, so muss man in dem bestimmten Integrale $s = \int_x^{x+a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ jenen Werth der Variablen x suchen, wofür dasselbe ein Minimum wird, was ganz einfach nach den bekannten Regeln mit Hilfe der Differentialrechnung geschieht.

Soll dagegen unter allen ebenen Curven, welche durch zwei bestimmte Puncte x', y', x'', y'' gehen, diejenige bestimmt werden, deren zwischen diesen Puncten liegender Bogen am kleinsten wird; so muss die Gleichung der gesuchten Curve $y = f(x)$, d. i. die Relation zwischen der Ordinate y eines beliebigen Punctes dieser Curve und der entsprechenden Abscisse x erst gefunden werden, wofür das bestimmte Integral $s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein Minimum wird, eine Aufgabe, welche nach der bisher vorgetragenen Regel der Differentialrechnung nicht aufgelöst werden kann.

Auf gleiche Weise kann verlangt werden, unter allen ebenen Curven diejenige zu finden, welche bei einem gegebenen Umfange die grösste Fläche einschliesst (oder was dasselbe ist, bei einer gegebenen einzuschliessenden Fläche den kleinsten Umfang besitzt). Diese Forderung fällt, da $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ die Fläche der von der Abscisse, den beiden, den Abscissen x', x'' entsprechenden Ordinaten und dem zwischenliegenden Bogen, so wie $\int_{x'}^{x''} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ die Länge dieses Bogens bezeichnet, mit der Aufgabe zusammen: diejenige Relation oder Gleichung zwischen x und y aufzusuchen (oder die Function f in $y = f(x)$ zu bestimmen), wofür das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck $\int_{x'}^{x''} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ dabei constant bleibt, ein Maximum werde. Auch dieses Problem lässt sich nur mittelst der Variationsrechnung lösen.

Anmerk. Noch allgemeiner werden diese Aufgaben über das Maximum und Minimum, wenn man dabei auch die Grenzen der Integrale, d. i. x', x'' als variabel ansieht. Sind z. B. zwei ebene Curven gegeben, und soll unter allen Curven, welche diese beiden mit einander verbinden können, überhaupt die kürzeste gefunden werden; so muss man wieder jene Relation $y = f(x)$ aufsuchen, für welche

der Integralausdruck $\int_{x}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, in welchem jedoch die Grenzen x, x_1 in der Art variabel sind, dass sie die Abscissen beliebiger Puncte der gegebenen beiden Curven bezeichnen, ein Minimum wird.

In der analytischen Mechanik sind solche, in das Gebiet der Variationsrechnung gehörigen Aufgaben noch wichtiger, und es hat in der That auch das von Joh. Bernoulli zuerst behandelte Problem der Linie des schnellsten Falles oder der Brachystochrone die erste Veranlassung zur Begründung der Variationsrechnung gegeben.

Erklärungen.

§. 2. Soll in der Voraussetzung von

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

y als eine Function von x angesehen und dabei so bestimmt werden, dass das bestimmte Integral (a) $\int_{x'}^{x''} Vdx$ dafür ein Maximum oder Minimum wird, so sei $y = f(x)$ diese gesuchte Relation (also f die erwähnte Function). Setzt man sonach in dem Ausdrucke von V für $y, \frac{dy}{dx} \ldots$ beziehungsweise $f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2} \ldots$ und führt die in (a) angezeigte Integration aus, so wird man einen Ausdruck von der Form

$$\int_{x'}^{x''} Vdx = \varphi(x', x'')$$

erhalten.

Bezeichnet ferner $f'(x)$ eine Function, welche von der vorigen $f(x)$ nur unendlich wenig verschieden ist, so entsteht, wenn man eben so in V wieder $f'(x), \frac{df'(x)}{dx} \ldots$ für $y, \frac{dy}{dx} \ldots$ setzt, und die Integration zwischen den genannten Grenzen ausführt, ein Resultat $\varphi'(x', x'')$, welches von dem vorigen $\varphi(x', x'')$ nur um unendlich wenig abweicht.

Man bezeichnet nun die auf solche Weise entstehende verschwindend kleine Differenz $\varphi'(x', x'') - \varphi(x', x'')$ durch den griechischen Buchstaben δ und nennt $\delta\varphi(x', x'')$ die Variation der Function $\varphi(x', x'')$.

§. 3. Da man also unter einer Variation die unendlich klein werdende Aenderung einer Function, oder wenn man will, das Differentiale der Function nach dem Buchstaben δ versteht, so folgt, dass wenn $y = f(x)$ ist und $f'(x)$ eine von $f(x)$ nur unendlich wenig abweichende Function bezeichnet, sofort

$$\delta y = f'(x) - f(x) \text{ ist.}$$

Auf ganz gleiche Weise ist auch, unter derselben Voraussetzung, für $y = f(x, u, z \ldots)$ sofort die Variation von y:

$$\delta y = f'(x, u, z \ldots) - f(x, u, z \ldots).$$

§. 4. Die Bedeutung der Variationen lässt sich übrigens auch durch folgende geometrische Betrachtung anschaulich machen.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve RS
Fig. 98. (Fig. 98), und für irgend einen Punct M derselben seien $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten; so entsprechen dem Uebergange von diesem Puncte M zu dem unendlich nahe liegenden Puncte N in derselben Curve die unendlich kleinen Zunahmen $PQ = dx$ und $QN - PM = dy$.

Ist ferner $R'S'$ eine der vorigen unendlich nahe liegende zweite Curve, so entsprechen dem Uebergange von dem Puncte M der ersten Curve zum correspondirenden Puncte M' der zweiten Curve die ebenfalls unendlich kleinen Zunahmen $PP' = \delta x$ und $P'M' - PM = \delta y$, oder da es, um nur den Einfluss kennen zu lernen, welchen eine Veränderung in der Relation $y = f(x)$ auf das Integrale $\int V dx$ hervorbringt, genügt, y unabhängig von x zu- oder abnehmen, also x unverändert zu lassen, oder $\delta x = 0$ zu setzen, wodurch M' auf m fällt und sofort auch $Mm = \delta y$ wird.

So wie also die unendlich kleine Aenderung dy, welche entsteht, wenn man in der nämlichen Curve RS von einem Puncte M zu dem nächst folgenden, dem erstern unendlich nahe liegenden Puncte N fortgeht, das Differentiale von y heisst, so wird jene unendlich kleine Aenderung δy, welche in y entsteht, wenn man von dem Puncte M der

genannten Curve RS zu dem correspondirenden (in derselben Ordinate liegenden) Puncte m der zweiten, der erstern unendlich nahe liegenden Curve $R'S'$ übergeht, die Variation von y genannt.

§. 5. Da also die Variation δy nichts anderes als ein Differentiale von y, nur in einer andern Bedeutung, ist, so fordert die Variationsrechnung im Grunde genommen keine neuen, von der Differentialrechnung verschiedene Regeln oder Grundsätze, sondern nur eine neue Anwendung der bereits bekannten. Die Regeln und Formeln der Differentialrechnung gelten daher auch für die Variationsrechnung, nur dass man dabei überall den Buchstaben δ statt jenen d setzen muss.

So ist z. B. für $y = 2u^3 + a^x$ die Variation:

$$\delta y = 6u^2 \delta u + a^x \log a \delta x;$$

dabei dürfen jedoch die Grössen δu und δx, obschon sie ebenfalls unendlich klein sind, dennoch mit jenen du und dx, denen, wie wir gesehen, eine andere Bedeutung zukömmt, nicht verwechselt werden.

Wir gehen nunmehr zu einigen vorbereitenden Sätzen über.

§. 6. Es ist nach dem eben Gesagten

$\delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$ und daraus $\delta dy = \delta(y + dy) - \delta y$.

Um von δy das Differential zu erhalten, muss man in δy sofort y in $y + dy$ übergehen lassen und δy abziehen; dadurch entsteht aber $d\delta y = \delta(y + dy) - \delta y$, nämlich wieder der vorige Ausdruck, so dass also

$$\delta dy = d\delta y \ldots (1)$$

ist. Es ist nämlich ganz gleichgiltig, ob man zuerst eine Function differentiirt und dann variirt, oder umgekehrt zuerst variirt und dann differentiirt *).

*) Da die Ordinate $Q'N'$ (Fig. 98) eben sowohl durch die Variation der Ordinate QN, als durch die Differentiation von jener $P'M'$ entstehen kann, so hat man, da im erstern Falle $Q'N' = QN + \delta . QN = y + dy + \delta(y + dy)$ und im letztern Falle $Q'N' = P'M' + d . P'M' = y + \delta y + d(y + \delta y)$ ist, sofort wieder die obige Relation (1). Fig. 98.

Aus dieser Relation (1) folgt weiters unmittelbar
$\delta d^2y = d^2\delta y$ und allgemein $\delta d^n y = d^n \delta y$.

§. 7. Es sei ferner $V = \int U$, also $dV = U$ und $\delta dV = \delta U$, so folgt mit Rücksicht auf die vorige Relation (1) auch $d\delta V = \delta U$, und daher, wenn man wieder integrirt:

$$\delta V = \int \delta U,$$

oder, wenn man für V den ursprünglichen Werth herstellt:

$$\delta \int U = \int \delta U \ldots (2),$$

d. h. es ist gleichgiltig, ob man zuerst integrirt und dann variirt, oder umgekehrt verfährt. Eben so folgt daraus auch ferner:
$\delta \int\int U = \int \delta \int U = \int\int \delta U$, d. i. $\delta \int^2 U = \int^2 \delta U$, so wie auch allgemein:

$$\delta \int^n U = \int^n \delta U.$$

§. 8. Ist U eine Function von $x, y, dx, dy, d^2x, d^2y \ldots$, so muss man, um δU zu erhalten, x in $x + \delta x$, y in $y + \delta y$ u. s. w. übergehen lassen, und von der auf diese Weise geänderten Function die ursprüngliche abziehen; dadurch erhält man aber (indem man dabei ebenfalls die mit den höhern Potenzen von δx, δy ... behafteten Glieder auslassen muss) nichts anderes, als das gewöhnliche Differentiale von U in Bezug auf die Variablen x, y, dx, dy u. s. w., jedoch hinsichtlich des Buchstabens δ genommen. Es sind nämlich die Variationen von x, y, dx, dy.. sofort δx, δy, δdx, δdy, δd^2x u. s. w. so, dass wenn man das Differentiale von U durch
$dU = Mdx + Nd^2x + Pd^3x + .. + M'dy + N'd^2y + P'd^3y + ..$
ausdrückt, sofort auch die Variation von U durch

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + ..$$
$$+ M'\delta y + N'\delta dy + P'\delta d^2y + Q'\delta d^3y + ..$$

ausgedrückt wird, woraus sonach folgt, dass man in dem Ausdrucke von dU nur überall das erste aus der Differentiation von U entstehende Differentialzeichen d in das Variationszeichen δ verwandeln darf.

§. 9. Lässt sich dabei U auf die Form Vdx bringen und wird y als eine Function von x betrachtet, so ist V

irgend eine Function von x, y, p, q u. s. w., wenn man nämlich $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$ u. s. w. setzt, folglich ihr Differential

$$(a) \;.\;. dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots,$$

oder was dasselbe ist:

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dp}\right) dp + \ldots$$

Nach der vorigen Bemerkung ist sonach die Variation von V:

$$(a') \;.\;. \delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots,$$

oder auch:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta q + \ldots$$

Dabei kann, wie bei der gewöhnlichen Differentialrechnung, $\delta p = \delta . \frac{dy}{dx}$ entweder unter der Voraussetzung, dass dx constant, oder auch unter jener entwickelt werden, dass dx selbst noch veränderlich ist; dasselbe gilt auch in Beziehung auf δq, δr u. s. w. In diesem letztern Sinne ist

$$\left.\begin{aligned} \delta p &= \delta . \frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - p\delta dx}{dx} \\ \delta q &= \delta . \frac{dp}{dx} = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dp - q\delta dx}{dx} \end{aligned}\right\} (p)$$

u. s. w.

Man muss also, im Falle die Variation von V in dem Sinne entwickelt werden soll, dass dx variabel ist, in dem obigen Ausdrucke (a') von δV für δp, δq, ... diese eben entwickelten Werthe setzen.

Anmerk. In den vorstehenden Entwickelungen wurde bloss der Fall betrachtet, in welchem nur eine einzige, von der absolut Variablen x abhängige Function y vorkömmt, was sofort auch für alle Aufgaben genügt, die sich auf ebene Curven beziehen. In jenen Aufgaben jedoch, in welchen Curven von doppelter Krümmung betrachtet werden, kommen ausser der unabhängig variablen Grösse x zwei davon abhängige Functionen y und z vor, so dass dabei V ausser der Veränderlichen x die Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... und z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ etc. enthält. In diesem Falle ist es aber ebenfalls leicht, aus den obigen Entwickelungen die entsprechenden Ausdrücke für die Variation von V zu erhalten; es folgt nämlich analog aus der obigen Relation (a'):

$$(a'')\ \delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$
$$+ N'\delta z + P'\delta\frac{dz}{dx} + Q'\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots$$

Dabei fällt eben sowohl, wie in der obigen Entwickelung (a'), das erste Glied $M\delta x$ noch hinaus, wenn man annimmt, dass x in V keine Variation erleidet, was bei allen Aufgaben der Fall ist, bei welchen die Abscissen der Endpuncte der gesuchten Curve constant sind.

§. **10.** Um nun unter der Voraussetzung, dass U eine Function von x, y, dx, dy, d^2x, $d^2y \ldots$ ist, die Variation $\delta\int U$ zu entwickeln, hat man:

$\delta\int U = \int\delta U$, oder wenn man für δU den Werth aus §.8 setzt, auch

$$\delta\int U = \int(M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \ldots)$$
$$+\int(M'\delta y + N'\delta dy + P'\delta d^2y + Q'\delta d^3y + \ldots)$$

Dieser Ausdruck lässt sich jedoch dadurch weiter reduciren, dass man in allen Gliedern, in welchen die beiden Operationszeichen d und δ zusammen vorkommen, das Differentialzeichen d vor das Variationszeichen δ setzt und dann die Theil-Integrationen anwendet. Dadurch wird

$$\int M\delta x = \int M\delta x,\ \int N\delta dx = \int Nd\delta x = N\delta x - \int\delta x dN$$
$$\int P\delta d^2x = \int Pd^2\delta x = Pd\delta x - \int d\delta x dP = Pd\delta x - dP\delta x + \int\delta x d^2P$$
$$\int Q\delta d^3x = \int Qd^3\delta x = Qd^2\delta x - \int d^2\delta x dQ = Qd^2\delta x - dQd\delta x$$
$$+\int d\delta x d^2Q = Qd^2\delta x - dQd\delta x + d^2Q\delta x - \int\delta x d^3Q$$

u. s. w., und da man durch blosse Verwechslung der Buchstaben hieraus auch dieselben Ausdrücke für $\int M'\delta y$, $\int N'\delta dy$ u. s. w. erhält, so folgt, wenn man diese Werthe in dem vorigen Ausdrucke von $\delta\int U$ substituirt und alles nach δx, $d\delta x$, $d^2\delta x$ u. s. w. ordnet, sofort:

$$(3)\ \delta\int U = (N - dP + d^2Q - \ldots)\delta x + (P - dQ + \ldots)d\delta x$$
$$+ (Q - \text{etc.})d^2\delta x + \ldots$$
$$+ (N' - dP' + d^2Q' - \ldots)\delta y + (P' - dQ' + \ldots)d\delta y$$
$$+ (Q' - \text{etc.})d^2\delta y + \ldots$$
$$+\int(M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots)\delta x$$
$$+\int(M' - dN' + d^2P' - d^3Q' + \ldots)\delta y,$$

nämlich ein Ausdruck, welcher aus zwei ganz ähnlichen Theilen besteht, wovon der eine durch die Variation von x, und der andere durch jene von y erzeugt wird.

Anmerk. Enthält U ausser x und y noch die Variable z, so muss man dem vorigen Ausdrucke noch einen dritten Theil hinzufügen, welcher aus der Variation von z entsteht, und den beiden Theilen in x und y ganz ähnlich oder analog ist. Aehnliches gilt, wenn in U noch mehrere Variable enthalten sind.

§. 11. Setzt man die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke gleich Null, so verschwinden in (3) die mit den Integralzeichen behafteten Glieder, und es müssen sonach die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots &= 0 \\ \text{und } M' - dN' + d^2P' - d^3Q' + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} (m)$$

die Bedingungsgleichungen für die Integrabilität von U sein, was sich auch in der That leicht beweisen lässt.

Ist nämlich U ein vollständiger Differentialausdruck, und z. B. $U = dU'$, so ist auch $\delta U = \delta dU' = d\delta U'$, mithin δU ebenfalls ein vollständiges Differentiale (nämlich von $\delta U'$). Hat man nun in der Entwickelung von $\int \delta U$ alle Glieder, welche integrabel sind, von ihren Integralzeichen befreit, so müssen sich die übrigen Glieder, welche noch unter diesen Zeichen stehen bleiben, von selbst, ohne dass man erst eine gewisse Bedingung zwischen x, y, δx und δy anzunehmen braucht, aufheben; es sind demnach die vorigen Gleichungen (m) in der That zugleich die Bedingungsgleichungen für die Integrabilität von $\int U$.

§. 12. Die vorigen Ausdrücke lassen sich noch weiter vereinfachen, wenn sich die Function U unter der Form $V dx$ darstellen lässt, denn es ist dann

$$\delta \int V dx = \int \delta . V dx = \int (\delta V dx + V \delta dx) = \int \delta V dx + \int V d\delta x,$$

oder wegen $\int V d\delta x = V\delta x - \int dV\delta x$ (wenn man nämlich theilweise integrirt) auch

$$(b) \quad \delta \int V dx = V\delta x + \int (dx\delta V - dV\delta x).$$

Setzt man ferner für dV und δV die in §. 9 gegebenen Ausdrücke aus (a) und (a'), so erhält man

$$dx\delta V - dV\delta x = N(dx\delta y - dy\delta x) + P(dx\delta p - dp\delta x) + Q(dx\delta q - dq\delta x) + \ldots,$$

oder wegen $dy = p dx$ und [§. 9, Relat. (p)] $\delta p = \frac{\delta dy - p\delta dx}{dx}$, wodurch

$$dx\delta y - dy\delta x = dx\delta y - p dx\delta x = dx(\delta y - p\delta x),$$

und ferner:

$$dx\delta p - dp\delta x = \delta dy - p\delta dx - dp\delta x$$
$$= d\delta y - p\,d\delta x - dp\,\delta x$$
$$= d\,.\,(\delta y - p\delta x) = d\,.\left(\frac{dx\delta y - dy\delta x}{dx}\right)$$

(wenn man nämlich die unmittelbar vorhergehende Relation berücksichtigt), dann (wozu man in dieser letztern Relation nur p statt y und q statt p setzen darf)

$$dx\delta q - dq\delta x = d\,.\left(\frac{dx\delta p - dp\delta x}{dx}\right)$$

u. s. w. wird, auch, wenn man noch Kürze halber $\delta y - p\delta x = v$ setzt, woraus weiters

$$dx\delta y - dy\delta x = v\,dx,$$
$$dx\delta p - dp\delta x = dv,$$
$$dx\,\delta q - dq\,\delta x = d\,.\,\frac{dv}{dx}$$

u. s. w. folgt, endlich nach gehöriger Substitution:

$$\int(dx\delta V - dV\delta x) = \int Nv\,dx + \int P dv + \int Q d\,.\,\frac{dv}{dx} + \ldots$$

Die vorige Formel (b) erhält daher, wenn man darin diesen letztern Werth substituirt, die Form:

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int Nv\,dx + \int P dv + \int Q d\,.\,\frac{dv}{dx} + \ldots$$

Es ist aber ferner, wenn man theilweise integrirt:

$$\int P dv = Pv - \int v\,dP,$$
$$\int Q d.\frac{dv}{dx} = Q\frac{dv}{dx} - \int dv\frac{dQ}{dx} = Q\frac{dv}{dx} - \frac{dQ}{dx}v + \int v\,d\,.\,\frac{dQ}{dx}$$

u. s. w.;

daher auch endlich:

$$(4)\quad \delta\int V dx = V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \ldots\right)v + \left(Q - \text{etc.}\right)\frac{dv}{dx} + \ldots$$
$$+ \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d\,.\,\frac{dQ}{dx} - \ldots\right)v\,dx.$$

§. **13.** Berücksichtigt man vorläufig nur den mit dem Integralzeichen behafteten Theil dieser Formel (4), und stellt für v wieder den Werth her, so zerfällt dieser genannte Integralausdruck in die beiden folgenden:

$$\int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d\,.\,\frac{dQ}{dx} - \ldots\right)dx\delta y \quad \text{und}$$
$$\int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d\,.\,\frac{dQ}{dx} - \ldots\right)p\,dx\delta x;$$

woraus sich jetzt ganz einfach die Beziehung ergibt, in welcher die Coefficienten von δy und δx zu einander stehen; denn es folgt daraus, dass wenn man diese Coefficienten beziehungsweise durch ψ und φ bezeichnet, sofort

$$(c) \quad \varphi = - p\psi$$

ist. Wird daher einer derselben Null, so verschwindet auch der andere, und es ist sofort der Ausdruck Vdx integrabel, wenn einer dieser beiden Coefficienten verschwindet, d. h. wenn die Bedingungsgleichung besteht:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \cdot \frac{dQ}{dx} - \ldots = 0. \quad (n).$$

Grösste und kleinste Werthe der unbestimmten Integralformeln.

§. **14.** Integrale von der Form $\int Vdx$, wobei

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\right)$$

und y irgend eine Function von x sein soll, sind so lange unbestimmt, als diese letztere Function, d. i. die Relation zwischen x und y noch unbekannt oder unbestimmt ist. Soll ein solches Integral für irgend eine erst aufzufindende Relation von $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum werden, so kann diess, wie bereits bemerkt, nur innerhalb gewisser Grenzen von x Statt finden.

Die grössten und kleinsten Werthe solcher unbestimmter Integrale zwischen gegebenen Grenzen werden aber mittelst der Variationsrechnung, und zwar nach dem in der Differentialrechnung bewiesenen analogen Satze bestimmt, das für ein Max. oder Min. der variirenden Function u sofort die Variation δu gleich Null sein müsse; weil, wenn u eine zunehmende Grösse ist und variirt, diese in $u + \delta u$, dagegen, wenn sie eine abnehmende Grösse ist, in $u - \delta u$ übergeht. Nimmt aber u zuerst zu und dann wieder ab, so dass u an irgend einer Stelle ein Maximum erreicht; so geht die Variation δu aus dem positiven in den negativen Zustand über und dabei in der Regel durch Null (und nur ausnahmsweise durch Unendlich). Das Umgekehrte findet sofort für ein Minimum Statt, wobei u zuerst ab-, und dann

zunimmt, also δu aus dem negativen in den positiven Zustand, und zwar wieder durch Null, geht.

Da überhaupt Alles das, was bei der Begründung des Verfahrens zur Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe der Functionen mittelst der Differentialrechnung (§§. 698, 699) entwickelt oder bemerkt wurde, auch hier seine volle Anwendung findet; so mag nur noch bemerkt werden, dass ausser der ersten Bedingung von $\delta u = 0$, welche Statt finden muss, wenn u ein Maximum oder Minimum werden soll, sofort beziehungsweise $\delta^2 u < 0$ und $\delta^2 u > 0$ sein muss, wenn nicht etwa auch $\delta^2 u = 0$ wird, worauf man auf die nächst höheren Variationen überzugehen hat.

§. **15.** Ist nun $u = \int U$, so ist $\delta u = \int \delta U$, und daher für ein Maximum oder Minimum von $\int U$ sofort $\int \delta U = 0$; dabei kommt jedoch zu bemerken, dass in dieser letztern Bedingungsgleichung das Integral $\int \delta U$ zwischen den nämlichen Grenzen genommen werden muss, zwischen welchen es eben ein Maximum oder Minimum werden soll.

Berücksichtigt man aber, dass die Entwickelung von $\int \delta U$ in (3), §. 10, aus zwei wesentlich verschiedenen, ungleichartigen Theilen besteht, wovon der eine vollkommen integrirt, der andere aber mit dem Integralzeichen behaftet und so lange nicht integrabel ist, als δx und δy ihre gegenseitige Unabhängigkeit oder vielmehr Unbestimmtheit, was jedoch gerade (§. 1) für die gegenwärtige Untersuchung die wesentlichste Bedingung ausmacht, beibehalten; es kann daher diese Entwickelung nicht anders Null werden, als indem die mit dem Integralzeichen behafteten Theile für sich verschwinden. Bezeichnet man nämlich in diesen letztern Theilen die Coefficienten von δx und δy mit φ und ψ, so führt die Bedingungsgleichung $\int \delta U = 0$ sofort auf jene $\int \varphi \delta x + \int \psi \delta y = 0$, und diese wieder auf die beiden folgenden:

$$(s) \quad \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0,$$

d. i. auf

$$\left.\begin{aligned} M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots &= 0 \\ M' - dN' + d^2P' - d^3Q' + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, dass überhaupt eben so viele solcher Bedingungsgleichungen entstehen, als in δU von einander unabhängige Variationen vorkommen.

§. 16. Enthält U bloss die beiden Variablen x und y, und lässt sich diese Function U dabei auf die Form $V dx$ bringen, so hat man, wegen [§. 13, (c)] $\varphi = -p\psi$, d. i. $\varphi = -\frac{dy}{dx}\psi$ oder $\varphi dx + \psi dy = 0$, für $\varphi = 0$ sofort auch $\psi = 0$, so, dass die eine der beiden vorigen Bedingungsgleichungen (s) nothwendig auch die andere nach sich zieht, oder vielmehr beide identisch sind und in die eine

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0 \quad (\beta)$$

zusammenfallen. Dasselbe findet auch für den vorigen Fall von $\int \delta U$ Statt, wenn x nicht variirt und also $\delta x = 0$ ist; ein Fall, welcher z. B. eintritt, wenn die Grenzen dieses Integrals in Beziehung auf x vollkommen festgesetzt, also nicht variabel sind.

Anmerk. Diese unbestimmte Gleichung (β) bildet die Differentialgleichung zwischen x und y, sie gehört allen Puncten der betreffenden Curve an, und sie muss vor Allem durch jene Relation zwischen x und y, durch welche die Aufgabe gelöst wird, realisirt, d. h. es muss ihr dadurch Genüge geleistet werden.

§. 17. Diese Bedingungsgleichungen (α) im erstern, und jene (β) im letztern Falle sind, wie man sieht, genau dieselben, welche [§§. 11 und 13, Relat. (m) und (n)] die Ausdrücke $\int U$ und $\int V dx$ integrabel machen. Sie bestimmen zugleich, wenn nicht U oder $V dx$ schon an und für sich integrabel sind, was jedoch bei den hieher gehörigen Problemen nicht sein darf oder soll, die Relation, welche zwischen x und y Statt finden muss, wenn das unbestimmte (dann aber bestimmte) Integral $\int U$ oder jenes $\int V dx$ innerhalb gegebener Grenzen ein Maximum oder Minimum werden soll. Lagrange nennt aus diesem Grunde die genannten Gleichungen (α) und (β) die allgemeinen Bedingungsgleichungen des Maximums und Minimums.

Was noch überdiess die Gleichung (β) betrifft, so ist leicht zu sehen, dass sie bis zur Ordnung $2n$ steigen kann,

wenn in V noch der n^{te} Differentialquotient, d. i. $\frac{d^n y}{dx^n}$ vorkommt; es wird sonach auch die daraus abgeleitete Integralgleichung, die sofort bei geometrischen Problemen die Gleichung der gesuchten Curve selbst ist, im Allgemeinen $2n$ willkürliche Constanten enthalten.

§. 18. Sind nun zufolge der Bedingungsgleichungen (α) in §. 15 die mit dem Integralzeichen behafteten Glieder oder Theile in dem Ausdrucke von $\delta\int U$ in §. 10, Relat. (3) herausgefallen, so hat man noch, wenn man Kürze halber die Coefficienten von δx, $d\delta x, \ldots$ durch A, $B, \ldots$, so wie jene von δy, $d\delta y, \ldots$ durch A', B' u. s. w. bezeichnet, sofort:

$$\int\delta U = A\delta x + Bd\delta x + Cd^2\delta x + \ldots$$
$$+ A'\delta y + B'd\delta y + Cd^2\delta y + \ldots$$

§. 19. Setzt man Kürze halber $\int\delta U = u$, so muss man, um dieses Integral, wie es die Bedingung für's Maximum und Minimum fordert, zwischen gegebenen Grenzen, die wir durch x_0 und x_ω bezeichnen wollen, zu erhalten, sofort, wenn u für die untere Grenze in u_0 und für die obere in u_ω übergeht, schreiben (§. 871):

$$\int_{x_0}^{x_\omega} \delta U = u_\omega - u_0.$$

Man hat also für das Maximum oder Minimum des bestimmten Integrales

$$\int_{x_0}^{x_\omega} U,$$

nebst den vorigen Bedingungsgleichungen (α) in §. 15 sofort noch jene, d. i. die sogenannte Grenzen-Gleichung:

$$u_\omega - u_0 = 0 \ldots (\gamma);$$

da aber diese Gleichung, wie man sieht, nur solche Grössen enthält, welche sich auf die Grenzen x_0 und x_ω des Integrals $\int U$ beziehen; so dienen die daraus hervorgehenden Bedingungen im Allgemeinen zur Bestimmung der bei der Integration der allgemeinen Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ [§. 15, Relat. (s)] eingeführten willkürlichen Constanten. Es kann übrigens noch bemerkt werden, dass in dieser letztern

Bedingungsgleichung die Variationen δx, δy, $d\delta x$ u. s. w. entweder Null oder durch anderweitige Bedingungen mit einander verbunden sein können.

Soll z. B. unter allen durch zwei gegebene Puncte möglichen ebenen Curven die kürzeste gefunden werden, so muss, wenn man die Coordinaten dieser beiden festen Puncte durch x', y' und x'', y'' bezeichnet, das Integral $\int U$ zwischen den beiden genannten Grenzen, d. i. so genommen werden, dass es in dem einen Punct anfängt und in dem andern aufhört. Da aber diese beiden Puncte allen Curven gemeinschaftlich angehören, die man sich durch die stetige Veränderung, d. i. durch das Variiren der gesuchten Curve nur immer denken mag; so sind die Variationen dieser beiden Grenzpuncte offenbar Null, d. i. man hat:

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0.$$

Es fallen daher in diesem Falle aus der genannten Bedingungsgleichung (γ) alle Glieder, welche diese letztern Grössen enthalten, von selbst heraus, und im Falle darin keine anderweitigen Grössen vorkommen, würde diese Gleichung, ohne irgend eine Bedingung oder Relation für die vorhin erwähnten willkürlichen Constanten zu liefern, von selbst, d. i. identisch Null. Die Curve, welche den Gleichungen (α) in §. 15, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, oder wenn $U = V\,dx$ ist, jener (β) in §. 16 $\varphi = 0$ entspricht, löst dann die Aufgabe vollständig auf, wenn man diese nur noch der Bedingung unterwirft, dass sie durch die beiden Puncte x', y' und x'', y'' geht, was sich, um hier nur von dem zweiten Falle (von $U = V\,dx$) zu reden, im Allgemeinen mittelst der beiden willkürlichen Constanten bewerkstelligen lässt, welche in der dieser Differentialgleichung $\varphi = 0$ (die in diesem Falle von der zweiten Ordnung ist, weil bei dieser Aufgabe V nur den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ enthält) entsprechende Integralgleichung enthalten sind.

Es können aber selbst noch die mit den Variationen $\delta dx'$, $\delta dy'$ $\delta dx''$, $\delta dy''$ behafteten Glieder, im Falle sie überhaupt in der genannten Grenzgleichung $u_\omega = u_0 = 0$ vorkommen, unter gewissen Bedingungen verschwinden. Es darf z. B. zu den beiden vorigen Bedingungen (dass die gesuchte Curve durch zwei gegebene Puncte x', y', x'', y'' gehen soll) nur noch jene hinzukommen, dass die in den gegebenen Endpuncten an die gesuchte Curve gezogenen Tangenten eine gegebene Neigung gegen die Abscissenaxe haben sollen, so werden, da dann dx', dy', so wie dx'', dy'' bestimmte Werthe annehmen, also constant werden, ihre Variationen gleich Null.

§. 20. Bezeichnet man in der Relation (4) des §. 12, bei welcher nämlich die Form von $U = V\,dx$ vorausgesetzt ist, die Differentialquotienten P, Q, R, ... für die beiden

Grenzen x_0 und x_ω des Integrals $\int V dx$ beziehungsweise durch P_0, Q_0, R_0, . . und P_ω, Q_ω, R_ω, . . so wie auch y dafür mit y_0 und y_ω; so erhält man, wenn zugleich für v der Werth $\delta y - \frac{dy}{dx} dx$ hergestellt wird, die Bedingungsgleichung für das Maximum oder Minimum in der vollständig entwickelten Form:

$$0 = \begin{cases} V_\omega \delta x_\omega + (P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \frac{d^2 R_\omega}{dx^2} - \ldots)(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx} \delta x_\omega) \\ \qquad + (Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \ldots)(\delta \frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2 y_\omega}{dx^2} \delta x_\omega) + \text{etc.} \\ - V_0 \delta x_0 - (P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2 R_0}{dx^2} - \ldots)(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx} \delta x_0) \\ \qquad - (Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \ldots)(\delta \frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \delta x_0) - \text{etc.} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx (N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \ldots)(\delta y - \frac{dy}{dx} \delta x). \end{cases}$$

Der mit dem Integralzeichen behaftete Theil dieser Bedingungsgleichung liefert die bereits in §. 16 aufgestellte unbestimmte Gleichung (β), während der integrirte Theil, welcher, Null gesetzt, die sogenannte bestimmte Gleichung bildet, selbst wieder in zwei solche Gleichungen zerfällt, wenn die Variationen, welche sich auf die untere Grenze u_0 beziehen, von jener, die sich auf die obere Grenze u_ω beziehen, unabhängig sind.

Anmerk. Enthält die Function V, wie in §. 9 (Anmerk.) bereits bemerkt, die beiden von x abhängigen Functionen y und z, so, dass also für δV der dort angeführte Ausdruck (a'') gilt; so verwandelt sich die vorige unbestimmte Gleichung, wie leicht zu sehen, in die folgende:

$$(s) \quad \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x\right) = 0,$$

oder, wenn die Variationen δx, δy und δz von einander unabhängig sind, in die beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \ldots &= 0 \\ \text{und } N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} (\beta'),$$

wobei, wenn man der Kürze wegen $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ u. s. w., $\frac{dz}{dx} = z'$, $\frac{d^2z}{dx^2} = z''$ etc. setzt, sofort

$$N = \left(\frac{dV}{dy}\right),\quad P = \left(\frac{dV}{dy'}\right),\quad Q = \left(\frac{dV}{dy''}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$\text{und } N' = \left(\frac{dV}{dz}\right),\quad P' = \left(\frac{dV}{dz'}\right),\quad Q' = \left(\frac{dV}{dz''}\right) \text{ etc. ist.}$$

Was ferner, wenn die Variationen in Beziehung auf die beiden Grenzen von einander unabhängig sind, die den beiden Endpuncten der Curve entsprechenden bestimmten Gleichungen betrifft, so sind diese im vorliegenden Falle sofort für den ersten Punct:

$$\left.\begin{aligned}
V_0\,\delta x_0 &+ \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\,\delta x_0\right)\\
&+ \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \ldots\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\,\delta x_0\right) + \text{etc.}\\
&+ \left(P'_0 - \frac{dQ'_0}{dx} + \frac{d^2R'_0}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\,\delta x_0\right)\\
&+ \left(Q'_0 - \frac{dR'_0}{dx} + \ldots\right)\left(\delta\frac{dz_0}{dx} - \frac{d^2z_0}{dx^2}\,\delta x_0\right) + \ldots
\end{aligned}\right\} = 0,$$

und für den zweiten Punct:

$$\left.\begin{aligned}
V_\omega\,\delta x_\omega &+ \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \frac{d^2R_\omega}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\,\delta x_\omega\right)\\
&+ \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \ldots\right)\left(\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\,\delta x_\omega\right) + \ldots\\
&+ \left(P'_\omega - \frac{dQ'_\omega}{dx} + \frac{d^2R'_\omega}{dx^2} - \ldots\right)\left(\delta z_\omega - \frac{\delta z_\omega}{dx}\,\delta x_\omega\right)\\
&+ \left(Q'_\omega - \frac{dR'_\omega}{dx} + \ldots\right)\left(\delta\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{d^2z_\omega}{dx^2}\,\delta x_\omega\right) + \ldots
\end{aligned}\right\} = 0.$$

§. 21. Bleiben bei allen Veränderungen, die man mit der betreffenden Curve, welche sofort die Beziehung zwischen x und y räumlich darstellt, vornehmen kann, die Endpuncte derselben beständig auf den nämlichen Ordinaten oder Parallelen zur Axe der y, so sind in dem Integrale $\int_{x_0}^{x_\omega} V\,dx$, welches zu einem Maximum oder Minimum werden soll, die beiden Grenzen x_0 und x_ω constant, und man lässt bei diesen Veränderungen der Curve oder dem Uebergange aus einer Lage in eine andere unendlich na-

hen, die Variable x nicht variiren, d. h. man nimmt dabei an, dass $\delta x = 0$ sei, indem es in diesem Falle hinreicht, in der Function V nur den Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... beliebige, von einander unabhängige Veränderungen oder Variationen beizulegen, welche eben durch δy, $\delta \frac{dy}{dx}$ u. s. w. ausgedrückt werden. In diesem Falle reducirt sich die vorige Bedingungsgleichung für das Maximum und Minimum des Integrales $\int_{x^0}^{x_\omega} V dx$ auf die folgende:

$$0 = \begin{cases} (P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + ..)\delta y_\omega + (Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + ..)\delta \frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad + (R_\omega - \text{etc.})\delta \frac{d^2 y_\omega}{dx^2} + .. \\ - (P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + ..)\delta y_0 - (Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + ..)\delta \frac{dy_0}{dx} \\ \qquad - (R_0 - \text{etc.})\delta \frac{d^2 y_0}{dx^2} - .. \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx (N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + ..)\delta y. \end{cases}$$

Es fallen aber selbst in dieser Gleichung noch die Glieder, welche die Factoren δy_0 und δy_ω enthalten, heraus, wenn die Endpuncte der Curve der Lage nach vollkommen gegeben, d. h. wenn die Werthe der Ordinaten y_0, y_ω eben sowohl, wie jene der Abscissen x_0, x_ω constant sind.

Anmerk. Die in der Anmerkung des vorigen §. aufgestellten bestimmten Gleichungen, welche sich auf den Fall beziehen, dass in V die beiden von x abhängigen Functionen y und z vorkommen, reduciren sich unter der zuletzt gemachten Voraussetzung auf die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} (P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + ..)\delta y_0 + (Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + ..)\delta \frac{dy_0}{dx} + .. \\ + (P'_0 - \frac{dQ'_0}{dx} + ..)\delta z_0 + (Q'_0 - \frac{dR'_0}{dx} + ..)\delta \frac{dz_0}{dx} + .. \end{array}\right\} = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{l} (P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + ..)\delta y_\omega + (Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + ..)\delta \frac{dy_\omega}{dx} + .. \\ + (P'_\omega - \frac{dQ'_\omega}{dx} + ..)\delta z_\omega + (Q'_\omega - \frac{dR'_\omega}{dx} + ..)\delta \frac{dz_\omega}{dx} + .. \end{array}\right\} = 0.$$

Relative *Maxima* und *Minima*.

§. **22.** Es wurde bisher ausdrücklich festgesetzt, dass unter den in der Function U enthaltenen variabeln Grössen keine Beziehungen im Voraus gegeben seien, sondern diese erst aus der Bedingung des Maximums oder Minimums entwickelt oder gefunden werden müssen. Es können jedoch Aufgaben vorkommen, bei welchen gewisse Bedingungen in der Art berücksichtiget werden müssen, dass die Wahl der Werthe der mit δ bezeichneten Variationen eine Beschränkung erleidet.

Ist z. B. ein vorliegendes bestimmtes Integral von der Natur einer Curve abhängig, deren Endpuncte in zwei gegebenen Linien enthalten sein sollen, deren Gleichungen $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ sind; so müssen die Variationen δx_0, δy_0 und δx_ω, δy_ω der Coordinaten der Endpuncte x_0, y_0 und x_ω, y_ω in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass sie diesen beiden Gleichungen respective Genüge leisten, so, dass die Gleichungen

$$\delta y_0 = \frac{d \,.\, \varphi(x_0)}{dx} \delta x_0 \quad \text{und} \quad \delta y_\omega = \frac{d \,.\, \psi(x_\omega)}{dx} \delta x_\omega$$

sofort gleichzeitig mit der bestimmten oder Grenzengleichung (γ) in §. 19 bestehen müssen. Eben so könnte auch verlangt werden, dass die in den Endpuncten der gesuchten Curve gezogenen Tangenten mit den Tangenten zusammenfallen sollen, welche beziehungsweise an die gegebenen Curven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ gezogen werden; in diesem Falle wären auch die nach δ genommenen Differentialverhältnisse bedingt, nämlich

$$\delta \frac{dy_0}{dx} = \frac{d^2 . \varphi(x_0)}{dx^2} \delta x_0, \quad \delta \frac{dy_\omega}{dx} = \frac{d^2 . \psi(x_\omega)}{dx^2} \delta x_\omega \text{ u. s. w.}$$

Anmerk. Es können übrigens auch Bedingungsgleichungen vorhanden sein, welche für alle Werthe der Variablen, die innerhalb der Grenzen des vorgelegten bestimmten Integrales enthalten sind, gelten müssen. Soll z. B. die kürzeste Linie gefunden werden, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei in derselben liegenden Puncte gezogen werden kann, und ist $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung dieser Fläche; so muss offenbar die Ordinate der gesuchten Curve dieser Gleichung immer Genüge leisten. In diesem Falle werden also wie-

der die Variationen der in U enthaltenen Grössen in so weit beschränkt, als ihre Werthe diese gegebene Gleichung stets befriedigen müssen. Diese Gleichung der Fläche wird also offenbar auch noch bestehen müssen, wenn man in ihr, statt der erwähnten Grössen, die um ihre Variationen vermehrten Werthe dieser Grössen einsetzt, woraus also auch folgt, dass man die gegebene Gleichung der Fläche in Beziehung auf diese erwähnten Grössen variiren, d. i. nach dem Buchstaben δ differentiiren kann. Ist daher $Z = 0$ eine solche Bedingungsgleichung, in welcher Z eine Function sowohl der unabhängig, als der abhängig Variabeln und ihrer derivirten oder abgeleiteten Functionen bezeichnet; so bildet man daraus die Gleichung $\delta Z = 0$ und benützt dieselbe zur Elimination einer der Variationen, welche in der unbestimmten Gleichung [(β), §. 16.] vorkommen.

Eben so verfährt man, wenn noch mehrere, der vorigen analoge Bedingungsgleichungen gegeben sind.

§. **23.** Es gibt ferner Aufgaben, in welchen das gesuchte Maximum oder Minimum an die Bedingung gebunden wird, dass gleichzeitig ein gegebenes bestimmtes Integral (wie wir bereits in der Einleitung im §. 1 einen solchen Fall angeführt haben) einen gegebenen oder bestimmten Werth beibehalten soll; und es sind insbesondere diese Fälle, welche man mit dem Namen der relativen Maxima und Minima bezeichnet.

So gehört z. B. die bereits erwähnte Aufgabe hieher, diejenige Curve zu finden, welche bei einem gegebenen Umfange die grösst oder kleinst mögliche Fläche einschliesst. In diesem Falle muss man das Integrale $\int_{x_0}^{x_\omega} V dx$ zu einem Max. oder Min. machen, während gleichzeitig die Relation bestehen soll:

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V' dx = Const.,$$

wobei sowohl V wie V' Functionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. sind.

Die Bedingungen der Aufgabe liefern dann die beiden Gleichungen:

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} V dx = 0 \text{ und } \delta \int_{x_0}^{x_\omega} V' dx = 0.$$

Dieselben Bedingungen können aber eben so gut dadurch ausgedrückt werden, dass man die zweite dieser Gleichungen mit einer willkürlichen Constanten a multiplicirt und dann zu der erstern addirt; man kann nämlich schreiben:

$$\delta\int_{x_0}^{x_\omega} Vdx + a\delta\int_{x_0}^{x_\omega} V'dx = 0 \text{ oder } \delta\int_{x_0}^{x_\omega} (V + aV')\,dx = 0,$$

und man wird diese letztere Gleichung gerade so behandeln, als ob man die Function $\int_{x_0}^{x_\omega} (V + aV')\,dx$ zu einem absoluten Maximum oder Minimum machen wollte; indem jene Relation zwischen x und y, welche diese letztere Function zu einem Maximum oder Minimum macht, offenbar auch der Forderung Genüge leistet, dass der Ausdruck $\int_{x_0}^{x_\omega} Vdx$ für alle Fälle, in welchen das Integral $\int_{x_0}^{x_\omega} V'dx$ einen gegebenen Werth annimmt, ein Maximum oder Minimum wird. Was die Constante a betrifft, so ist sie so zu bestimmen, dass das Integral $\int_{x_0}^{x_\omega} V'dx$ eben jenen gegebenen oder bestimmten Werth annimmt.

Beispiele und Aufgaben.

§. **24.** Die kürzeste Linie zu finden, welche man zwischen zwei gegebenen Puncten ziehen kann.

Nimmt man der grösseren Einfachheit wegen an, dass dieser Forderung nur durch eine einfach gekrümmte Curve Genüge geleistet werden kann, so kommt es darauf an, in dem Ausdrucke $\int U = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (als Länge einer ebenen Curve, §. 714) diejenige Relation zwischen y und x zu finden, wofür dieses Integral innerhalb bestimmter Grenzen ein Minimum wird.

Es ist aber

$$\delta U = \delta\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,\delta\,dx + dy\,\delta\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y}{ds}$$

(§. 6), folglich

$$\int\delta U = \int\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \int\frac{dy}{ds}\,d\delta y,$$

oder wenn man theilweise integrirt:

$$\int\delta U = \frac{dx}{ds}\,\delta x - \int\delta x\,d\,.\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\delta y - \int\delta y\,d\,.\,\frac{dy}{ds},$$

oder endlich

$$= \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right) - \int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y\right)\;.\;.\;.\;(m).$$

a. Um nun, wenn man die Coordinaten der beiden gegebenen Puncte durch x', y' und x'', y'' bezeichnet, die Function $\int_{x'}^{x''}\delta U = \int_{x'}^{x''}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ zu einem Minimum zu machen, hat man nach §. 15 [Relation (α)] zunächst die beiden unbestimmten Gleichungen:

$$d\frac{dx}{ds} = 0 \quad\text{und}\quad d\frac{dy}{ds} = 0$$

[d. i. $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, welche sofort durch das Nullsetzen des mit dem Integralzeichen behafteten Theiles der vorigen Gleichung (m) entsteht], woraus durch Integration

$$\frac{dx}{ds} = c \quad\text{und}\quad \frac{dy}{ds} = c', \text{ folglich auch}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'}{c} = C \quad\text{oder}\quad dy = C\,dx,$$

und durch abermaliges Integriren

$$(\alpha)\quad y = Cx + C',$$

wobei C und C' die beiden willkürlichen Constanten der Integrationen bezeichnen, erhalten wird.

b. Was nun die Bedingungen betrifft, welche sich auf die Grenzen des obigen Integrals beziehen, so liefert die bestimmte, d. i. die Grenzengleichung (γ) in §. 19, nämlich $u_\omega - u_0 = 0$, welche im vorliegenden Falle (wegen $u = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y$) in

$$\left(\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y''\right) - \left(\frac{dx'}{ds'}\delta x' + \frac{dy'}{ds'}\delta y'\right) = 0$$

übergeht, keine weitere Relation, indem dieselbe, wegen $\delta x' = 0$, $\delta x'' = 0$, $\delta y' = 0$ und $\delta y'' = 0$ (da x', y', x'', y''

constant sind) identisch Null wird; es löst daher die vorige Gleichung (α) die Aufgabe vollständig auf, wenn man nur die darin vorkommenden beiden Constanten C und C' auf eine solche Weise bestimmt, dass diese Gerade (α) durch die beiden Puncte x', y' und x'', y'' geht. Dazu hat man aber aus der Gleichung (α) selbst $y''-y'=C(x''-x')$, also

$$(\beta)\quad C=\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

und ferner wegen $y-y'=C(x-x')$, endlich für die völlig bestimmte Gleichung der gesuchten Linie:

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')\ \text{(Vergl. §. 396).}$$

Anmerk. 1. Da sich, wegen $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+p^2}$, wobei $p=\frac{dy}{dx}$ ist, die Function U auf die Form $V dx$ bringen lässt, wobei $V=\sqrt{1+p^2}$ ist; so hat man auch, da $dV=\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$, also zufolge der Relation (a) in §. 9 $M=0$, $N=0$, $P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $Q=R=\ldots=0$ wird, für die Bedingungsgleichung (β) in §. 16 sofort $\frac{1}{dx}d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$, und daraus $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\text{Const.}$, so, dass man hieraus schliessen kann, dass p oder der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für alle Puncte der gesuchten Linie constant sein muss, was sofort nur bei der geraden Linie der Fall ist. Setzt man daher diesen Quotienten $\frac{d\varphi}{dx}=a$, so ist die Gleichung der gesuchten Linie:

$$y=ax+b,$$

welche man nur noch wie vorhin, da die Grenzengleichung ($u_\omega-u_0=0$ in §. 19) identisch Null wird und keine weitere Relation liefert, der Bedingung zu unterwerfen hat, dass die Gerade durch die zwei gegebenen Puncte x', y' und x'', y'' geht.

Anmerk. 2. Will man nicht von der hier gemachten Voraussetzung ausgehen, dass die gesuchte Linie oder Curve eine ebene sein müsse, so muss man eine Curve im Raume annehmen, und wenn man ihre Coordinaten durch x, y, z bezeichnet, sofort das Integrale

$$\int_{x'}^{x''} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

zu einem Minimum machen.

Nun ist aber wegen $V = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ sofort

$$\delta V = \frac{\frac{dy}{dx}\,\delta\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\,\delta\frac{dz}{dx}}{V},$$

demnach zufolge der Relation (α'') in §. 9:

$$M = 0,\ N = 0,\ P = \frac{1}{V}\cdot\frac{dy}{dx},\ Q = R = \ldots = 0 \text{ und}$$

$$N' = 0,\ P' = \frac{1}{V}\cdot\frac{dz}{dx},\ Q' = R' = \ldots = 0.$$

Die beiden unbestimmten oder Bedingungsgleichungen (β') in §. 20 (Anmerkung) sind daher:

$$\frac{1}{dx}\,d.\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right) = 0$$

$$\text{und}\quad \frac{1}{dx}\,d.\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right) = 0,$$

woraus wieder unmittelbar, wie vorhin, geschlossen werden kann, dass die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ constante Werthe haben müssen, und daher die gesuchte Linie keine andere als eine gerade sein kann.

§. **25**. Die kürzeste Linie zu finden, welche sich zwischen zwei gegebenen Curven im Raume ziehen lässt.

Da es sich in diesem Falle darum handelt, die von x abhängigen Functionen y und z dergestalt zu bestimmen, dass das Integrale $s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ innerhalb gewisser Grenzen ein Minimum wird; so hat man, wenn man die erstere Form $\int U$ beibehalten will, wegen

$$\delta\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds}, \text{ sofort:}$$

$$\int\delta\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \int\frac{dy}{ds}\,d\delta y + \int\frac{dz}{ds}\,d\delta z$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right) \\ &- \int\left(d\frac{dx}{ds}\,\delta x + d\frac{dy}{ds}\,\delta y + d\frac{dz}{ds}\,\delta z\right)\end{aligned}\right\}\ldots(m),$$

wenn man nämlich (ohne von den bereits oben entwickelten Formeln Notiz zu nehmen) wieder die Theilintegrationen anwendet.

a. Der summatorische oder nicht integrirte Theil liefert für das Minimum die Bedingungsgleichung:

$$d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y + d\frac{dz}{ds}\delta z = 0,$$

oder da die Variationen δx, δy, δz von einander unabhängig sind, die drei folgenden [die analogen mit (α) in §. 15]:

$$d\frac{dx}{ds} = 0,\quad d\frac{dy}{ds} = 0,\quad d\frac{dz}{ds} = 0,$$

aus denen man durch Integration erhält:

$$\frac{dx}{ds} = c,\quad \frac{dy}{ds} = c',\quad \frac{dz}{ds} = c'',$$

so wie aus diesen drei Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'}{c} = C,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{c''}{c} = C'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man endlich durch abermaliges Integriren:

$$y = Cx + \alpha \quad \text{und} \quad z = C'x + \beta,$$

welches sofort die Gleichungen einer geraden Linie sind.

b. Um nun auf die Grenzgleichungen $u_0 = 0$ und $u_\omega = 0$ (§. 19) überzugehen, so hat man aus dem integrirten Theil der obigen Gleichung (m) für die untere Grenze

$$dx\,\delta x_0 + dy_0\,\delta y_0 + dz_0\,\delta z_0 = 0, \text{ oder auch}$$

$$1 + \frac{dy_0}{dx}\frac{\delta y_0}{\delta x_0} + \frac{dz_0}{dx}\frac{\delta z_0}{\delta x_0} = 0,$$

und eben so für die obere Grenze:

$$1 + \frac{dy_\omega}{dx}\frac{\delta y_\omega}{\delta x_\omega} + \frac{dz_\omega}{dx}\frac{\delta z_\omega}{\delta x_\omega} = 0,$$

woraus sich (§. 579) ohne Mühe folgern lässt, dass die beiden gegebenen Curven von der gesuchten kürzesten Linie unter rechten Winkeln geschnitten werden müssen.

Anmerk. 1. Will man mit Berücksichtigung, dass sich hier $U = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ auf die Form Vdx bringen lässt, wobei $V = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ ist, die in §. 20, Anmerk. entwickelten Formeln benützen; so hat man zuerst wieder dieselben beiden unbestimmten Gleichungen wie im vorigen §., Anmerk. 2., aus denen man schliesst, dass die gesuchte Linie eine gerade sein muss.

Was ferner die beiden bestimmten Gleichungen betrifft, welche sich auf die Grenzen des Integrals beziehen; so hat man wegen $P = \frac{1}{V} \cdot \frac{dy}{dx}$ und $P' = \frac{1}{V} \cdot \frac{dz}{dx}$ (während $M = 0$, $N = 0$, $Q = R = .. = 0$, $M' = 0$, $N' = 0$, $Q' = R' = .. = 0$ ist) sofort nach den erwähnten Formeln des §. 20 für die untere Grenze die Bedingungsgleichung:

$$-\delta x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}$$
$$-\frac{\frac{dy_0}{dx}\left(dy_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) + \frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}} = 0,$$

woraus, wenn man reducirt,

$$\delta x_0 + \frac{dy_0}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_0}{dx}\delta z_0 = 0,$$

oder wieder die vorige Gleichung

$$1 + \frac{dy_0}{dx}\frac{\delta y_0}{\delta x_0} + \frac{dz_0}{dx}\frac{\delta z_0}{\delta x_0} = 0$$

folgt. Auf dieselbe Weise erhält man auch die zweite Gleichung, welche sich auf die obere Grenze des Integrales oder den andern Endpunct der gesuchten Linie bezieht.

Anmerk. 2. Ein ganz ähnliches Resultat erhält man auch, wenn man die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen krummen Flächen sucht. In diesem Falle muss man die Variationen δx_0, δy_0, δz_0 der vorigen Gleichung als die Projectionen irgend eines Curvenelementes, welches man auf der krummen Fläche von dem ersten Punct der gesuchten Linie aus angenommen hat, auf die drei Coordinatenaxen ansehen. Diese so erhaltene, der vorigen ganz identische Gleichung drückt dann die Bedingung aus, dass die gesuchte kürzeste Linie, welche wieder eine gerade ist, auf der betreffenden krummen Fläche rechtwinkelig steht. Dasselbe gilt natürlich auch von dem andern Endpunct dieser Linie und der zweiten Fläche.

§. **26.** Es soll auf einer krummen Fläche zwischen zwei gegebenen Puncten die kürzeste Linie gezogen werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, muss wie vorhin das Integral $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ ein Minimum werden. Setzt man daher wieder die Wurzelgrösse

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=V,$$

so erhält man zunächst aus der Bedingungsgleichung (s) in §. 20, Anmerk., wegen (wie im vorhergehenden §., Anmerk.)

$$M=N=Q=R\ldots=0,\quad M'=N'=Q'=R'\ldots=0,$$

$$P=\frac{1}{V}\frac{dy}{dx} \text{ und } P'=\frac{1}{V}\frac{dz}{dx},$$

die unbestimmte Gleichung:

$$\frac{1}{dx}d.\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)\times\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)$$
$$+\frac{1}{dx}d.\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)\times\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right)=0.$$

Ist nun $z=f(x,y)$ die Gleichung der gegebenen Fläche, so hat man, da die Variationen δx, δy, δz dieser Gleichung Genüge leisten müssen, für die Werthe dieser Variationen sofort die Bedingungsgleichung:

$$\delta z=\left(\frac{df}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{df}{dy}\right)\delta y,$$

wenn man nämlich Kürze halber f statt $f(x,y)$ schreibt.

Substituirt man diesen Werth von δz in der vorigen Bedingungsgleichung, und setzt dann die Coefficienten von δy und δx, welche noch unbestimmt bleiben, einzeln gleich Null; so erhält man:

$$(a)\quad \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{df}{dy}.\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)=0$$

und $$\frac{dy}{dx}.\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{df}{dx}\right).\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Da ferner die gesuchte Linie auf der Fläche $z=f(x,y)$ liegen soll, so müssen die Elemente dx, dy, dz der Coordinaten der einzelnen Puncte dieser Linie der genannten Fläche ebenfalls Genüge leisten, so, dass man hat

$$dz=\left(\frac{df}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}\right)dy \text{ oder auch } (b)\ \frac{dz}{dx}=\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Wird dieser Werth für $\frac{dz}{dx}$ in der zweiten der vorigen Bedingungsgleichungen gesetzt, so wird sie, wie es sein soll, mit der erstern derselben identisch.

Diese erste Gleichung (a) bestimmt also die Natur der gesuchten kürzesten Linie, und zwar drückt sie die Bedingung aus, dass die Krümmungsebene dieser Linie oder Curve

beständig rechtwinkelig auf der gegebenen krummen Fläche, worauf diese Linie gezogen werden soll, stehen müsse.

Um diess zu beweisen, hat man nach §§. 763, 764 als Gleichung der Krümmungsebene der gesuchten Linie:

$$\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)x+\frac{d^2z}{dx^2}y-\frac{d^2y}{dx^2}z=0,$$

so wie nach §. 755 als Gleichung der berührenden Ebene der Fläche $z=f(x,y)$:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)x+\left(\frac{df}{dy}\right)y-z=0.$$

Nun ist aber die Bedingung, unter welcher diese beiden Ebenen auf einander rechtwinkelig stehen, nach §. 588:

$$\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

oder auch, wenn man für $\left(\frac{df}{dx}\right)$ den aus der obigen Gleichung (b) resultirenden Werth $\frac{dz}{dx}-\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$ substituirt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left[\frac{dz}{dx}-\frac{dy}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)\right]+\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

welche Gleichung aber, wie man sogleich sieht, wenn man in (a) die angezeigten Differentiationen ausführt, mit der obigen Gleichung (a) identisch ist.

Was endlich die Bedingungen betrifft, welche sich auf die Grenzen x_0, y_0, z_0 und x_ω, y_ω, z_ω beziehen, so hat man genau so, wie im §. 25, die beiden bestimmten Gleichungen:

$$1+\frac{dy_0}{dx}\frac{\delta y_0}{dx_0}+\frac{dz_0}{dx}\frac{\delta z_0}{dx_0}=0$$

$$\text{und}\quad 1+\frac{dy_\omega}{dx}\frac{\delta y_\omega}{dx_\omega}+\frac{dz_\omega}{dx}\frac{\delta z_\omega}{dx_\omega}=0.$$

Da nun aber, nach der Bedingung der Aufgabe, beide Puncte ihrer Lage nach in der krummen Fläche gegeben sind, so geschieht diesen beiden Gleichungen von selbst Genüge, indem $\delta x_0=0$, $\delta y_0=0$, $\delta z_0=0$, $\delta x_\omega=0$, $\delta y_\omega=0$ und $\delta z_\omega=0$ ist.

Anmerk. Sollte die gesuchte kürzeste Linie von einer in der Fläche gegebenen Curve ausgehen, so würden die Variationen δx_0, δy_0, δz_0 die Projectionen des betreffenden Elementes dieser Curve auf die Axen der x, y, z bezeichnen, und es würde daher die erste der

vorigen beiden bestimmten Gleichungen aussagen, dass die gesuchte Linie auf dem genannten Elemente der Curve (von welchem nämlich die gesuchte Linie ausgeht) rechtwinkelig stehen muss.

Ganz dasselbe gilt auch für den zweiten Endpunct der gesuchten kürzesten Linie, wenn dieser ebenfalls in einer zweiten gegebenen Curve der krummen Fläche liegen soll, so, dass also die kürzeste Linie beide Curven, zwischen denen sie auf der Fläche gezogen werden soll, unter rechten Winkeln schneidet.

§. **27.** Es soll, um auch von den sogenannten isoperimetrischen Aufgaben einen, und zwar nur den einfachsten Fall zu behandeln, die Gestalt der ebenen Curve bestimmt werden, welche bei einem gegebenen Umfang die grösstmögliche Fläche einschliesst.

Um diese Aufgabe aufzulösen, muss also der Werth des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{x_\omega} y\,dx$ ein Maximum werden, während gleichzeitig das Integral $\int_{x_0}^{x_\omega} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ zwischen denselben Grenzen einen constanten Werth beibehalten soll.

Nach §. 23 wird aber dieser Bedingung Genüge geleistet, indem man den Werth des absoluten Maximums der Function

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]$$

aufsucht, wobei a eine unbestimmte Constante bezeichnet. Die Grenzen x_0 und x_ω mögen dabei als veränderlich angenommen werden.

Wegen $V = y + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, also

$$dV = dy + \frac{a\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ist nach §. 9 (Relat. a):

$$M = 0,\; N = 1,\; P = \frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},\; Q = R = \ldots = 0.$$

Man erhält also zufolge der Relation (β) in §. 16 die unbestimmte Gleichung:

$$1 - \frac{a}{dx} d . \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right) = 0,$$

woraus sofort nach einmaliger Integration

$$x - a \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \alpha \quad \text{oder} \quad dy = \frac{(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}}$$

entsteht, und wobei α eine willkürliche Constante bedeutet.

Integrirt man abermals, so kommt

$$y = \beta - \sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2} \quad \text{oder} \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2,$$

wobei β die zweite willkürliche Constante ist.

Da aber diese letztere Gleichung dem Kreise angehört, so löst der Kreis die gegebene Aufgabe. Dabei können die drei Constanten α, β und a, d. i. die Lage des Mittelpunctes und der Halbmesser des Kreises so bestimmt werden, dass dessen Peripherie durch zwei gegebene Puncte geht und der zwischen diesen Puncten liegende Bogen eine bestimmte Länge erhält.

§. 28. Um endlich noch den einfachsten Fall des Problems der Brachystochrone, d. i. der Linie des schnellsten Falles, zu betrachten, sei die Aufgabe gegeben: Diejenige, in einer verticalen Ebene liegende Curve zu finden, in welcher ein schwerer Körper von einem gegebenen Puncte derselben bis zu einem andern Punct dieser Curve in der möglich kürzesten Zeit herabfällt.

Nimmt man den erstern Punct der Curve zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die Abscissenaxe vertical an, so wird zufolge eines bekannten Satzes der höhern Mechanik (Supplem. Nr. 52) die Zeit, welche der Körper braucht, um in irgend einer solchen Curve von einem Puncte, dessen verticale Abscisse x_0 ist, bis zu einem andern Punct derselben von der Abscisse x_ω zu gelangen, durch die Formel

$$t = \int_{x_0}^{x_\omega} \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_{x_0}^{x_\omega} \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gx}}$$

ausgedrückt, wobei $p = \frac{dy}{dx}$ ist.

Da es sich also darum handelt, jene Beziehung zwischen y und x aufzusuchen, wofür das Integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} V dx, \quad \text{wobei} \quad V = \sqrt{\frac{1+p^2}{2gx}}$$

ist, innerhalb dieser Grenzen ein Minimum wird, so hat man, wegen $dV = \frac{2pxdp - (1+p^2)dx}{4gx^2V}$, wie die Vergleichung mit der Relation (a) in §. 9 zeigt:

$$N = 0, \; P = \frac{p}{2gxV} = \frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}, \; Q = R = .. = 0,$$

folglich [Relation (β) in §. 16] die unbestimmte Gleichung:

$$\frac{1}{dx} d \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}\right) = 0,$$

und daraus durch Integration:

$$\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}} = b \quad \text{oder} \quad p = b\sqrt{\frac{2gx}{1-2b^2gx}},$$

$$\text{d. i.} \quad dy = \frac{b\,dx\sqrt{2gx}}{\sqrt{1-2b^2gx}} = b\sqrt{gx} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{x - 2b^2gx}},$$

wobei b eine willkürliche Constante bezeichnet, oder wenn man $2b^2g = \frac{1}{2a}$ setzt, wo a eine andere Constante ist, auch

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Diese Gleichung entspricht aber [§. 744, Gleich. (2), in welcher x mit y zu verwechseln ist] der Differentialgleichung einer gemeinen Cycloide, in welcher A in Fig. 87 (welche man sich in umgekehrter Lage denken muss) der höchste Punct (wofür $x = x_0 = 0$), AH vertical, und für irgend einen andern Punct M der Curve, $AP = x$ und $PM = y$ ist.

Die Cycloide, welche desshalb auch die Brachystochrone heisst, löst also die vorliegende Aufgabe auf.

Da für $x = 0$ aus der vorigen Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, so folgt, dass das Element der Curve dabei vertical ist;

aus der Figur selbst folgt ferner, dass die Basis der Cycloide eine horizontale Lage hat.

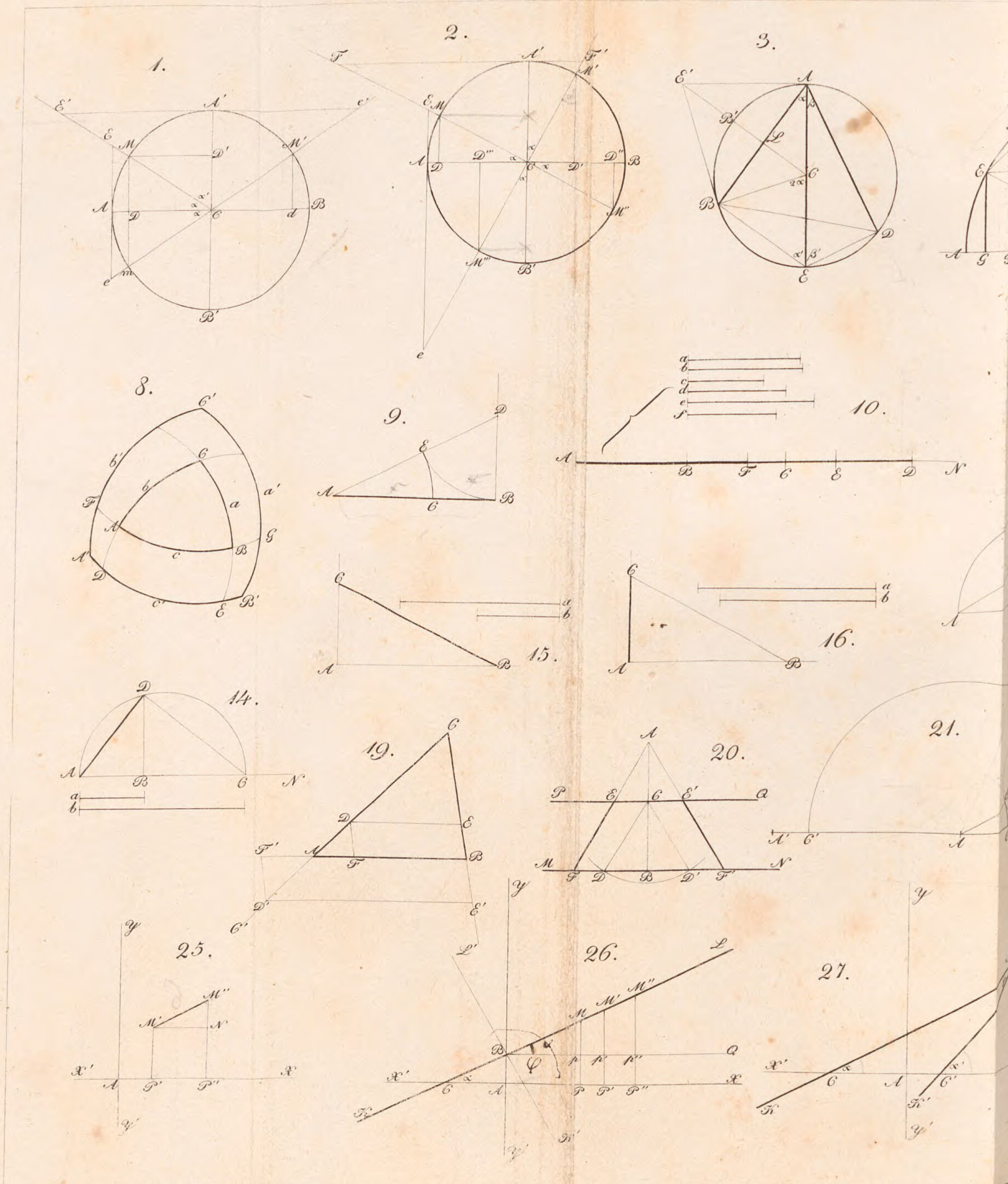
Was schliesslich die in der gefundenen Differentialgleichung enthaltene Constante a (der Halbmesser des Erzeugungskreises) betrifft, so wird diese, wenn x_ω, y_ω die Coordinaten des zweiten gegebenen (tiefer liegenden) Punctes der gesuchten Curve oder der Cycloide sind, aus der Bedingung bestimmt, dass für $x = x_\omega$ sofort auch $y = y_\omega$ sein muss.

Anmerk. Wir haben hier in diesem einfachen Falle, in welchem die Endpuncte der Curve gegeben waren, die sogenannte bestimmte (d. i. die Grenzen-) Gleichung $u_\omega - u_0 = 0$ unberücksichtiget gelassen, weil bei den constanten Grenzen diese Gleichung identisch Null wird und zu keiner weitern Bedingung Anlass gibt.

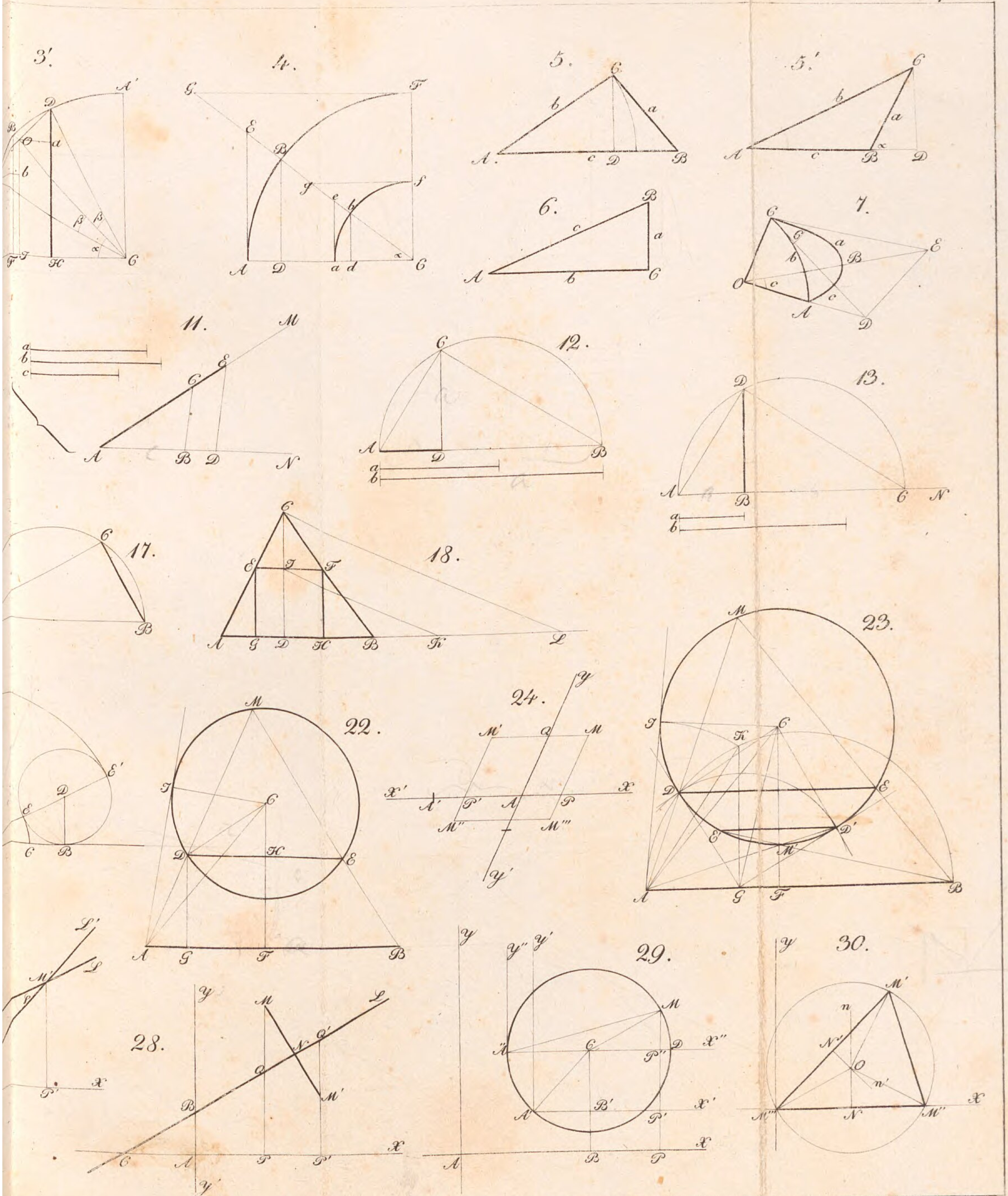
(Weitere Aufgaben und Bemerkungen findet man im grösseren Lehrbuche, im Anhange des III. Bandes.)

Berichtigungen.

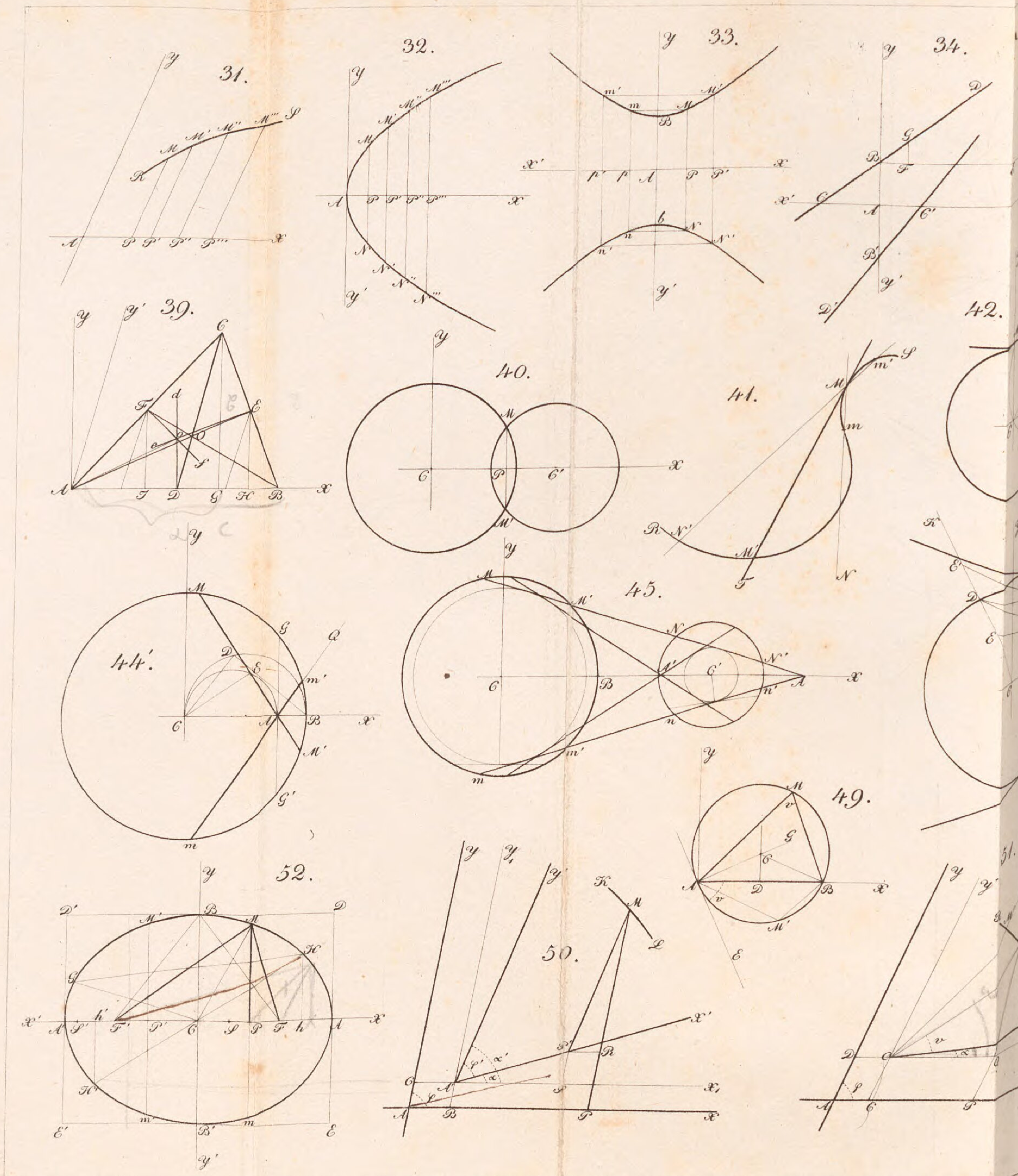
Seite 93,	Zeile 4	von Oben	soll statt	§. 704	stehen: §. 708
„ —	„ 10	„ „	„ „	$x = \omega$	„ $x - \omega$
„ 110,	„ 8	„ Unten	„ „	$\sqrt[6]{A}$	„ $\sqrt[3]{A}$
„ 413,	„ 11	„ Oben	„ „	$F'[(x, y, z) = 0]$	stehen: $[F'(x, y, z) = 0]$


1.
2.
3.
8.
9.
10.
14.
15.
16.
19.
20.
21.
25.
26.
27.

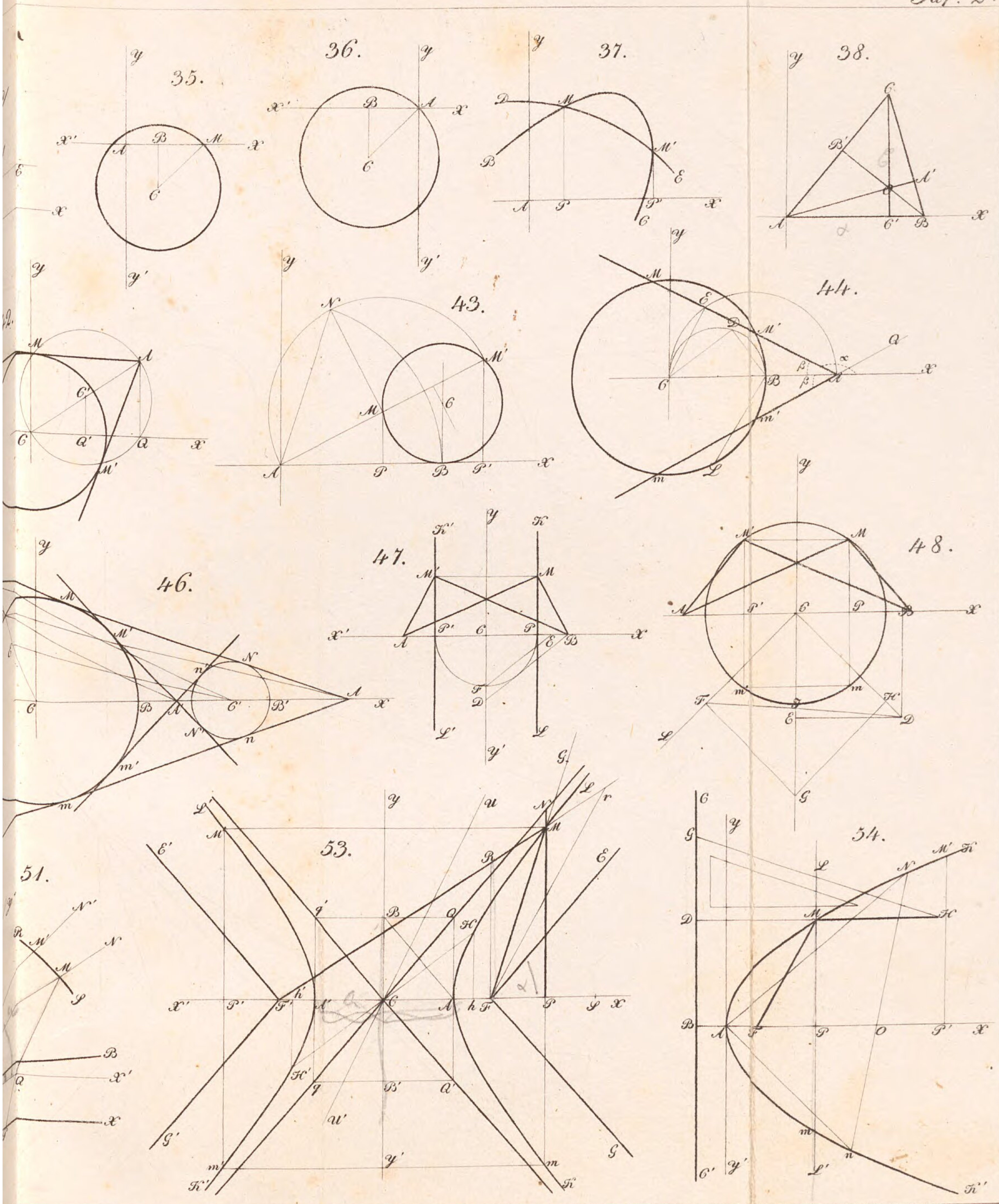
Taf. 1.



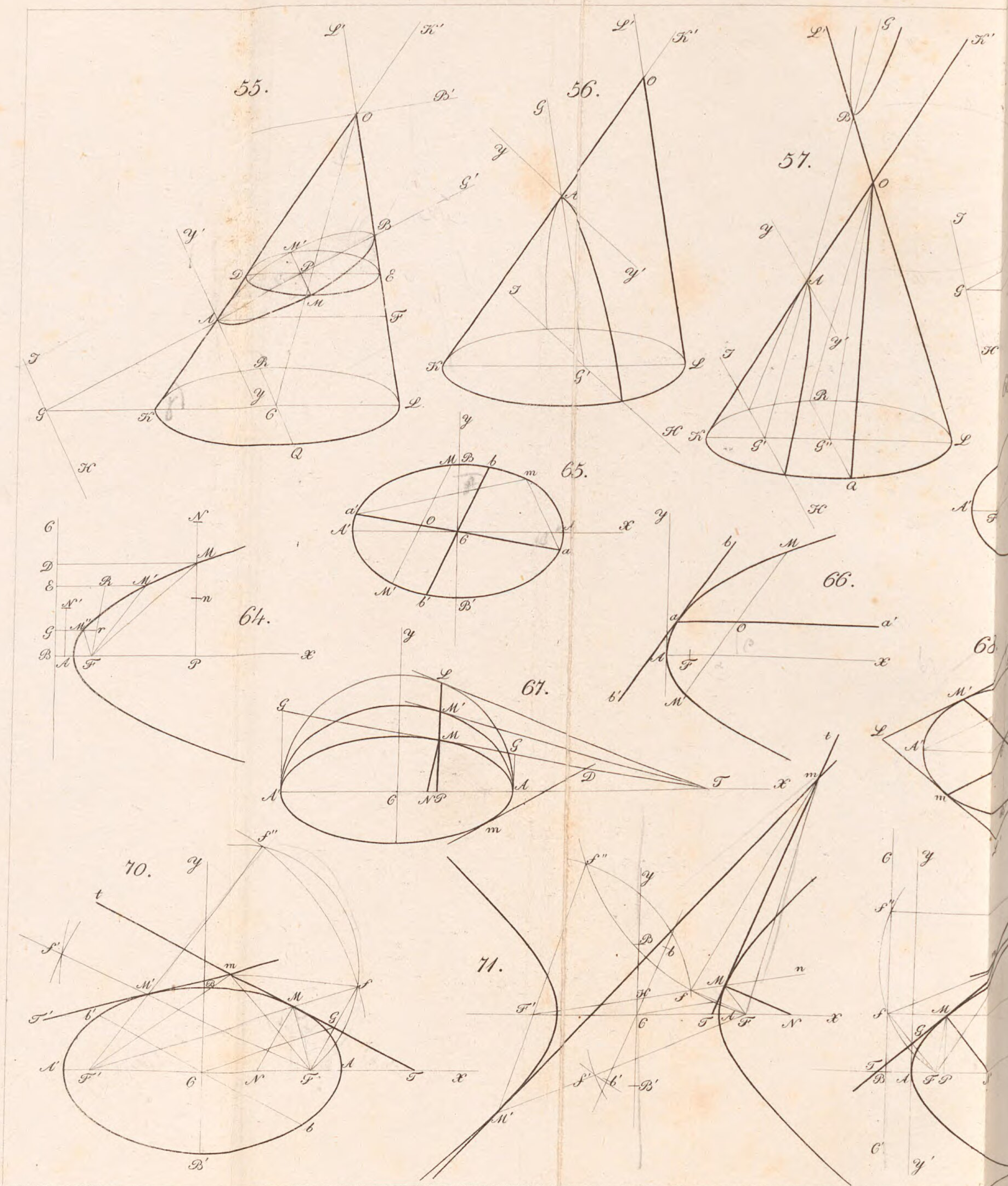
Aigner sc.

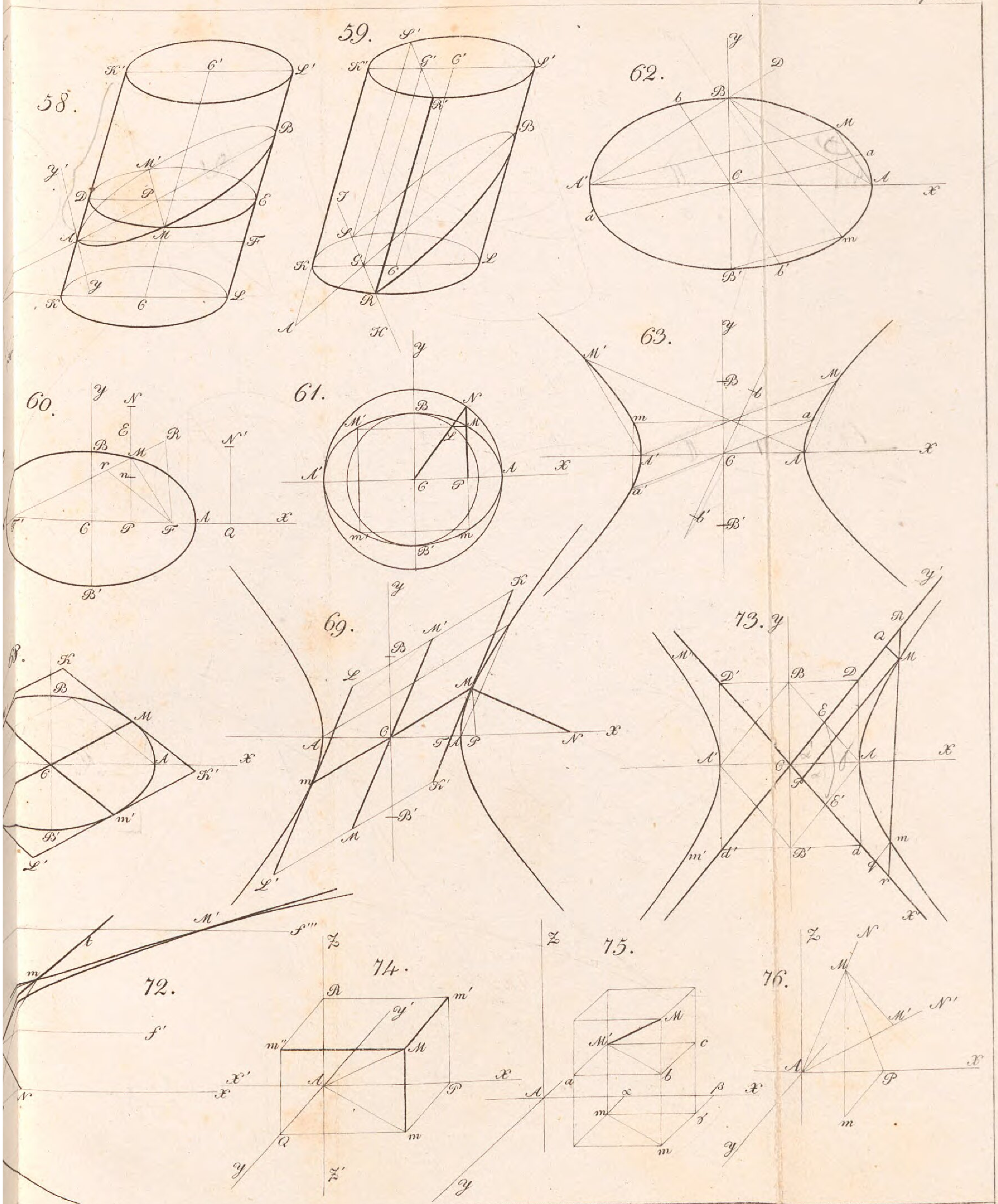


Burg's Compendium d. höh: Mathemat.



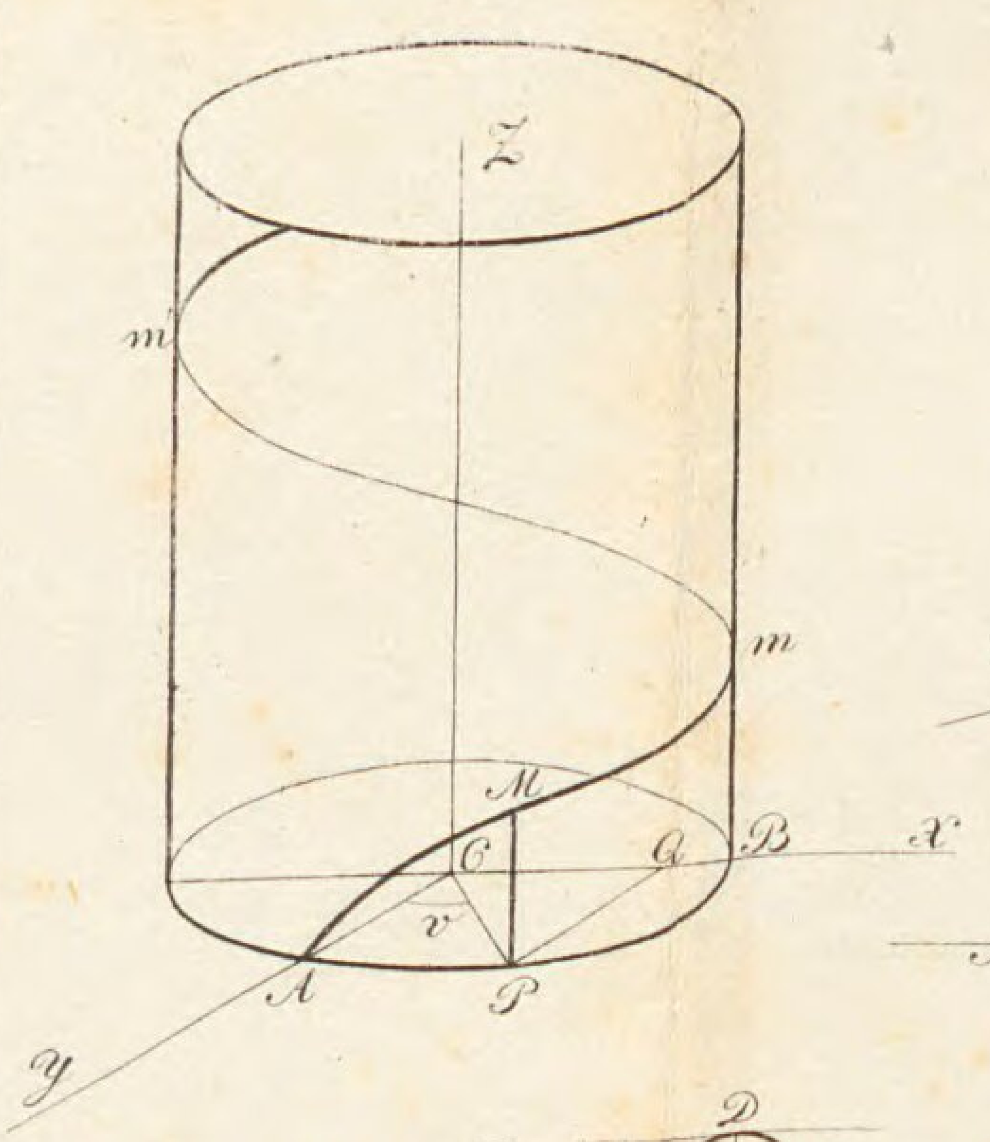
Aigner sc.


55.
56.
57.
64.
65.
66.
67.
70.
71.

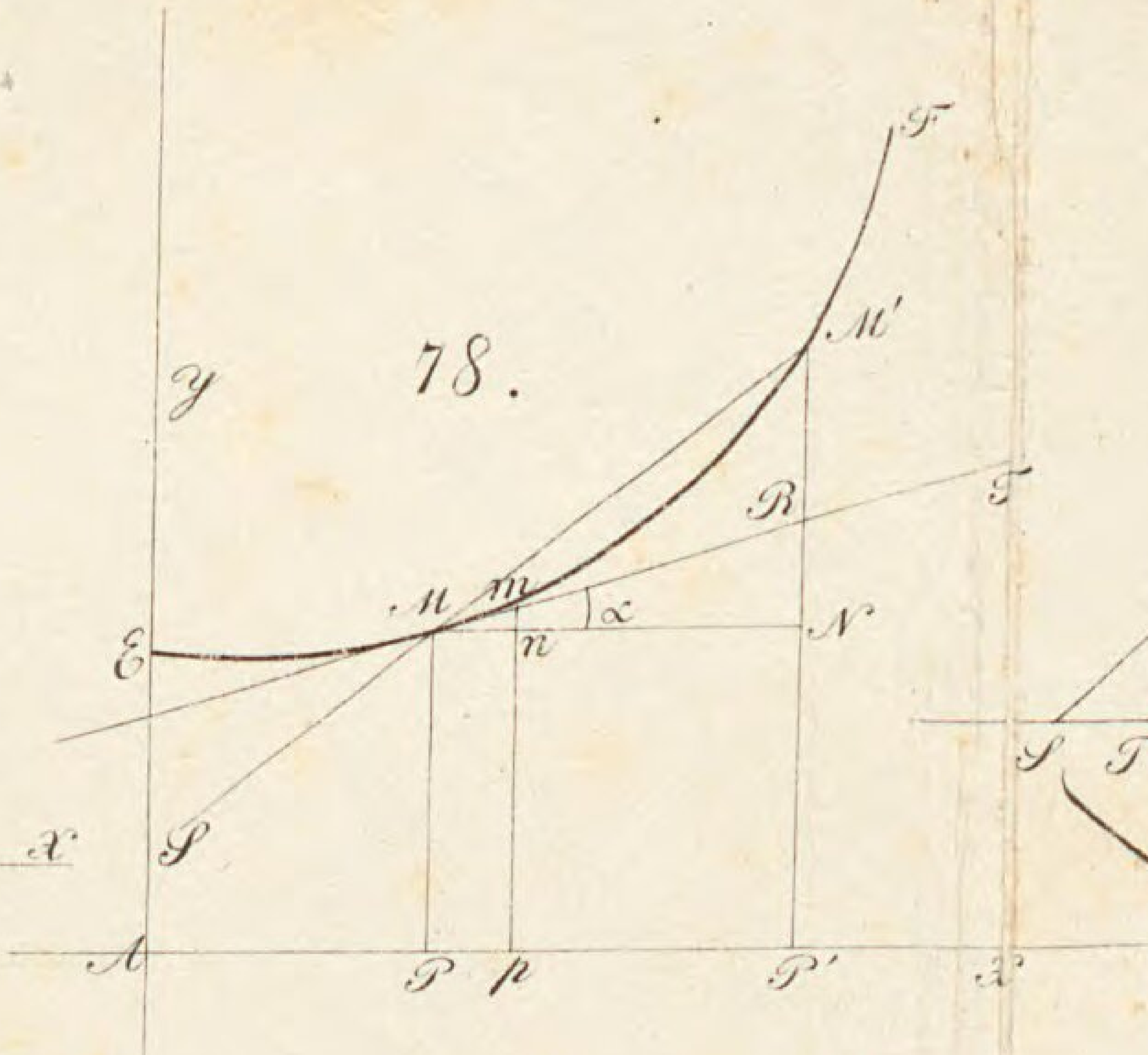


Aigner sc.

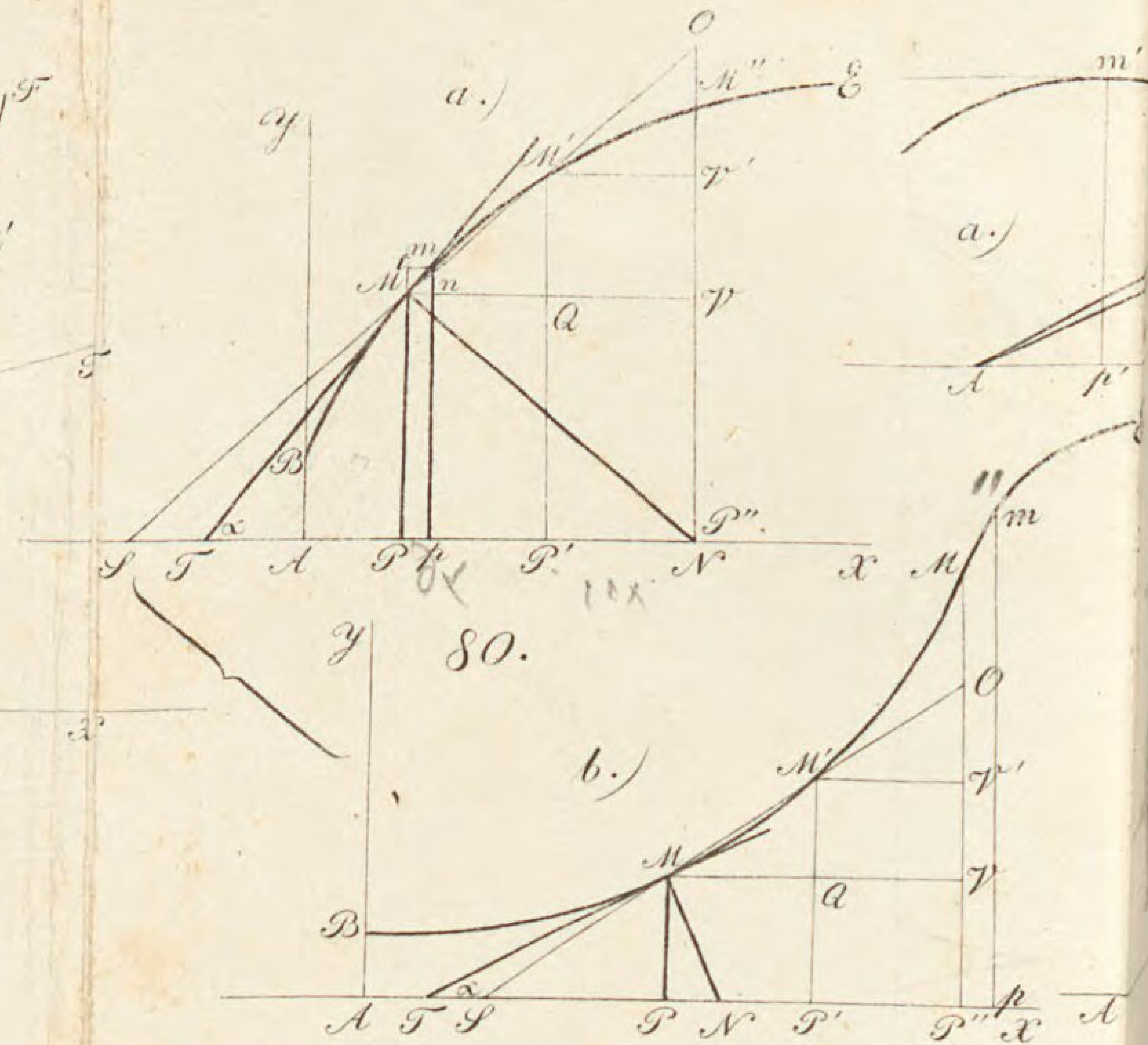
77.



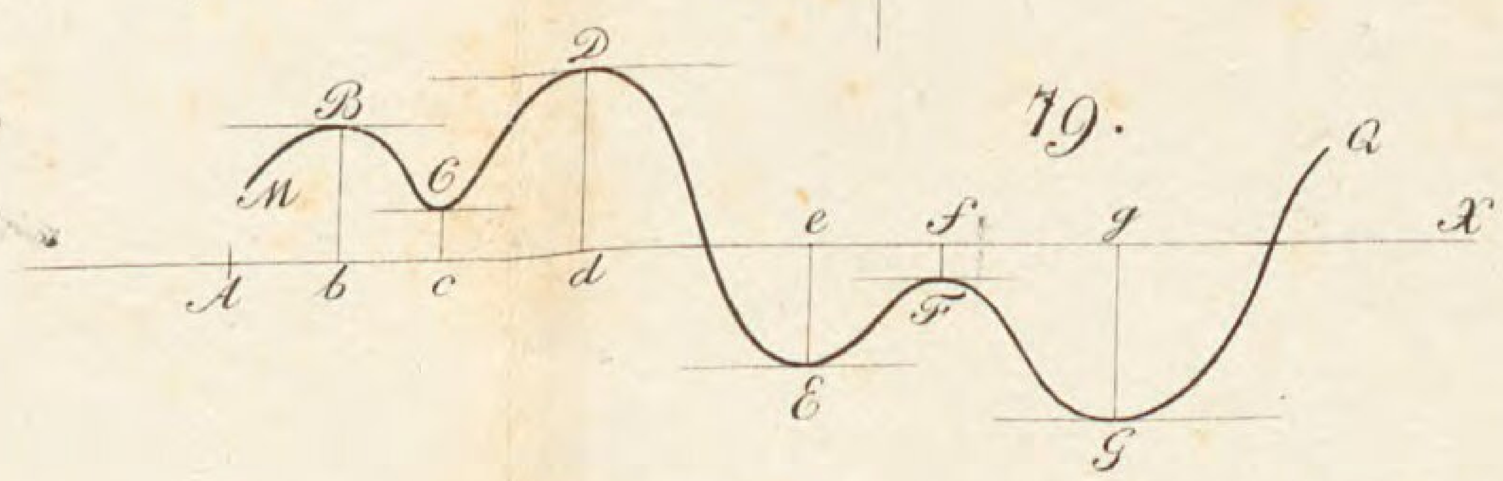
78.



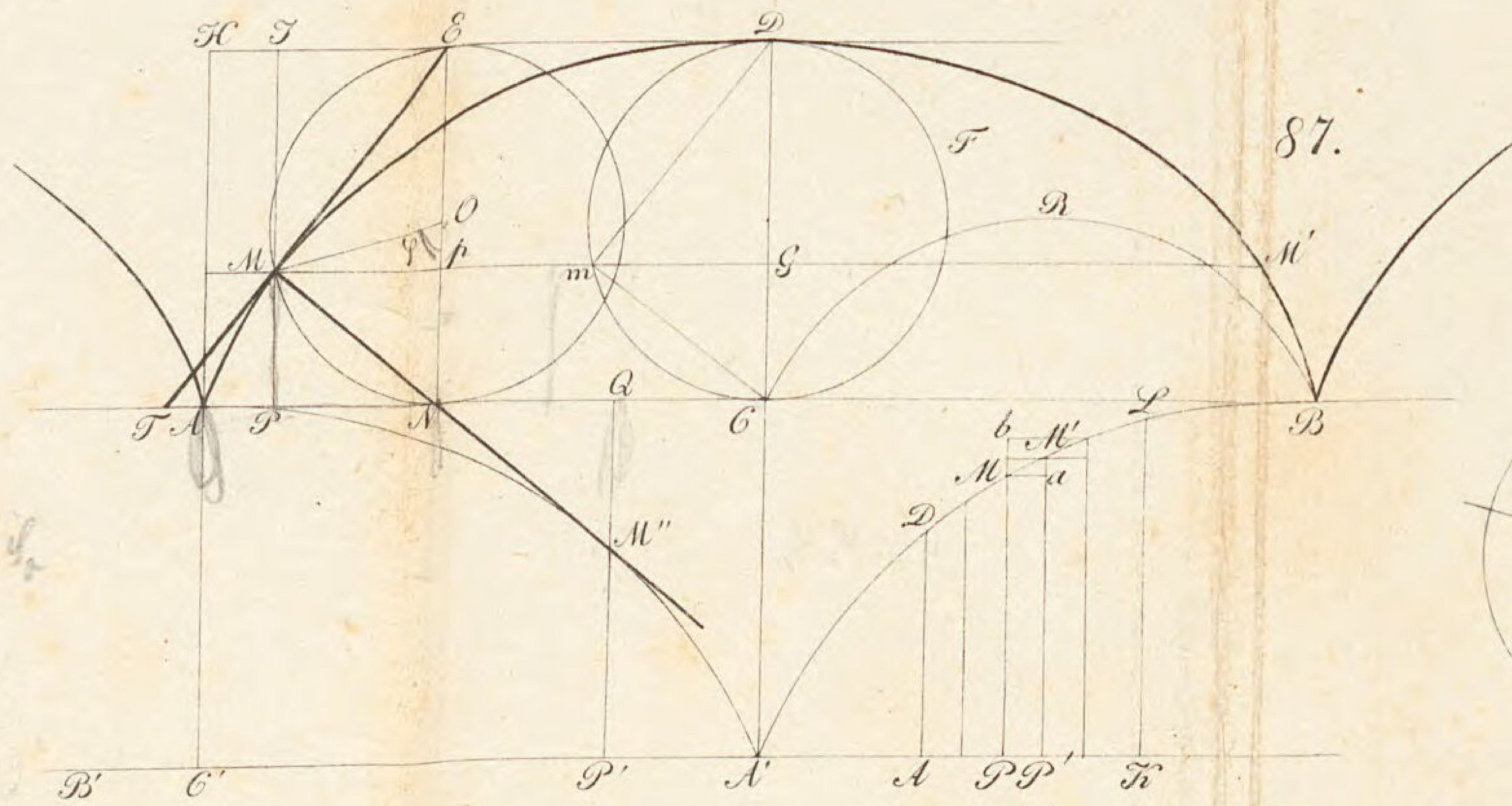
80.

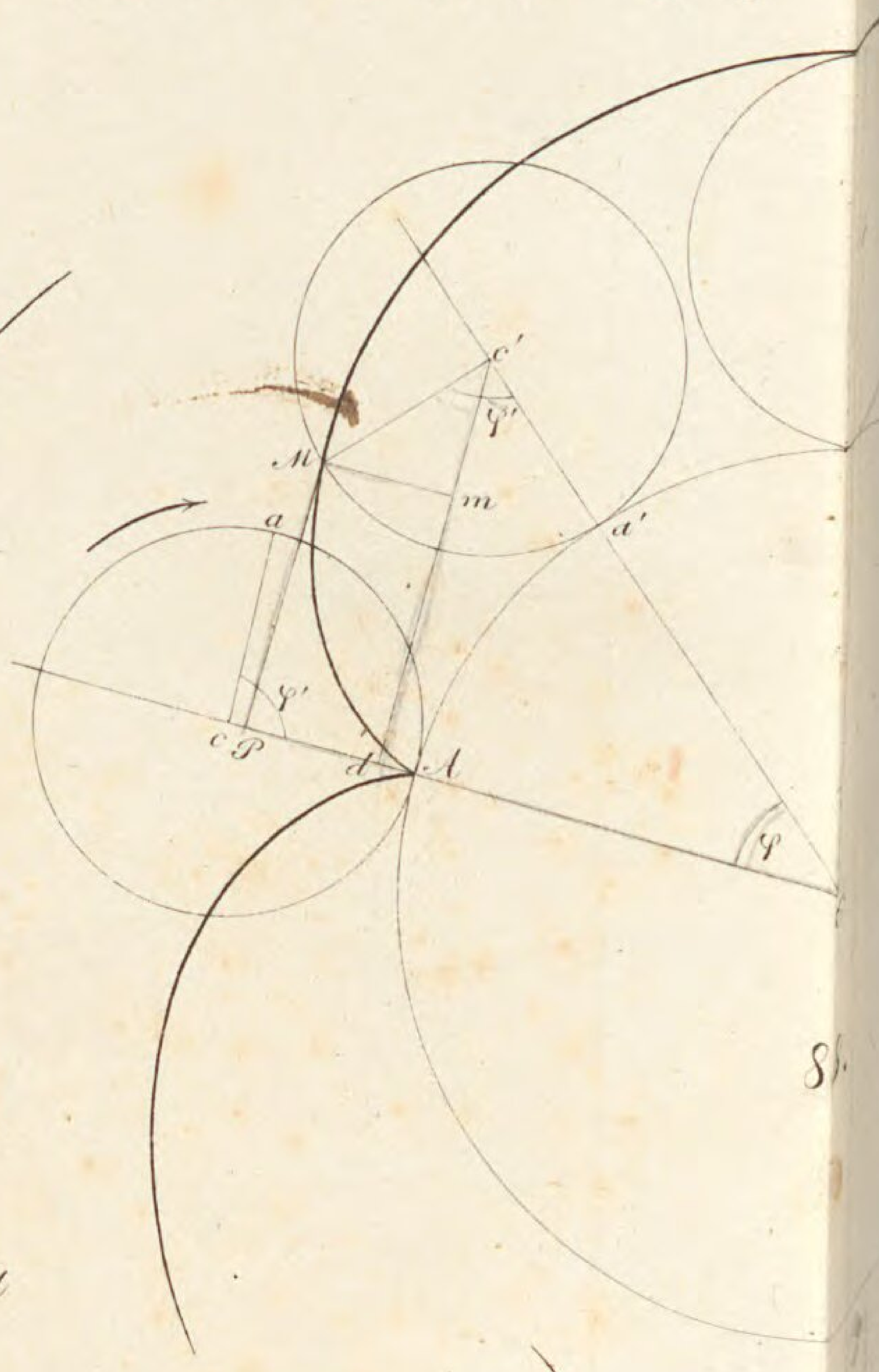


79.

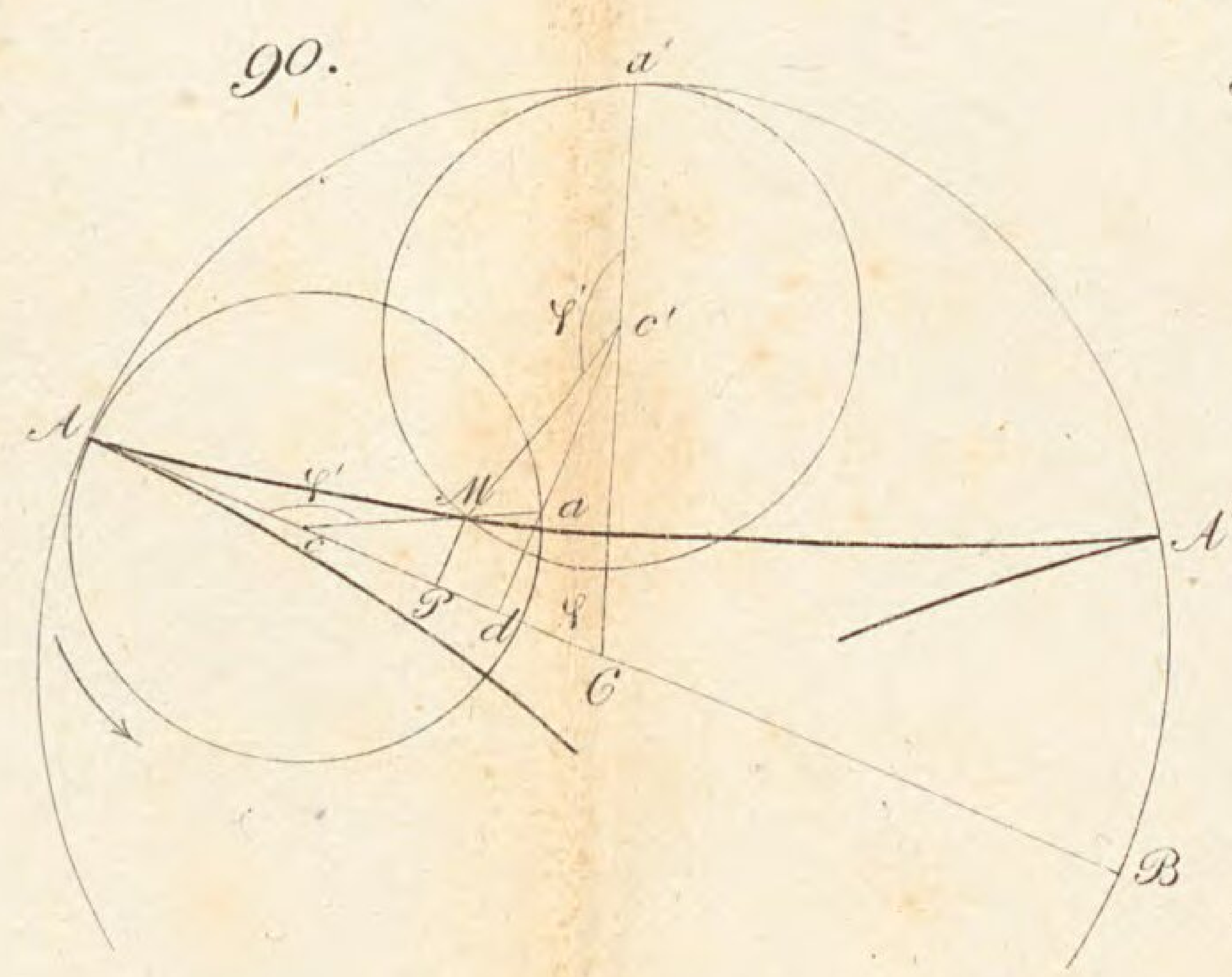


87.

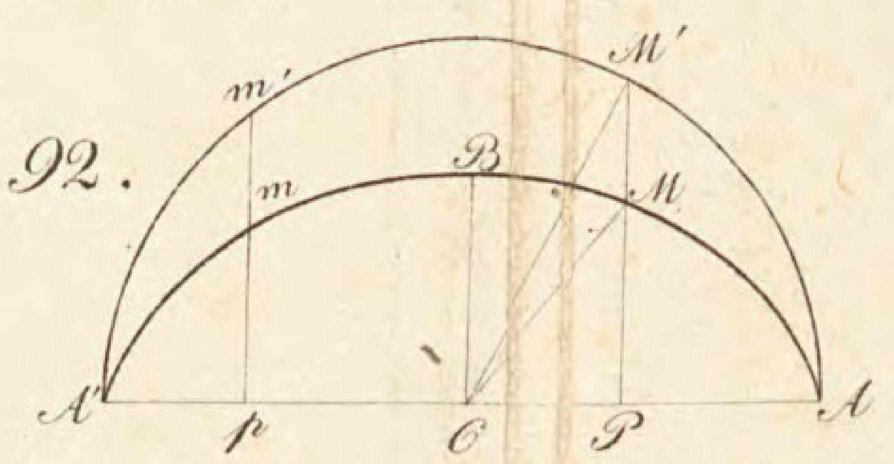




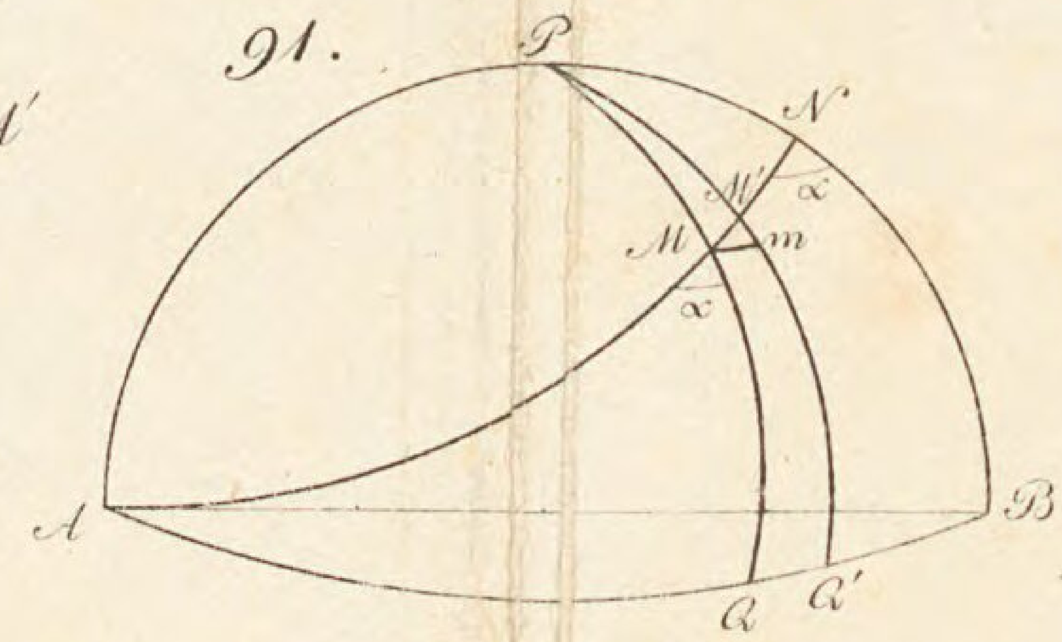
90.



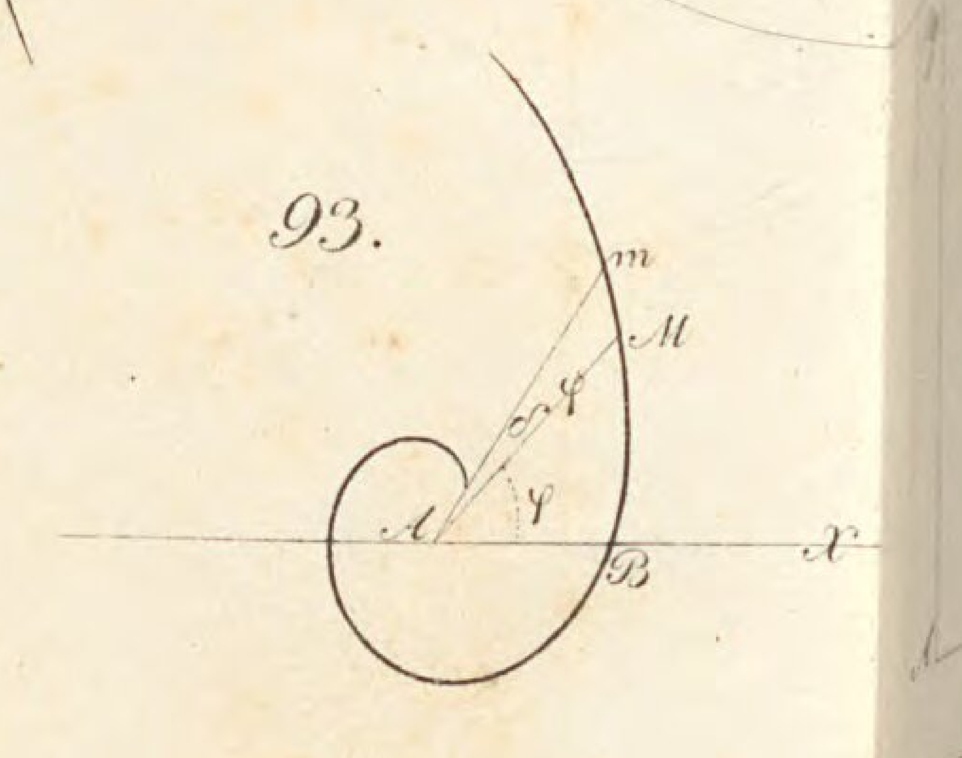
92.

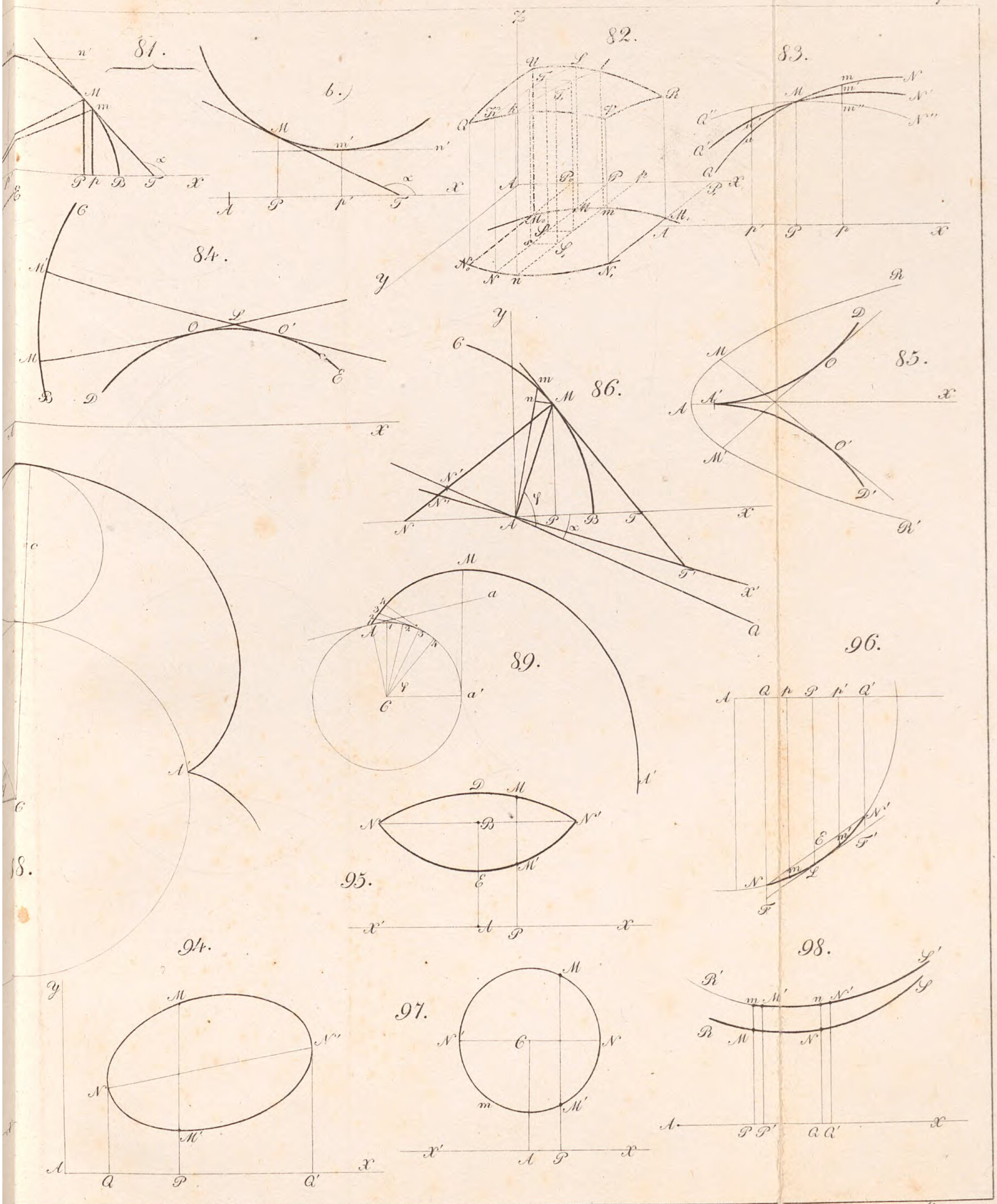


91.



93.





Aigner sc.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burg, Ritter von

Compendium der höheren Mathematik Mit 4 Kupfertafeln

Wien 1859

Math.p. 61 nc
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081565-7